О. Б. Шейнин

# Теория вероятностей

Исторический очерк

Берлин
2019

## Оглавление

Подлость, дикость и невежество
не уважать прошлое,
пресмыкаться перед одним
настоящим
Пушкин

Я действительно ощущаю, как
неверно было столько лет работать
в области математической стати-
стики и пренебрегать её историей.
К. Пирсон (1978, с. 1)

## Предисловие

Предлагаемая книга будет полезна тем, кто интересуется историей математики или теории вероятностей или/и статистики, равно как и специалистам в этих областях математики. Она основана на наших собственных исследованиях (частью которых мы давно уже недовольны). Многие из них были с большими трудностями, а подчас и нелегально опубликованы за рубежом ещё при достославном первом государстве рабочих и крестьян.

Мы описываем возникновение понятий случайности и субъективной или логической вероятности в древности, осмысливание исходных понятий теории вероятностей в обществе, возникновение политической арифметики и историю собственно теории вероятностей. Мы также прослеживаем развитие статистики и, впервые, проникновение статистического метода в естествознание, равно как и историю математической обработки наблюдений от Птолемея, Бируни и Кеплера до классической теории ошибок. Изложение мы доводим до аксиоматизации теории вероятностей и подлинного рождения математической статистики, т. е. до Колмогорова и Фишера.

Из общих источников упомянем работы Stigler (1986), Hald (1990; 1998) и Farebrother (1999). Первое из них вопреки своему названию включает лишь отдельные главы темы и испорчено неверным описанием работ Эйлера и Гаусса и развязным отношением к этим классикам науки. Книги Хальда доступны для хорошо подготовленных читателей, некоторые темы (особо: результаты Маркова) опущены, а компоновка материала крайне затрудняет знакомство с конкретным содержанием, например, того или иного мемуара Лапласа. Наконец, Фейрбрадер описал математическую обработку наблюдений.

Считаем нелишним предупредить читателей, что многие книги и статьи по нашей теме просто никуда не годны, и что даже солидные издательства выпускают явную халтуру, см. наши рецензии (2006c, d). Частично это происходит потому, что по крайней мере на Западе научное сообщество не считает рецензирование достойным трудом и допускает восхваление кого попало[1], да и сравнительная узость круга авторов затрудняет объективный анализ. Хуже того, опубликовать честную рецензию совсем непросто, потому что издательства посылают многим журналам бесплатные экземпляры своих выходящих книг. И вот мнение крупного учёного (Truesdell 1984, с. 292): *По определению, знания теперь нет, потому что истина отброшена как устаревший предрассудок*. Невольно вспомнишь журнал *Новые книги за рубежом*, реферативный журнал *Математика* и упомянешь золотую медаль Академии наук, присуждённую А. А. Чупрову в 1915 г. за рецензирование, выполненное по её поручению (Шейнин 1990/2010, с. 44).

Мы с благодарностью вспоминаем покойных проф. А. П. Юшкевича, который неизменно (и слишком) благоволил нам и без помощи которого нам не удалось бы публиковаться за рубежом, и редактора журнала *Archive for History of Exact Sciences* проф. К. Трусдела, который немало повозился с нашими английскими рукописями и заставил нас значительно усилить лингвистические потуги. Широте его взглядов могли бы позавидовать многие нынешние учёные.

В 1991 г., после переезда в Германию, мы смогли сразу же продолжать работу в основном ввиду тёплой поддержки проф. И. Пфанцагля, который, в частности, чудом добился для нас гранта от издательства Акселя Шпрингера. В своих публикациях мы выражали благодарность многим коллегам, в том числе покойным Ч. Эйзензарту и М. В. Чирикову, одарённому математику, научная карьера которого была прервана болезнью.

**Пояснения**. 1. Данное издание является переработкой предыдущего издания 2013 г., однако источники, опубликованные после 2013 г., мы не учли. Исключением являются наши собственные публикации.

2. Строгие и нестрогие неравенства, определяемую величину и её статистическую оценку стали различать быть может лишь с конца XIX в. Термин *метод наименьших квадратов* (МНКв) ввёл Колмогоров (1946), до того времени в ходу было выражение *способ наименьших квадратов*. Другие сокращения: ЗБЧ = закон

больших чисел; ЦПТ = центральная предельная теорема (Polya 1920).

## Примечания

**1.** Вот поразительный пример. Desrosières (1993) заявил, что Пуассон сформулировал усиленный закон больших чисел, а Гаусс вывел нормальный закон как предельный для биномиального распределения (см нашу рецензию в *Isis*, vol. 92, 2001, с. 184 – 185), Stigler (1997/1999, с. 52) же назвал этого автора первоклассным учёным (не иначе как в отличие от Эйлера и Гаусса, см. выше).

Особая причина подобного поведения по-человечески понятна: не ознакомившись ещё с каким-либо источником, на всякий случай положительно сообщают о нём. Так Слуцкий (1912, с. 130 прим.) отозвался о книге Некрасова (1888/1912), а затем изменил своё мнение, см. его же последующее письмо Маркову того же года (Шейнин 1990с/2010, с. 68). Кроме того, многие *домашние* описания работ классиков умалчивают о недостатках своих героев. Назовём отечественные описания работ Чебышева и Маркова, восхваление Лобачевского за счёт Римана (Ляпунов) и французские дифирамбы Кондорсе и Лапласу. Общераспространённое замалчивание и/или неграмотное описание работ Гаусса по теории ошибок заслуживает отдельного упоминания. Вызвано это было некорректным отношением Гаусса к Лежандру и непомерным возвеличиванием практически бесполезной теории ошибок Лапласа.

# 1. Введение

**1.1. Периодизация.** Колмогоров (1947, с. 54) “условно” разделил историю теории вероятностей на четыре части: создание “начал” (от Паскаля и Ферма до Якоба Бернулли); далее, от Муавра до Пуассона; Чебышев, Марков и Ляпунов и зарождение математической статистики; начало XX в. Примерно ту же схему предложили и Гнеденко (1958) и Прохоров и Севастьянов (1999), связав последний период с внедрением идей и методов теорий множеств и функций действительного переменного.

Мы полагаем, что существовала предыстория теории вероятностей, начавшаяся с Аристотеля, что первоначальный вариант теории завершился работами Якоба Бернулли, Муавра и Бейеса; что вплоть до Чебышева теория вероятностей развивалась как прикладная математическая дисциплина; что к концу XIX в. она стала отраслью “чистой” математики; и что следует выделить период её аксиоматизации. Особо отметим, что, соответственно, “чистые” математики начали признавать теорию вероятностей лишь в только что указанном периоде, и что быть может до сегодняшнего дня они почти игнорируют гауссову теорию ошибок.

Именно Лаплас отнёсся к теории вероятностей как к математической дисциплине с приложениями к естествознанию, и именно поэтому ему удалось достичь фундаментальных достижений в нескольких отраслях естествознания. Пуассон последовал за ним; достаточно привести одну ссылку (Poisson 1837, § 52).

**1.2. Математическая статистика.** Её трудно отделить от теории вероятностей и от статистики вообще. Можно считать, что она зародилась на рубеже XIX − XX вв. в результате работы английской биометрической школы и так называемого континентального направления статистики и что Фишер перевёл пирсоновскую статистику из области прикладной математики в чистую. Её целью является систематизация, обработка и использование статистических данных, см. Колмогоров и Прохоров (1974, с. 480). Эти авторы также добавили не существовавшее ранее определение исходных данных: сведения о числе объектов в совокупности, обладающих определёнными признаками. Но сбор и всё же предварительное исследование данных обычно относят лишь к теоретической статистике, и мы полагаем, что этим и следует определять отличие между математической и теоретической статистикой[1].

**1.3. Статистический метод.** Можно полагать, что *статистика* и *статистический метод* равнозначны; принято, однако, применять первый термин при изучении населения, в остальных же случаях, и особенно в приложениях к естествознанию, обычно употребляют второй. Существуют и такие выражения как *медицинская* и *звёздная статистика*, и здесь же следует упомянуть теорию ошибок (§ 1.4).

В истории статистического метода можно выделить три этапа. Вначале выводы основывались на подмеченных качественных (что соответствовало характеру древней науки) статистических закономерностях, как бы на качественной корреляции. Вот утверждение древнеримского учёного и врача Цельса (Celsus 1935, с. 19):

*Внимательные люди замечали, что именно в общем лучше подходит, и стали назначать то же самое своим пациентам. Так возникло искусство врачевания*.

Второй этап (Тихо Браге в астрономии, Дж. Граунт в демографической и медицинской статистике) был характерен наличием статистических данных, выводы из которых либо подмечались как прежде, либо основывались на простейших вероятностных идеях и методах. С конца XIX в. выводы формулируются (или проверяются) при помощи математико-статистических методов.

**1.4. Теория ошибок.** Со времени своего зарождения (середина XVIII в.) и вплоть до 1920-х годов стохастическая теория ошибок (по существу − приложение статистического метода к обработке наблюдений) занимала одно из центральных мест в теории вероятностей. Недаром Пуанкаре (1921/1983, с. 343) заметил по поводу своего трактата 1896 г., что теория ошибок *естественно* была его *основной целью*. Впрочем, в этой области он почти ничего не добился (§ 12.2). Далее, P. Lévy (1925, с. vii) заявил, что без этой теории его основное сочинение об устойчивых законах распределения оказалось бы бесцельным[2]. Тем не менее (Шейнин 1995с), для теории ошибок оно было совершенно бесполезным. Но оба сочинения оказались весьма важными для самой теории вероятностей.

В свою очередь, математическая статистика обязана теории ошибок двумя важнейшими принципами, − наибольшего правдоподобия и наименьшей дисперсии.

В древности астрономы распоряжались наблюдениями по своему усмотрению. На второй стадии, быть может начиная с Тихо Браге, наблюдения перестали быть “частной собственностью”, но их обработка ещё не подкреплялась количественными вероятностными соображениями. Третья стадия (Симпсон, Ламберт) характеризовалась внедрением таких соображений, и, наконец, Лаплас и главным образом Гаусс завершили построение классической теории ошибок, хотя позднее Гельмерт продолжал работу последнего и внёс в теорию некоторые важные моменты.

Теория ошибок явно или неявно применяется, пожалуй, во всех экспериментальных науках, например в метрологии (Ku 1969).

Основная особенность теории ошибок − использование понятия “истинная величина” измеряемой константы. Фурье определил её как предел среднего арифметического, и мы подчёркиваем, что это понятие необходимо в различных отраслях экспериментальной науки (например, в метрологии, да и в физике), см. Прим. 10 к гл. 7.

Существует и детерминированная ветвь теории ошибок, не связанная с вероятностными представлениями. Вот одна из её задач: составить программу угловых измерений на местности, при которой неизбежные ошибки, и систематические, и случайные, в наименьшей степени повлияли бы на координаты геодезических пунктов. Другая задача: определить оптимальную форму треугольника триангуляции, имея в виду те же цели. Cotes (1722) решил 28 соответствующих задач о плоских и сферических треугольниках с различными наборами исходных данных.

Эта ветвь зародилась в древности (§ 2.1.4), но её существенное развитие было связано с применением дифференциального исчисления, которое позволило изучать погрешности функций измеряемых аргументов. Другим направлением детерминированной теории ошибок оказалось исследование инструментов, выявление различных ошибок, вызванных их несовершенством и опять же составление соответствующих целесообразных программ наблюдений. Особая заслуга принадлежит здесь Гауссу и Бесселю, с которых началась новая стадия экспериментальной науки. Впрочем, весь этот круг вопросов мы оставляем в стороне; в принципе они могли бы принадлежать планированию эксперимента и/или предварительному исследованию данных, которое выявляет в них закономерности (например, систематические ошибки).

## Примечания

**1.** Отметим разумность одного из первых определений статистики, а точнее, её теории (Butte 1808, p. XI): *Статистика это наука о познании и должном оценивании статистических данных, об их сборе и систематическом анализе*.

**2.** Чебышев (1887) указал, что доказываемая им теорема (ЦПТ) может обосновать МНКв, а в конце своей жизни Пуанкаре (§ 12.2-8) заявил, что теория ошибок “естественно” являлась его основной темой в теории вероятностей.

# 2. Предыстория

**2.1. Случайность, вероятность, математическое ожидание.** Случайна ли бесконечная (гораздо более трудный вариант: конечная) числовая последовательность? Это − фундаментальная проблема. И вот весьма существенный вопрос: какова роль случайности в естествознании, к примеру, в эволюции видов и в кинетической теории газов? В статистике случайная величина (насколько же лучше английский термин *случайная переменная*!) должна быть статистически устойчива, в естествознании же, это условие не обязательно[1]. Колмогоров (1983/1986, с. 467) указал, что *следует различать случайность в* […] *широком смысле и стохастическую случайность* (*которая является предметом теории вероятностей*).

Нет нужды обосновывать необходимость изучения вероятности и математического ожидания. Впрочем, последний термин давно следовало бы упростить, отбросив ненужное прилагательное (что мы и сделаем), см. § 7.1.1.

**2.1.1. Аристотель.** Древние учёные неоднократно упоминали случайность и (логическую или субъективную) вероятность[2]. Первое означало отсутствие цели или закона, − обнаружение клада или необусловленную встречу знакомых (Аристотель, *Метафиз*., кн. 5, гл. 13, 1025a; *Физика*, гл. 4, 196b30). Второй пример можно истолковать как пересечение цепей событий,[3] и в обоих из них небольшое изменение действий (действия) привело бы к существенному последствию; клад не был бы найден, встреча не состоялась бы, ср. точку зрения Пуанкаре в § 12.2-9.

Эти примеры позволяют истолковать случайность и как возможность (Аристотель, *Метафиз*. 1064b − 1065a), а Гегель (Hegel 1812/1978, с. 383 – 384) сформулировал обратное предложение, которое означало, что если некоторая (дискретная случайная) величина принимает значения $x_i$, $i = 1, 2, …, n$ с соответствующими вероятностями, то $x_i$ также случайно. Особый пример Аристотеля (*Физика*, гл. 8, 199b1; *О возникновении животных* 767b5) относился к нарушению закона, к уродствам. Первой степенью уродства он назвал рождение самки вместо самца, поскольку возможно, что самец-отец не возобладает над самкой-матерью. Таков, казалось бы, был один из первых и не очень убедительных примеров диалектики необходимого и случайного[4]. Пример Аристотеля по отношению к домашним животным подтвердил Кювье (Cuvier 1831, p.

CLXXXVII), сославшись на опыты другого биолога.
Аристотель (*О небе*, гл. 12, 283b1) также указывал, что *спонтанное и случайное* [имеет место] *вопреки тому, что есть или происходит всегда, или как правило*. Спонтанное, по его мнению (*Физика* 197b0, 197b14 и 197a5), происходит у низших животных и многих неодушевлённых вещах (?), случай же относится к моральным действиям.
Вероятным Аристотель (*Первая аналитика* 76a0) назвал то, что имеет место большей частью (*завистники ненавидят*)[5]. Он (*О поэзии* 1460a25) даже сравнил друг с другом две субъективные вероятности: неправдоподобная невозможность предпочтительней неубедительной возможности. Вероятностями он (*Риторика* 1376a19) рекомендовал пользоваться в суде. Аристотель (*Rhetorica* 1402a5; *О поэзии* 1461b) также заметил, что *неправдоподобные вещи могут происходить*. Это утверждение уж наверное было общепризнанно, формально же оно приводит к усиленному ЗБЧ.

Аристотель полагал, что случайные события происходят редко, см. также выше, − т. е. обладают низкой вероятностью, − а его пример (*О небе* 292a30, 289b22) показывает, что уже в те времена азартные игры иллюстрировали вероятностные выводы: при игре в кости десять тысяч бросков *коан* (что бы это ни означало) подряд невозможны, так что *трудно* представить себе, что скорости звёзд случайны (т. е. не подчиняются никакому общему закону) и в точности соответствуют размеру их кругов[6]
Аналогичное утверждение, не связанное, правда, с естествознанием, имелось и у Цицерона (Franklin 2001, с. 164).
Junkersfeld (1945) исследовала аристотелево понимание случая, и вот её определение (с. 22). Случай есть нечто, происходящее

*Время от времени; обладающее признаками цели; могущее быть объектом естественной или рациональной потребности; но на самом деле не бывшее объектом какой-либо потребности и имевшее место нечаянно*.

Есть у Аристотеля и высказывания в духе качественной корреляции, см. § 2.1.3, есть и зачаток идеи об ошибках первого и второго рода (там же, 951b0): лучше оправдать преступника, чем осудить невинного[7].

И Платон, и Аристотель, как засвидетельствовал Симплиций (Sambursky 1956/1977, с. 3), называли естествознание наукой вероятного (эйкотологией). Аристотель (например, *Метафиз*., 1064b15), правда, заявил, что в отличие от софистики ни одна *традиционная* наука не интересуется случайным, так ведь и теория вероятностей занимается не случайным, а его законами. Он (*Ethica Eud.* 1247a), однако, признавал, что случай *существенно присутствует* в навигации и стратегии и даже, что навигация *подобна броску костей*. Платон (Cioffari 1935, с. 30) уточнил:

*Случай решает почти всё в искусстве* […] *лоцмана, врача и генерала, но конечно же, во время шторма очень полезно воспользоваться искусством лоцмана.*

Позднейший учёный, Леви бен Гершон считал детерминизм естественных наук лишь приближённым и вероятным (Rabinovitch 1973, с. 77, со ссылкой на его сочинение), а Маймонид (там же, с. 166) полагал, что естественнонаучные теории лишь вероятны.

Аристотель (например, *Никомахова этика* 1104a24) также сформулировал мысль об оптимальных свойствах среднего поведения, средней умеренности. Ещё раньше аналогичные утверждения появились в древнем Китае. Ученику Конфуция приписывается учение о среднем (Буров и др. 1973, с. 119 – 140), а Никомах из Герасы (1952, с. 820) даже назвал совершенные числа средними между теми, сумма делителей которых меньше или больше самих этих чисел. Средние числа, добавил он, умеренны. В медицине (§ 2.1.3) среднее считалось наилучшим состоянием (здоровья), а в азартных играх (§ 2.2.3) среднему (арифметическому) приписывались некоторые стохастические свойства.

В новое время среднее арифметическое стало основной оценкой расположения измеряемых констант в теории ошибок (§ 2.2.4), а о его применении в гражданской жизни см. § 3.1.2. Оно, разумеется, связано с соответствующим ожиданием. Удачу и счастье Аристотель (*Метафиз.* 1065a, *Риторика* 1361b и *Magna Moralia* 1206b, 1270a) назвал уклонениями от разумного качественного ожидания.

**2.1.2. Библия и Талмуд.** Эти источники отражали общие представления древних народов и уже потому интересны. Известно, что религия препятствовала развитию науки, в том числе и медицины (§ 7.2.3), но в то же время самые выдающиеся учёные (Кеплер, Ньютон) были воодушевлены желанием понять божественные законы, и кроме того богословие требовало умения логически мыслить. Так, в Ветхом завете (Притчи 14:28) приводятся прямая и обратная теоремы: *Во множестве народа* −

*величие царя, а при малолюдстве народа беда государю*. В середине XVII в. ту же мысль разделяли со-основатели политической арифметики, предшественницы статистики, Дж. Граунт и У. Петти, а в XVIII в. − немецкий статистик Зюссмильх.

Нам предшествовали Hasofer (1967), который описал применение жребиев в Талмуде, и Rabinovitch (1973). Мы весьма обязаны последнему, хотя и не удовлетворены ни его выбором примеров, ни пояснениями. Заметим, что он опровергнул утверждение (*Encyclopaedia Hebraica*, vol. 14. Tel Aviv, 1962, c. 920 – 921) о том, что *древняя еврейская мысль не знала* (точнее, не использовала) *понятия вероятности*.

Талмуд состоит из Мишны (комментария к Пятикнижию Ветхого завета) и позднейших комментариев к самой *Мишне*. Иерусалимский Талмуд был закончен в IV в., а основной Вавилонский, на столетие позже. Мы ссылаемся на английский перевод последнего (6 томов. Лондон, 1951 – 1955), а в немногих случаях и на его немецкое издание (12 томов. Берлин, 1930 – 1936) и французское издание Иерусалимского Талмуда (6 томов. Париж, 1960).

**Случай** несколько раз упоминается в Ветхом завете (2-я Царств 1:6 и 20:1, 3-я Царств 22:34 и 2-я Паралипоменон 18:33). Так (два последних и идентичных примера): *Один человек случайно натянул лук и ранил царя Израильского* … И здесь, и в других примерах случай, как у Аристотеля, означал отсутствие цели[8].

И в Библии, и в Талмуде мы находим попытки **отделить случайное от необходимого.** Например (Бытие, гл. 41), два по существу равнозначных сна не следовало считать случайными, тем более, что каждый из них описывал маловероятное событие, а точнее чудо (первый сон: тощие коровы съели тучных). Далее, Иов (9:24) решил, что земля *отдана в руки нечестивых*, потому что их *светильник* угасает редко (21:17). Своеобразное случайное событие, с немалой, однако, вероятностью описано в Исходе 21:29: нападение быка, который был бодлив *и вчера, и третьего дня*.

И вот несколько примеров, имеющихся в Талмуде (Шейнин 1998b, с. 191 – 193). Если в городе, который *выставляет* 500 (1500) солдат в течение трёх дней (но не сразу) умирают трое (девять человек), их смерть следует приписать чуме. Вероятность смерти горожанина за трое суток в меньшем городе видимо принималась равной 1/2 (ср. Прим. 10), так что пренебрегаемая смерть троих имела вероятность 1/8. Но почему же не принималась во внимание почти одновременная смерть всех троих? Ранний комментатор, раввин Мейр (немецкое издание Талмуда, т. 3, с. 707), заявил, что указанное решение объясняется по аналогии с бодливым быком (см. выше)[9].

Второй пример связан с ежегодной церемонией отпущения грехов. Верховный жрец вытягивал жребий с равными вероятностями каждого из двух возможных исходов, и в течение 40 лет подряд результаты жребиев совпадали. Этот результат объясняли выдающимися моральными качествами (одного и того же) жреца.

В Библии (Числа 3:44 – 49) и подробнее в Иерусалимском Талмуде (Шейнин 2002с, с. 184 – 185) описана процедура выкупа за первенцев мужского пола. Моисей подготовил для жеребьёвки 22 546 билетиков, на 273 больше требуемого числа, из которых лишь 273 были проигрышными, требовавшими уплаты 5 шекелей. Оказалось, что они выходили через равные интервалы, что сочли чудом. Но зачем были нужны лишние билетики? Пояснения нет, но видимо участники жребия опасались, что последним из них достанутся лишь проигрышные билетики. Опровержение этого мнения, основанное на субъективных вероятностях, см. в § 9.4, а соответствующее доказательство см. Тутубалин (1972, с. 12).

Последний пример (Rabinovitch 1977, с. 335) относится к подброшенным младенцам. Талмуд установил, что в городе с большинством еврейского населения младенец считается евреем, так же как при равенстве еврейского и иного населения, в противном же случае − нет[10].

Правила о запрещённой пище косвенно опирались на (статистические) **вероятности.** Талмуд устанавливал запреты различной строгости на пищу, разрешённую лишь священникам: остальное население должно было руководствоваться определёнными соотношениями запрещённого и разрешённого (например, для зерна двух видов). Rabinovitch (1973, с. 41) сообщает, что Маймонид признавал семь соответствующих уровней (т. е. вероятностей). Так, при разрешённом соотношении 1/100 вероятность съесть запрещённую пищу равнялась 1/101.

Особый пример (Rabinovitch 1973, с. 40) описывает рассуждение комментатора Талмуда, раввина Шломо бен Адрета (1235 – 1310). На тарелке лежат несколько кусков мяса, один из которых запрещён. Можно съесть первый кусок, потому что он (вероятно) разрешён, так же само − второй и т. д. Последний кусок тоже можно съесть, потому что по библейскому закону *один из двух недействителен* (?). Этот пример можно обосновать только с позиции субъективной вероятности, и кроме того он противоречит решению следующей задачи (Rabinovitch 1973, c. 45): 9 из 10 лавок продают кошерное мясо; кусок мяса, купленный в какой-то из них, неизвестно в какой именно, запрещён. Но тут же разумно: если мясо (видимо, купленное в одной из лавок) найдено, то оно разрешено.

**Ожидание** на до-математическом уровне упоминал Маймонид со ссылкой на *Мишну* (Шейнин 1998b, с. 190): брачный контракт в 1000 зуз, обеспечивавший вдову или разведённую жену, *можно продать за 100* (этих денежных единиц), *но контракт в 100 зуз − лишь меньше, чем за 10 зуз*. Вопреки объективной истине, большие возможные выигрыши считались предпочтительнее. Такое же предпочтение существует и сейчас (и нещадно используется устроителями лотерей). Важнее заметить, что аналогичные идеи, также не вполне определённые, возникли в Европе в связи со страхованием жизни несколько столетий позже (Бирман 1957; Шейнин 1977b, с. 206 – 209; Bellhouse 1981). В связи с подобными контрактами Franklin (2001, p. 261) указал, что Талмуд содержит качественные утверждения об оценке величин, зависящих от случая.

Таблицу ожидаемого срока жизни, общего для мужчин и женщин, составил римский юрист Ульпиан (Шейнин 1977b, с. 209 – 210), однако ни метод её составления, ни его понимание ожидаемого не известны. По мнению Сентемана (Sentemann 1907, p. 252) она была основана на моральных и юридических соображениях.

**2.1.3. Медицина** (Шейнин 1974, с. 117 – 121). Гиппократ оставил качественные теоретико-вероятностные и корреляционные утверждения. Так (Hippocrates 1952a, c. 54 – 55), *вероятно, этот пациент выздоровел по причине* […] или (1952b, c. 90) *в общем, все случаи перелома кости менее опасны, чем* … Он понимал, что ход лечения зависит от конституции и общего состояния больного, т. е. от причин, которые случайно меняются от одного пациента к другому. Корреляционные суждения Гиппократ сформулировал и в своих афоризмах, например (1952c, № 44): *Люди, очень полные по природе, склонны умирать в более раннем возрасте, нежели худощавые*.

Подобные утверждения имелись и у Аристотеля (*Problemata*

892a0): *Почему глаза у блондинов и белых лошадей обычно серые*? Были и более серьёзные замечания о связи между климатом или погодой и здоровьем человека (там же 859b5, 860a5).

Стохастические соображения встречаются и у Галена. Вот одно из них (Galen 1951, с. 202), которое мы вспомним в § 12.2-9):

*У здоровых людей* […] *тело не изменяется даже от исключительных причин, но у пожилых малейшие причины уже приводят к величайшим изменениям*.

Одно высказывание (там же, с. 11) относилось к сути случайного:

*Два источника изнашивают тело. Один − внутренний и спонтанный, другой внешний и случайный, влияющий иногда, нерегулярно и не неизбежно*.

Другое замечание Галена (1946, с. 113) можно связать с клиническими испытаниями:

*Что может воспрепятствовать испытуемому лекарству влиять определённым образом на две* [на три] *сотни человек и оказывать обратное воздействие в 20 других случаях, так что из первых шести осмотренных пациентов* […] *трое будут относиться к трёмстам, а трое − к двадцати. Притом вы не можете знать, какие трое относятся к трёмстам, и какие − к двадцати*. […] *Вы обязательно должны обождать, пока не осмотрите* […] *многих подряд*.

Наконец, Гален (1951, с. 13) полагал, что гармония, т. е., как можно полагать, среднее состояние, средняя конституция является наилучшей для человека, ср. § 2.1.1:

*Здоровье − вид гармонии*. […] *Гармония завершается и проявляется двояко: во-первых, достижением совершенства* […] *и, во-вторых, небольшими уклонениями от этого абсолютного совершенства*.

Там же (с. 20 – 21) он чётко указал, что *хорошая конституция − это среднее между её крайними состояниями* (впрочем, быть может не их среднее арифметическое).

**2.1.4. Астрономия.** Древние астрономы понимали, что их наблюдения были несовершенными и стремились определить **границы**, внутри которых находились измеряемые ими величины. Toomer (1974, с. 139) указал, что установление границ *стало хорошо известным приёмом*, […] *которым пользовались Аристарх, Архимед и Эратосфен*. Вот, к примеру, Аристарх (Aristarchus 1959, с. 403): *Отношение диаметров Солнца и Земли превышает* 19:3 [ = 6,33], *но меньше, чем* 43:6 [ = 7,17].

Точечные оценки всё же были необходимы, и выбирались они с учётом предшествовавших данных (в том числе и границ), качественных соображений и удобства последующих вычислений. По поводу последнего обстоятельства Neugebauer (1950, с. 252; 1975, с. 107) заметил:

*Числа несомненно улучшались для облегчения вычислений*. […] *Часто заметно округление промежуточных результатов, равно как и важных параметров, что нередко лишает нас всякой надежды точно воспроизвести исходные данные*.

*По всей древней астрономии непосредственные наблюдения и теоретические соображения безнадёжно переплетены*[11] […]. *Неизбежные числовые неточности и произвольные округления* […] *то и дело имеют тот же порядок, что и исследуемые величины*.

Беббедж (Babbage 1874) был, кажется, единственным автором, обратившим внимание на подобные *улучшения*. Он выделил прямой обман, *исправление* точности при неизменном среднем значении и произвольный отбор результатов наблюдений.

Особое внимание уделялось выбору **оптимальных условий** для наблюдений, например, определению интервала времени, в течение которого неизбежная погрешность меньше всего повлияет на получаемый результат (см. детерминированную теорию ошибок в § 1.4). Так, Птолемей (Ptolemy 1984, IX, 2, с. 421): во время *стояний* движение планет не обнаруживается. *Довольно грубые* наблюдения Птолемей (там же, III, 1, с. 137) отбросил.

Впоследствии Бируни (1967, с. 46 – 51), единственный арабский учёный, превзошедший Птолемея и оказавшийся достойным предшественником Галилея и Кеплера (см. также ниже), отбросил 4 косвенных определения широты некоторого города и оставил её единственное прямое и простое наблюдение.

По этому поводу Aaboe & De Solla Price (1964, с. 2 и 3) заявили, что

*Вплоть до изобретения телескопов имел место* […] *странный парадокс: даже хорошо градуированный прибор* [по их оценке, с ошибкой градуировки в 5′] *для измерения углов на небесной сфере* […] *вряд ли мог сравниться по точности с разумными глазомерными наблюдениями*.

Небольшие древние инструменты, как они полагают, служили для того, чтобы избегать вычислений. В *характерных случаях точность измерений зависела не от совершенства* *инструментов, а от верного выбора решающего явления*. Они даже назвали древние наблюдения качественными.

Гиппарху было известно, что при благоприятных условиях заданная ошибка наблюдения могла сравнительно мало повлиять на искомое неизвестное (Toomer 1974, с. 131). Вавилонские астрономы периода Селевкидов имели представление о подобных явлениях. Их лунные и планетные вычисления (Neugebauer 1950, с. 250) *основывались на очень небольшом числе наблюдений, весьма высокая точность* которых не требовалась. Автор добавил:

*Представляется, что одной из самых восхитительных сторон древней астрономии было направление всех усилий на сведение к минимуму влияния неточности отдельных наблюдений грубыми инструментами*.

И он же (1948, с. 101):

*Наблюдения были скорее качественными, а не количественными. При помощи инструментов можно было достаточно хорошо решать, <u>когда углы равны</u>, но не <u>насколько они велики</u>, сказал Птолемей по отношению к диаметрам Луны и Солнца*.

Уточним его ссылку на Птолемея: следовало указать *Альмагест* V, 14, с. 252). В издании 1984 г. слова Птолемея оказались чуть иными.

Астрономы несомненно знали, что некоторые погрешности, например, вызываемые рефракцией, действуют односторонне, но не отделили систематических ошибок от случайных, см. конец § 7.3.1. Впрочем, вот соответствующий намёк (Птолемей 1956, III, 2, с. 231):

*Практически все другие гороскопические инструменты* […] *часто подвержены погрешностям, солнечные инструменты ввиду случайного сдвига своего положения или своего гномона, а водяные часы по различным причинам, ведущим к засорению и нерегулярности в течении воды, а также по чистому случаю*.

Подобное утверждение о водяных часах см. также у Бируни (1967, с. 155 – 156).

Многие авторы заявляли, что Птолемей без упоминания источника воспользовался наблюдениями Гиппарха и вообще подтасовывал наблюдения, а R. R. Newton (1977, с. 379) даже назвал его *наиболее успешным обманщиком в истории науки*. Да, по всей видимости воспользовался, но с чистой совестью, в соответствии с обычаями своего времени. Но нет, не подтасовывал Птолемей никаких наблюдений, а отбрасывал и уравнивал их так, *как считал нужным* (Gingerich 1983, с. 151; 2002), был *оппортунистом, готовым упрощать и халтурить* (Wilson 1984, с. 43)[12].

Мы допускаем, что при точечной оценке результатов наблюдений древние астрономы разумно принимали почти любое число внутри некоторых границ (см. выше). Это соответствует и современной точке зрения о наблюдениях, погрешности которых подчиняются *плохим* законам распределения, и качественному характеру древней науки. Картографические работы Птолемея подтверждают наш вывод: он стремился к подобию истины (скорее, к истине в целом), а не к математической согласованности результатов (Berggren 1991). И вот подобное же суждение о намного более близком периоде (Price 1955, с. 6):

*Многие средневековые карты вполне могли быть составлены исходя из общего знания местности, без всяких измерений.*

Приведём мнение трёх авторов (Kepler 1609/1992, с. 642/324; Laplace 1796/1982, с. 275 − 276; Newcomb 1878, с. 20), подтверждающие сказанное выше:

*Вряд ли мы имеем что-либо от Птолемея, чего нельзя обоснованно подвергнуть сомнению, прежде чем оно станет полезным.*

*По-видимому, ему можно верить, когда он определённо говорит, что наблюдал звёзды этого каталога* [Гиппарха]. *Птолемея обвинили в присвоении открытий его предшественников, но благородная манера, с которой он очень часто цитирует Гиппарха,* […] *полностью снимает с него эти обвинения.*

*Весь* <u>Альмагест</u>, […] *как мне представляется, дышит безупречной искренностью.*

**Регулярные наблюдения** являлись третьей основной чертой древней астрономии. Neugebauer (1975, с. 659) признаёт за Архимедом и Гиппархом заслугу систематических наблюдений диаметров Солнца и Луны, да и вообще без подобных наблюдений Гиппарх не смог бы составить своего каталога звёзд. Птолемей (1984, III, 1, с. 132 и 136; IV, 9, с. 206), видимо, также наблюдал регулярно; во втором случае он упомянул свои *ряды* *наблюдений* Солнца.

Бируни (1967) неоднократно сообщает о своих регулярных наблюдениях, хотя одна из его целей, предсказание опасных оползней (с. 32), сомнительна: уже ошибка широты, пусть равная 1′, воспрепятствовала бы ей. Много позже регулярные наблюдения усиленно, хотя и косвенно, рекомендовал Леви бен Гершон (Goldstein 1985, с. 29, 93 и 109). В первых двух случаях он заявил, что наблюдения показали, что, соответственно, склонения звёзд и лунный параллакс плохо известны. Rabinovitch (1973, с. 77) сообщил об уверенности Леви в универсальном существовании неопределённости.

Бируни (1967, с. 152) первым, правда лишь качественно, рассуждал об ошибках вычислений и об их совместном действии с погрешностями наблюдений:

*Употребление синусов порождает погрешности, которые становятся заметными, если они присоединяются к ошибкам, вызванным применением малых инструментов и погрешностям, допускаемым наблюдениями*.

Он (там же, с. 155) пытался исключить систематические влияния из определения разности долгот двух городов по наблюдению лунных затмений (ср. вычисление разности широт Бошковичем в § 7.3.2): наблюдатели должны

*Заметить все его моменты* [фазы затмения], *так что каждый момент в одном из двух городов мог бы быть соотнесён с соответствующим моментом в другом городе. Кроме того, момент середины затмения должен быть получен из каждой пары противоположных времён* [фаз].

Наконец, Бируни (Ал-Хазини 1983, с. 60 – 62) ещё не считал среднее арифметическое универсальной оценкой расположения искомой величины. Измеряя плотности металлов, он применял и моду, и среднее из крайних значений, и какие-либо значения внутри крайних наблюдений[13], см. также Шейнин (1992; 2007, с. 19).

Как **астролог**, Птолемей (1956, I, 1 и I, 2) полагал, что влияние неба является лишь тенденцией, и что астрология в большой степени − это, скажем, наука о качественной корреляции. Аналогичные мысли высказал Бируни (1934, с. 232): *Влияние Венеры направлено* …, *Луна имеет склонность* … Оба они таким образом предвосхитили Тихо Браге и Кеплера (§ 2.2.4).

**2.1.5. Маймонид и Фома Аквинский.** О фактическом признании Маймонидом нескольких степеней вероятностей при употреблении частично запрещённой пищи см. § 2.1.2, и там же мы упомянули его рассуждение о брачных контрактах. Возможно, что есть у него и зародыш случайной переменной (Rabinovitch 1973, с. 74):

*Среди случайных вещей некоторые весьма правдоподобны, другие возможности весьма отдалённы, но есть и промежуточные*.

Назвать это высказывание определённым мы не можем. В новое время один из первых соответствующих примеров (в естествознании, а не в лотереях) привёл Maupertuis (1745/1756, с. 120 – 121). Он объяснил случаи, при которых ребёнок напоминает одного из своих предков, а также внезапные изменения (т. е. мутации) неравномерной случайностью.

Маймонид (Maimonides 1975, с. 123) рекомендовал врачам и судьям, мы бы сказали, проверять более простые гипотезы, и лишь при необходимости переходить к более сложным предположениям. Лечить следует *пищей*, затем *нежными* лекарствами, и лишь в крайних случаях − *сильными* средствами, а судья должен стараться добиться *соглашения сторон* (в гражданском процессе?), затем судить *в приятной манере* и только затем становиться *более твёрдым*. Мнение Маймонида можно сравнить с ньютоновым Правилом философствования № 1 (гл. 7, прим. 18) и даже с тем, что называется *Бритвой Оккама* (У. Оккам, ок. 1285 − 1349).

Фома известен как основной комментатор Аристотеля, стремившийся представить своего героя в христианском духе. Как и тот, он (Шейнин 1974, с. 103) полагал, что случайные события происходят в меньшинстве случаев в результате действия какой-то препятствующей силы:

*непреднамеренные и случайные события* […] *происходят ввиду своих причин в меньшинстве случаев и совершенно неизвестны*.

И далее,

*Некоторые причины так соотносятся со своими следствиями, что приводят к ним не необходимо, но в большинстве случаев, а в меньшинстве случаев не могут к ним приводить* […] *ввиду какой-либо препятствующей причины*.

Его примером было рождение девочки, которое соответствовало *цели природы*. Суды (там же, с. 108 − 109), по мнению Фомы (а точнее, Аристотеля), должны руководствоваться вероятностными суждениями[14], и вообще *в делах людей* […] *мы должны довольствоваться некоторой предположительной* *вероятностью*, а законы предусматривают более частые случаи. Наконец, Фома (там же, с. 107) полагал, что божественные чудеса следует подразделять на ранги и степени (как бы по вероятностям их осуществления), см. также Kruskal (1988).

Бирн (Byrne 1968) заявил, что Фома применил зародыш частотной теории вероятностей, что, однако, непонятно. Но во всяком случае Фома оказался связующим звеном между средневековой и новой наукой.

## 2.2. Математическая обработка наблюдений

**2.2.1. Сведения из теории ошибок.** Пусть имеются наблюдения

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,\ x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \qquad (2.1)$$

неизвестной константы. Требуется назначить её значение, оптимальное в том или ином смысле, и оценить его погрешность. В классической теории ошибок наблюдения считаются независимыми (§ 10А.4-4) и, как можно считать, равноточными, потому что в противном случае они могут быть надлежащим образом взвешены.

Описанная задача называется *уравниванием прямых* (*непосредственных*) *наблюдений*. В общем случае уравниваются *наблюдения* $s_1, s_2, \ldots, s_n$, снова независимые, связанные $n$ *уравнениями погрешностей* с неизвестными (*косвенно* наблюдёнными) константами $x, y, z, \ldots$ числом $k$ ($k < n$):

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + s_i = 0, \qquad (2.2)$$

коэффициенты которых заданы соответствующей теорией.

Линейность системы (2.2) не является ограничением, так как приближённые значения $x, y, z, \ldots$ либо известны, либо могут быть вычислены по каким-либо $k$ уравнениям (2.2). Эти уравнения линейно независимы (позднейшее понятие), но во всяком случае *физически независимы*, см. выше, и системы (2.2) несовместны. Для их решения (для *уравнивания* косвенных наблюдений) приходится вводить то или иное дополнительное условие, накладываемое на остаточные свободные члены (назовём их $v_i$).

С начала XIX в. обычно вводилось дополнительное условие МНКв

$$W = [vv] = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = \min^{15} \qquad (2.3)$$

среди всех возможных наборов значений *x, y, z,* … Условие (2.3) приводит к

$$\partial W/\partial x = \partial W/\partial y = ... = 0, \qquad (2.4)$$

откуда нетрудно вывести систему *нормальных уравнений*

$$[aa]\hat{x} + [ab]\hat{y} + \ldots + [as] = 0,$$
$$[ab]\hat{x} + [bb]\hat{y} + \ldots + [bs] = 0, \qquad (2.5)$$

относительно искомых оценок с положительно определённой и симметричной матрицей.

В схеме непосредственных наблюдений то же условие (2.3) приводит к среднему арифметическому. Существует и вторая важная и плохо известная статистикам схема уравнивания наблюдений, см. § 10А.4-9.

**2.2.2. Регулярные наблюдения.** Мы упоминали их в § 2.1.4 и сейчас укажем, что они нужны для исключения систематических влияний и уравновешивания действия случайных погрешностей. Известно, что Кеплер вывел законы движения планет на основе регулярных наблюдений Тихо Браге, который полагал, что они обеспечивают осреднение *случайных, инструментальных и человеческих ошибок* (Wesley 1978, с. 51 – 52)[16]. По Уесли, Тихо Браге комбинировал наблюдения, произведённые при помощи нескольких инструментов.

Возможно (Baily 1835, с. 376), что при составлении своих звёздных каталогов основатель Гринвичской обсерватории Флемстид, напротив, использовал лишь часть своих наблюдений:

*Если редуцировалось более, чем одно наблюдение звезды, то он обычно принимал тот результат, который представлялся ему* […] *наиболее приемлемым.* […] *Он* […] *и не редуцировал всех* (*или существенной части*) *своих наблюдений*. […] *Более того, многие действительно вычисленные результаты* […] *не были внесены ни в один из его рукописных каталогов*.

Впрочем, редуцирование (переход от видимых координат звёзд к их прямым восхождениям и склонениям) был нелёгким. Более того, свои результаты Флемстид, кажется, считал лишь промежуточными, что косвенно подтверждается приведённой выдержкой и высказываниями самого Флемстида. Вот, к примеру, его письмо 1672 г. (Rigaud 1841, с. 129 – 131):

*Сообщаю Вам* [свои наблюдения] *диаметра Солнца, но полагаю, что первое, третье и четвёртое преувеличены* […]. *Остальные считаю весьма точными, но основываться на них не буду, пока не проведу дальнейших наблюдений более точным микрометром*.

Несколько неопределённой остаётся практика Брадлея (Rigaud 1832; Шейнин 1973с, с. 100 – 110), который открыл аберрацию света и нутацию земной оси. В одном случае он (Rigaud, с. 78) вывел среднее арифметическое из 120 наблюдений, а открытие нутации сопроводил следующим утверждением (там же, с. 17):

*Оно указывает нам на громадную пользу регулярных рядов наблюдений и опытов для развития* [астрономии], *равно как и любых иных отраслей естествознания*.

И он же (с. 29) заявил:

*Имея несколько наблюдений какой-либо звезды, проведённые в течение нескольких суток, я записывал либо среднее, либо наиболее согласующийся с ним результат*.

Особого взгляда придерживался Бойль, со-основатель научной химии и соавтор закона Бойля − Мариотта (Boyle 1772/1999, с. 376; Шейнин 1973с, с. 110, прим. 42):

*Опыты следует оценивать не по их числу, а по значимости* […]. *Один опыт вполне может заслуживать целого трактата* […]. *Одна крупная жемчужина высшего качества* […] *может оказаться дороже громадного числа мелких* […], *которые покупаются на вес*.

Так нужны ли ряды наблюдений? Всё зависит от порядка случайных погрешностей, их закона распределения, от величины систематических влияний, требуемой точности результата (в отдельности в смысле тех и других ошибок) и стоимости наблюдений. Но вряд ли следует портить одно хорошее наблюдение множеством посредственных. Наконец, по крайней мере в геодезии следует наблюдать при различных (но приемлемых) метеорологических условиях, чтобы уменьшить влияние систематических ошибок. Это же соображение, кажется, имел в виду Менделеев (§ 11.9.3). Проблема исключения систематических влияний заставляет заранее определять число наблюдений, и это исключает применение последовательного анализа.

**2.2.3. Галилей. Свойства ошибок и выбор гипотезы.**

Обрабатывая несовпадающие результаты наблюдений параллакса Новой звезды 1572 г., произведённые несколькими астрономами, Галилей (Galilei 1632/1948, День третий), сформулировал ряд положений не существовавшей ещё теории ошибок[17] и прежде всего указал свойства *обычных* случайных ошибок (известные и Кеплеру, см. § 2.2.4). Способ измерений был явно негодным: в те времена даже годичные параллаксы звёзд не поддавались оценке (и система Коперника не была ещё окончательно доказана). Астрономы, правда, интересовались лишь местом Новой (*под* Луной или *среди* неподвижных звёзд), но это облегчение было недостаточным, и суждение Галилея (см. ниже), хоть и верное, нельзя считать обоснованным.

Он сравнивал две указанные выше гипотезы и высказался в пользу второй. Его критерием, (с. 214), который впоследствии применил Бошкович (§ 7.3.2), был минимум суммы абсолютных поправок в параллаксы:

*Самым подходящим будет внести поправки и исправления, наименьшие и наиболее близкие, какие только возможно.* […] *Если можно смягчить явную ошибку* […] *прибавлением или вычитанием двух или трёх минут и посредством такого исправления сделать результат наблюдений возможным, то не следует стремиться исправлять их добавлением или отнятием 15, 20 или 50 минут*.

Впрочем, ввиду трудностей вычисления, Галилей рассмотрел далеко не все пары наблюдений.

Буняковский (1846) посвятил рассуждению Галилея несколько строк в главе об истории теории вероятностей, но не указал точной ссылки, а Майстров (1967, § 5 из гл. 1) описал результаты Галилея. Впрочем, подробно и точно их рассмотрел Hald (1990, с. 149 – 160).

В 1610 – 1612 гг. несколько астрономов обнаружили пятна на Солнце. Daxecker (2004; 2006) особо описал работу Христофера Шейнера и его книгу *Rosa ursina sive Sol* 1626 – 1630 гг. Гораздо более известно, что Галилей (1613) сумел отделить вращение пятен вместе с самим Солнцем от их случайных перемещений и тем самым определил период вращения Солнца около его оси. Этот период равен 24,5 − 26,5 суток, а по Галилею он составлял лунный месяц.

Гумбольдт (Humboldt 1845 − 1862, 1858, с. 64 прим.) считал возможным, что солнечные пятна стали известными много раньше, что их наблюдали, например, *на побережье Перу, во* *время garua* [суховей, см. чуть ниже о подобных явлениях в Китае] *даже простым глазом*. Но вот великий путешественник Марко Поло (Jennings 1985, с. 648) описал свою беседу в последней четверти XIII в. у китайского города Tianjin с астрономом Jamal-ud-Din родом из Персии (Ирана) и его группой китайских астрономов. Они наблюдали эти пятна, когда *пустынная пыль прикрывала Солнце*. Книга Марко Поло вышла в 1319 г., и он никак не комментировал этого эпизода.

Возможно, что об этих пятнах сообщает Никоновская летопись 1365 – 1371 гг.

Последующая история солнечных пятен главным образом связана с их аккуратнейшим наблюдателем Швабе, однако внимание к нему привлёк Гумбольдт (Clerke ca. 1885/1893, с. 156).

Галилей (1623/1960, § 11, с. 197), видимо, отрицал случайность:

*Те линии называются регулярными, которые, неизменно описываемые установленным образом, допускают определение и обоснование их качеств и свойств*. […] *Но нерегулярные линии − это те, которые вовсе не обладают определённостью, являются неопределёнными и случайными, а потому неопределимыми*. […] *Введение таких линий нисколько не лучше симпатий, антипатий, сокровенных свойств, влияний и других терминов, которые употребляются некоторыми философами* [Кеплером!] *как прикрытие вместо ясного ответа, − я не знаю*.

Это утверждение было, возможно, направлено против некоторых высказываний Кеплера об эксцентриситетах планетных орбит (§ 2.2.4) и в таком случае частично объясняет, почему Галилей так и не признал его законов движения планет.

Видимо в период 1613 – 1623 гг. Галилей написал заметку об игре в кости, опубликованную лишь в 1718 г. (F. N. David 1962, с. 64 – 66; там же, с. 192 – 195, её английский перевод). Он подсчитал количества случаев (стало быть, косвенно и соответствующие вероятности) для всех возможных результатов, т. е. для выпадения трёх, четырёх, …, восемнадцати очков) и засвидетельствовал, что по мнению игроков 10 или 11 очков выпадали чаще, чем 9 или 12. Если учитывать лишь эти два события, то их вероятности будут равны 27/52 и 25/52, разность которых равна 0,0385. О выявлении малых разностей вероятностей см. также Прим. 9 к гл. 3.

**2.2.4. Кеплер. Роль случайности и уравнивание**

**наблюдений.** Случай играл определённую роль в астрономических построениях Кеплера, хоть сам он (1606/2006, с. 163), и отрицал это:

*Но что такое случайность? Всего лишь идол и притом самый отвратительный из идолов. Ничто, кроме как оскорбление полновластного и всемогущего Бога, равно как и совершеннейшего мира, который вышел из Его рук.*

Тем не менее, законы движения планет не могли обосновать значений эксцентриситетов их орбит, и в конце концов Кеплер был вынужден полагать их случайными, − вызванными возмущающими причинами, − вполне в духе одного из аристотелевых истолкований (§ 2.1.1). Уместно упомянуть здесь Пуанкаре (1896/1999, с. 9):

*Ни в одной области точные законы не определили всего, они лишь очерчивали пределы, в которых дозволялось пребывать случаю. В рамках этой концепции слово случай имело точный, объективный смысл.*

Несколько десятилетий назад физики и механики начали признавать за случайностью, а точнее, за хаотичностью, как бы за её высшей ступенью, гораздо более серьёзную роль. Различие этих понятий можно пояснить так: каким бы продолжительным и беспорядочным ни был бы бросок монеты, число его возможных исходов (а возможно и их вероятности) не изменятся, хаотическое же движение характеризуется быстрым возрастанием его неустойчивости во времени и несчётно бесконечным количеством его возможных траекторий.

Кеплер (1604/1977, с. 337) также решил, что возможное (т. е. бесцельное) появление Новой звезды в определённом месте и в некоторый момент (и то, и другое он притом счёл примечательным) настолько маловероятно, что должно было быть вызвано специально (т. е. имело цель, ср. § 2.1.2).

Впервые Кеплер (1596) столкнулся с эксцентриситетами планетных орбит, немало затруднивших его, при попытке моделирования Солнечной системы вставкой пяти правильных многогранников между сферами шести известных в то время планет. Позднее он (1609/1992, гл. 38, с. 405) объяснил появление эксцентриситетов влиянием внешних причин и привёл пример рек, которые не могут достигать *центра Земли* ввиду препятствий, а затем (1620 – 1621/1952, с. 932) более подробно повторил эту мысль.

И всё же Кеплер (1619/1997, название гл. 9 Книги 5 на с. 451) вернулся к своей модели правильных многогранников и заявил, что *Происхождение эксцентриситетов отдельных планет* [поясняется] *установлением гармонии между их движениями*. И на с. 454 он косвенно упомянул в этой связи свой второй закон. Но как могли эксцентриситеты устанавливать эту гармонию, пусть даже при сохранении указанной модели?

Кеплер (Шейнин 1974, § 7) считал себя основателем научной астрологии, науки, как бы мы сказали, о корреляционном, а не жёстком влиянии неба на человека и государство. Так (Кеплер 1619/1997, кн. 4, гл. 7, с. 377 – 378) Меркурий не был его *светилом*, такими телами были *Коперник и Тихо Браге*, а *светила в момент* его *рождения не воодушевили*, а *только пробудили* его. И кроме того (1610/1941, с. 200): *небо и Земля не соединены как зубчатки в часовом механизме*. До Кеплера подобное мнение, видимо, имел Тихо Браге (Hellmann 1970, с. 410).

Главным в астрологии для Кеплера было не составление гороскопов отдельных лиц, а выявление тенденций в развитии государств с учётом *промежуточных причин* (географического положения, климата и пр.), хотя и не статистических данных, ср. подход и цели политических арифметиков в § 3.1.4.

Кеплеру приходилось проделывать громадные вычисления и, в частности, уравнивать наблюдения. Вот интересный пример (Кеплер 1609/1992, с. 200/63): даны наблюдения (градусы мы опускаем) 23′39″; 27′37″; 23′18″; 29′48″. Окончательное значение, 24′48″, он вывел как *среднее по добру и справедливости* (medium ex aequo et bono). Удачная реконструкция (Eisenhart 1976) такова: результат является взвешенным арифметическим средним с весами 2, 1, 1, 0 (последнее наблюдение отброшено).

Итак, Кеплер применил среднее арифметическое, которого ещё не придерживался Бируни (§ 2.1.4), притом в обобщённом виде. Но интереснее, что приведённое им латинское выражение встретилось у Цицерона (*Pro A. Caecina oratio*) и имело оттенок *а не в соответствии с буквой закона*. В своём учебнике латинского языка для студентов-юристов Розенталь и Соколов (1956, с. 126) включили эту фразу в список юридических изречений и выражений и привели соответствующий латинский текст Цицерона (с. 113), его немецкий перевод см. Шейнин (1993c, с. 186)[18].

Кеплер, видимо, читал Цицерона или о нём и назвал обычное среднее арифметическое буквой закона, т. е. универсальной оценкой (параметра сдвига). Можно полагать, что выдвижение среднего арифметического было вызвано повышением точности наблюдений и отказом от их произвольной обработки (§ 2.1.4). Кроме того, среднее арифметическое могло восприниматься как наилучшая оценка по аналогии с древними представлениями о целесообразности среднего поведения (§ 2.1.1).

Кеплер неоднократно, преодолевая мучительные трудности, уравнивал и косвенные наблюдения. Отметим лишь два момента. Как он убедился в том, что наблюдения Тихо Браге противоречат птолемеевой системе мира? Мы полагаем, что Кеплер применил принцип минимакса (конец § 7.3.2), в соответствии с которым наибольший по абсолютной величине остаточный свободный член заданной переопределённой системы уравнений должен быть наименьшим среди всех возможных *решений*. Он, видимо, отыскивал этот минимум среди нескольких разумных возможностей и убедился, что остаточный член достигал 8′, т. е. был слишком велик (Кеплер 1609/1992, с. 286/113):

*Благость Божья соизволила дать нам в лице Тихо столь прилежного наблюдателя, наблюдения которого указывают на ошибку в 8′ в этом вычислении по Птолемею*. […] *Поскольку ими нельзя пренебречь, уже эти восемь минут указали путь к преобразованию всей астрономии и доставили материал для большей части данной работы*.

При собственно уравнивании наблюдений Кеплер (там же, с. 334/143) ввёл в них произвольные малые искажения (они же, поправки). Очень возможно, что он тем самым воспользовался элементами метода Монте Карло, но в любом случае он был обязан учитывать свойства *обычных* случайных ошибок, т. е. подбирать большее число малых по абсолютной величине поправок и примерно равное количество поправок каждого знака.

Заметим, наконец, что Кеплер (1609/1992, с. 523/256), хоть и не сразу, понял, что следует учитывать каждое наблюдение:

*Поскольку первое и третье* [положения] *довольно хорошо согласуются, некоторые менее вдумчивые подумают, что её* [искомую константу] *следует установить по ним, остальные же как-нибудь примирить с ними. Я сам довольно долго пытался это осуществить*.

Вот подходящее утверждение Паннекука (Pannekoek 1961/1989, с. 339 – 340):

*В прошлые века астроном выбирал из своих наблюдений те, которые казались ему наилучшими, и это подвергало его опасности уклониться от истины или наталкивало на выбор* *таких результатов, которые показывали бы возможно не имевшую место согласованность*. [Следует пример из наблюдений Тихо Браге!] *В XVII в. некоторые учёные, как Гюйгенс и Пикар, поняли, что среднее из всех равноточных измерений надёжнее, чем одно из отобранных из них …*

## Примечания

**1.** В биологии случай понимался как неотъемлемое свойство природы. Harvey (1651/1952, с. 338) заметил, что самопроизвольное зарождение происходит случайно, как бы при отсутствии цели и закона:

*Существа, которые возникают самопроизвольно, называются автоматическими*, […] *потому что они происходят в результате случая, самопроизвольного акта природы*.

Даже Ламарк (Lamarck 1809/1873, с. 62), см. также Шейнин (1980, с. 338), был того же мнения. Он (1815, с. 133) также утверждал, что уклонения от предустановленной лестницы живых существ вызывались *случайной причиной*. Никакой устойчивости здесь, разумеется, не было. Гарвей (1651/1952, с. 462) кроме того считал, что форма куриных яиц *только случайна*, т. е. указал пример внутривидовых вариаций. Ламарк (1817, с. 450) также объяснял подобные вариации случайными причинами. Напомним (§ 2.1.1), что Аристотель фактически считал уродства случайными.

**2.** Взгляды Демокрита, Эпикура и Лукреция недостаточно понятны. Russell (1945/1962, с. 83) полагал, что они были *строгими детерминистами*, но, например, Кант (1755/1910, с. 344) заметил по их поводу, что *не случайное совместное движение атомов создало мир*. Впрочем, рассуждения о случае встречались у других древних учёных, ср. Прим. 3, а вот странное утверждение географа и историка Страбона (Strabo 1969, 2.3.7):

*Существующее распределение животных и растений и климатов, равно как и рас и языков, является не результатом замысла, а скорее действием случая*.

Хрисипп (Sambursky 1956/1977, с. 6) полагал, что случайность является результатом нашего незнания, и подобные же мысли высказывали Августин и Фома Аквинский (§ 2.1.5), а в новое время Галилей (§ 2.2.3), Кеплер (§ 2.2.4), Спиноза и Даламбер (M. G. Kendall 1956/1970, с. 31, без точных ссылок) и многие другие учёные.

**3.** Брю (Cournot 1843/1984, с. 306) заметил, что несколько древних учёных явно сформулировали подобное объяснение случая. И вот пример из древнеиндийской философии (Belvalkar & Ranade 1927, с. 458):

*Ворона не знала, что её насест сломает ветвь пальмы, а ветвь не знала, что будет сломана насестом; всё произошло по чистой случайности*.

Отсутствие цели или пересечение цепей событий можно усмотреть у Гоббса (Hobbes 1646/1840, с. 250): путешественник попал под дождь случайно, потому что *ни дождь не был вызван путешествием, ни путешествие дождём*. Там же он заявил, что дождь случаен, поскольку его причина неизвестна.

**4.** Интереснее установление из древнеиндийских *Законов Ману*, − трактата, написанного между II в. до н. э. и II в. н. э. (Bühler 1886/1967, с. 267):

*Свидетель* [в исках о займах], *с которым в течение семи дней после того, как он дал показания, случится* [несчастье в виде] *болезни, пожара или*

*смерти родственника, должен будет заплатить долг и штраф*.
Здесь снова видна попытка отделить необходимое (быстрая божественная кара) от случайного несчастья. Другой пример (Hoyrup 1983) относится примерно к 590 г.: 20 убийц погибли при несчастье, спасся лишь один, − тот, который пытался их образумить. История эта была, возможно, выдумана, но она также отражала мысль об отграничении необходимой кары от случая.

**5.** Цицерон (Franklin 2001, с. 116) понимал вероятное или правдоподобное так же, как Аристотель. Много позднее, в 533 г., в Восточной Римской империи были составлены *Дигесты* (свод гражданского права), в которых неявно повторено то же самое истолкование вероятного (там же, с. 8).

**6.** Видимо: неизменное взаимное положение звёзд не может быть случайным. Более косвенное утверждение подобного рода оставил Levi ben Gerson (1999, с. 48). Впрочем, нельзя заранее определить, какие результаты, скажем, десяти бросков монеты, закономерны, а какие случайны, − они все равновероятны. Уместно вспомнить задачу Даламбера – Лапласа: слово *Константинополь* составлено из отдельных кубиков-букв; не случайно ли их расположение? D'Alembert (1768, с. 254 – 255) заявил, что размещения букв лишь *математически*, но не *физически* равновероятны, так что слово появилось не случайно. Лаплас (1776/1891, с. 152; 1814/1999, с. 837) более убедительно решил, что прочитанные буквы имеют смысл (отвечают некоторой цели), их случайное (бесцельное) составление маловероятно. От строгого решения этой задачи он разумно отказался. См. также § 8.1.5. Пуассон (1837, § 41) привёл равнозначный пример и сделал тот же вывод. Об исключительно редком случае сообщил Matthiesen (1867): каждый из четырёх игроков в вист получил при раздаче карты только одной масти. Проверить это утверждение, конечно же, невозможно.

**7.** Подобные мысли позднее высказывали и Маймонид (Rabinovitch 1973, с. 111), и Фома Аквинский (Byrne 1968, с. 223 и 226), и, в 1716 г., Петр I (*Полн. собр. законов Росс. Империи с 1649 г.*, т. 5, 1830, с. 403), но вряд ли они претворялись в жизнь.

**8.** В другом месте (Экклезиаст 9:11) утверждается, что *время и случай* определяют судьбу человека.

**9.** Вот подходящее замечание А. А. Маркова из его газетного письма 1915 г. (Шейнин 1993, с. 200): *Своим воспитанием они* [семинаристы православных духовных семинарий] *приучаются к особому образу суждений. Они должны подчинять свой разум указаниям святых отцов и заменять его текстами из священного писания*.

Количество *выставляемых* городом солдат характеризовало его население, а смерть младенцев в указанном установлении вряд ли учитывалась. Более отчётливо аналогичное правило заметно в указании об амулете (трактат Sabbath 6[2]): он считается целительным, если вылечивает трёх человек подряд.

**10.** Половинная вероятность специально упоминалась в судопроизводстве видимо в 1190-е годы (Franklin 2001, с. 18). Rabinovitch (1973, p. 44) указал, что в соответствии с Талмудом, если нет *явного большинства*, сомнения считаются как *половина и половина*. В этом смысле, видимо, следует понимать утверждение (см. ниже) о нескольких кусках мяса.
Примечательно сообщение Маймонида Rabinovitch (1973, p. 138), напоминающее о мыслях Якоба Бернулли по поводу доводов (§ 4.2.1):

*Не следует учитывать число сомнений, но поиметь в виду, каково* *несоответствие между ними и как они противоречат действительности. Одно единственное сомнение иногда сильнее тысячи других*.

**11.** При обработке градусного измерения в Китае (723 – 726) часть измерений была откинута и для большей элегантности заменена вычисленными данными (Beer и др. 1961, с. 26; Needham 1962, с. 17 и 42). Вот вывод Нидема (с. 17): *По всей видимости И-Син* [руководитель работ] *считал весьма нежелательным соглашаться* […] *с сырой массой исходных данных* и использовал их лишь для грубого контроля. Он *вероятно полагал*, что вычисленные значения были *намного надёжнее*.

**12.** Но вот руководящее указание нашего доморощенного корифея теории ошибок и беспартийного большевика (Чеботарёв 1958, с. 579): система Птолемея *держала в духовном плену человечество в течение 14-ти веков*.

**13.** В соответствии с Талмудом (Rabinovitch 1974, с. 352) объём *стандартного* яйца, который служил соответствующим эталоном, принимался равным среднему из объёмов *наибольшего* и *наименьшего* яиц (из некоторой крупной партии). Талмуд также содержал элементарные соображения об ошибках линейных измерений (Шейнин 1998b, с. 196).

**14.** Решения, основанные на простейших вероятностных соображениях, упомянуты в *Законах Ману* (Шейнин 1974, с. 108), а в древнекитайской литературе (Буров и др., т. 1, с. 108), к примеру, истинным считалось утверждение большинства.

**15.** Мы будем пользоваться обозначениями Гаусса типа

$$[aa] = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2,\ [ab] = a_1b_1 + a_2b_2 + a_nb_n.$$

**16.** Видно, что Уесли не владел теорией ошибок. По поводу нескольких инструментов Тихо Браге было бы интересно узнать, как он осреднял их показания, когда хотя бы одно из них временно не использовалось (и присущие ему инструментальные ошибки не вносились в средние результаты).

**17.** Быть может несколько преувеличивая, Rabinovitch (1974, с. 355), который описал юридические проблемы и ритуалы иудейской религии, заключил, что эти положения (не сформулированные Птолемеем) были известны уже в древности.

**18.** Среднее арифметическое определённо применялось и до Кеплера. Тихо Браге (Plackett 1958/1970, с. 122 – 123) попарно объединил 24 своих наблюдений прямого восхождения некоторой звезды и вычислил среднее арифметическое в каждой паре. Он, далее, объединил 12 полученных значений с тремя одиночными наблюдениями, придав одинаковый вес всем 15 значениям (т. е. воспользовался обобщённым средним). Пары Браге выбирал так, чтобы существенно исключить из частных средних основные систематические погрешности и быть может качественно оценить влияние случайных ошибок в 12 случаях. Возможно, что до уравнивания он ввёл какие-то поправки в одиночные наблюдения. См. также § 7.3.2.

Л. Б. Альберти (1404 – 1472), весьма разносторонний учёный был также выдающимся геодезистом, но мы ничего не знаем об этой стороне его деятельности, хотя известно, что он измерял и осреднял пропорции тел красивых людей (Шейнин 1974, с. 110).

# 3. Ранняя история

## 3.1. Вероятностные идеи в науке и обществе

**3.1.1. Азартные игры.** Они поддерживали идею о роли случайного в жизни и ещё в древности служили для иллюстрации практически невозможных событий (§ 2.1.1), математики же нашли в них удобное средство для постановки существенно новых задач. Более того, хотя наследие Паскаля не содержало никаких приложений зарождавшейся теории вероятностей, он (1654b/1998, с. 172) успел предложить для неё примечательное название, *геометрия случая*. Далее, Гюйгенс (Huygens 1657/1920, с. 57 – 58) дальновидно заметил, что изучение игр не сводится к остроумным пустячкам; с их помощью *закладываются основы очень интересной и глубокой теории*. Лейбниц (1704/1996, т. 2, кн. 4, гл. 16, с. 506) указал, что неоднократно высказывался за создание *нового вида логики*, которая рассматривала бы *степени вероятности* и рекомендовал для этой цели исследовать *все виды игр*[1]. Это же он указал в письме Якобу Бернулли 1703 г. (Kohli 1975b, с. 509):

*Я хотел бы, чтобы кто-нибудь математически изучил различные игры* (*которые содержат прекрасные примеры* [учения об оценке вероятностей]). *Это было бы и приятно, и полезно, и не недостойно ни Тебя, ни другого уважаемого математика*.

Реньи (1969) попытался представить задуманное Паскалем сочинение. Возможно, что он верно оценил его содержание, но только не указанный им год, 1654, когда Паскаль мог бы написать его. Кроме того, обсуждая, якобы по Паскалю, философские вопросы, он не сослался на Аристотеля.

Теория вероятностей зародилась в XVII в., а не раньше, потому что именно тогда появились влиятельные научные сообщества (академии), и научная переписка стала обычной практикой. Кроме того, в течение многих веков азартные игры всё же недостаточно способствовали возникновению вероятностных идей (M. G. Kendall 1956/1970, особо с. 30). Основными препятствиями были отсутствие *комбинаторных понятий* и идеи случайного события, суеверия и моральные и религиозные *барьеры*. Комбинаторика по существу появилась в XVI в., хотя начало ей положил Леви бен Гершон (Rabinovitch 1973, с. 147 – 148).

Суеверия засвидетельствовал ещё Монмор (Montmort

1708/1980, с. 6). Лаплас (1814/1999, с. 855 лев.) и Пуассон (1837а, § 22) повторили его свидетельство и добавили новые примеры. *Когда в Лотерее Франции какой-либо номер уже долгое время не выходил, толпа спешит покрыть его ставками,* − заметил Лаплас, *другие же придерживались противоположного мнения*. Подобные же заблуждения существуют и ныне, хотя Бертран (1888а, с. XXII) убедительно заметил, что рулетка *не имеет ни воли, ни памяти*.

Даже участие в справедливой игре (с нулевым ожиданием проигрыша) разорительно (§ 7.1.1) и потому основано на предрассудке, а покупка лотерейных билетов тем более вредна. Ещё Петти (Petty 1662/1899, т. 1, с. 64) заметил, что лотерея − по сути *налог на несчастливых самонадеянных дураков,* и тогда же Арно и Николь (Arnauld & Nicole 1662/1992, с. 332) указали на обманчивость надежды на крупные выигрыши в лотерее. По сути, они рекомендовали забыть про маловероятные благоприятные события, ср. конец § 2.1.2.

**3.1.2. Юриспруденция.** Мы упоминали её в §§ 2.1.1 и 2.1.5 и, в частности, заметили, что одно из первых правил для разграничения случайного и необходимого было сформулировано для нужд судопроизводства. Но пожалуй именно с середины XVII в. возросло значение гражданских исков и вероятностных идей в судах[2]. Декарт (Descartes 1644/1978, с. 323) ввёл в научный обиход моральную достоверность[3], видимо главным образом для юриспруденции. Её же упоминали Арно и Николь (1662/1992, с. 328), хотя Лейбниц (§ 4.1.2) и сомневался, что наблюдения могут её обеспечить. Уже в начале XVIII в. Николай Бернулли (§ 4.3.2) посвятил свою диссертацию приложению *искусства предположений* к юриспруденции. Даже римское каноническое право *обладало развитой системой полных, половинных и четвертных доказательств* (Garber & Zabell 1979, с. 51, прим. 23). О римском кодексе гражданского права см. также Прим. 5 к гл. 2 и Franklin (2001, с. 211). Лейбниц (1704/1996, с. 504 − 505) также упомянул степени доказательств и сомнений в юриспруденции и медицине и указал, что

*Наши крестьяне* […] *уже давно полагают стоимость земельных участков равной среднему арифметическому из оценок трёх групп оценщиков*[4].

**3.1.3. Страхование имущества и жизни.** Известно (Райхер 1947, с. 40), что примерно два тысячелетия до н. э. караванщики на Ближнем Востоке договаривались делить убытки от воровства, грабежа и утери товара, а Талмуд сообщает, что такова же была практика купцов в Палестине и Сирии.

Первым существенным видом страхования имущества было морское. Так, имел место аморальный и неоднократно запрещаемый обычай держать пари за и против гибели судов. И в этой, и в цивилизованной формах морского страхования ставки или платежи видимо основывались на весьма приближённых и притом субъективных оценках. Можно полагать, что именно подобные оценки имел в виду Шофтон (Chaufton 1884, с. 349), когда утверждал, что в средние века рискам придавались определённые значения.

В первом английском статуте о страховании (Publicke Acte No. 12, 1601; *Statutes of the Realm*, vol. 4, pt. 2, pp. 978 – 979) указано, что торговцы *и этого королевства, и иностранных наций* очень давно уже страхуют свои товары, корабли и вещи, подверженные риску.

Страхование жизни известно в двух основных формах, − с выплатой страховой суммы по наступлению определённого события (с выплатой наследникам в случае смерти страхователя), либо с регулярными выплатами страхователю пожизненной ренты. Эти ренты известны в Европе с начала XIII в., хотя позже они были запрещены примерно на столетие вплоть до папской буллы 1423 г. (Du Pasquier 1910, с. 484 – 485). Возраст страхователя обычно не учитывался ни в середине XVII в. (Hendriks 1853, с. 112), ни даже, в Англии, при Уильяме III, который правил с 1689 по 1702 гг. (K. Pearson 1978, с. 134). Видимо и в противном случае он принимался во внимание лишь весьма обобщённо (Шейнин 1977b, с. 206 – 212; Kohli & van der Waerden 1975, с. 515 – 517; Hald 1990, с. 119).

Говорить об использовании понятия ожидания при таких обстоятельствах вряд ли уместно; впрочем, положение стало изменяться в конце XVII в. Но важно отметить, что страхование жизни в XVIII в. и даже в середине XIX в. вряд ли существенно основывалось на вероятностных представлениях[5], статистические данные, собираемые страховыми компаниями, равно как и методы исчисления страховых платежей держались в секрете, и до второй половины XIX в. более или менее честное предпринимательство, основанное на статистике смертности, вряд ли искоренило прямой обман. Тем не менее, по крайней мере с XVIII в. институт страхования оказывал сильное влияние на теорию вероятностей.

Остановимся на работе де Витта (De Witt 1671). Он выделил 4 возрастные группы (5 – 53, 53 – 63, 63 – 73 и 73 – 80 лет) и принял, что шансы смерти определённым образом возрастают от группы к группе и постоянны внутри каждой из них. По его вычислениям стоимость пожизненной ренты для *молодых* людей должна была превышать ежегодную выплату в 16 раз (а не в 14, как было принято).

Eneström (1896/1897, с. 66) заметил, что де Витт неясно изложил свою работу. Так, риск умереть неизменно относился к трёхлетнему ребёнку, что не только не было объяснено, но выражено неверно, а выбранные шансы смерти в различных возрастах противоречили вычислениям.

В приложении к основному тексту (Hendriks 1853, с. 117 – 118) де Витт указал, что исследовал значительно больше, чем 100 различных классов, содержавших примерно по 100 человек, и нашёл, что

*Для молодых жизней каждый из этих классов всегда приносил покупателям ренты* […] *более 16 флоринов капитала с одного флорина годичной ренты*. […] *Таким образом*, […] *на практике, когда покупатель ренты на несколько жизней делит свой капитал* […] *на несколько молодых жизней, на 10, 20 или более, он может быть уверен в получении без риска более чем шестнадцатикратной стоимости купленной ренты*.

Это утверждение относится к предыстории ЗБЧ и показывает одну из сторон тогдашней деловой жизни. Ожидание выигрыша $\mathrm{E}x_i$ от покупки каждой *жизни* было, видимо, положительным. Считая эту величину постоянной, можно было рассчитывать на общий выигрыш примерно равный $n\mathrm{E}x$, где $n$ – число этих *жизней*. Намного позже Кондорсе (Condorcet 1785a, с. 226) засвидетельствовал, что участвовавшие в подобной *коммерции* (и, очевидно, ничего не знавшие о ЗБЧ) считали прибыль *верной*. Существовала, кажется, и практика косвенного участия *жучков* во многих азартных играх одновременно. Во всяком случае, и Муавр (De Moivre 1718/1756, задача 70) и Монмор (Montmort 1708/1713, с. 169) упоминают каких-то лиц, делавших ставки на выигрыш того или иного игрока, и о них же глухо упоминает Курно (1843, § 11). Эта практика быть может возникла намного раньше.

В том же году, в письме математику Гудде де Витт (Hendriks 1853, с. 109) элементарным образом подсчитал стоимость пожизненной ренты *на несколько жизней*, т. е. ренты, выплачиваемой вплоть до смерти последнего из, скажем, двух человек (супругов). При этом он определил распределение наибольшего члена серии наблюдений с равномерным распределением.

Подробное описание истории института пожизненных рент и в том числе работ де Витта и Гюйгенса (§ 3.2.2) см. Kohli & van der Waerden (1975), и мы лишь заметим, что де Витт не обосновал принятый им закон смертности. Видимо в результате его сочинения стоимость пожизненных рент в Голландии в 1672 – 1673 гг. зависела от возраста страхуемых (Commelin 1693, с. 1205).

В рукописи 1680 г. Лейбниц (1986, с. 421 – 432), см. также Лейбниц (2000), описал свои мысли о государственном страховании (Sofonea 1957a). Он не рассматривал собственно страхования, а высказался в пользу заботы *князей* о бедных, заметил, что общество должно заботиться о каждом и пр. Много позже подобные взгляды сформулировал Зюссмильх (§ 7.2.2).

Особой формой взаимного страхования были тонтины, названные по имени итальянского банкира Тонти. Каждый из группы лиц примерно одного и того же возраста, т. е. из тонтины, уплачивал определённый взнос городу или государству. Проценты на собранный капитал выплачивались только остававшимся в живых членам тонтины, так что долгожителям доставались изрядные суммы, а со смертью последнего члена тонтины она прекращала существовать.

Общественное мнение отрицательно относилось к тонтинам, полагая, что их члены замыкаются в своём круге и неизбежно желают смерти друг другу. В XIX в. тонтин уже, кажется, не было, хотя Эйлер (1776) предложил новую форму тонтины, которая могла бы включать членов различных возрастов и принимать к себе новых членов (а потому и не исчезать). Его предложение не было испробовано.

**3.1.4. Статистика населения.** Ветхий завет (Числа, гл. 1) сообщает об исчислении всего общества *сынов израилевых*, а точнее о подсчёте *всех, годных для войны*. Напомним (§ 2.1.2), что Талмуд характеризовал население городов лишь по числу выставляемых ими солдат. Попытка оценить население Китая была предпринята примерно в 2238 г. до н. э., а перепись касты воинов имела место в Египте не позже, чем в XVI в. до н. э. (Федорович 1894, с. 7 – 21). Но даже в Италии XV в., несмотря на все успехи в бухгалтерском деле и математике (M. G. Kendall

1960),

*Подсчёты сводились к сплошному перечислению, и всё ещё скорее являлись записью существующего положения, нежели основой для оценок или предсказания в расширяющейся экономике*.

Слишком трудно было добиваться большего! И только Граунта (1662), см. также Урланис (1963) и K. Pearson (1978, с. 30 – 49), и в меньшей степени Петти можно назвать отцами статистики населения. Они изучали население, экономику, торговлю и обсуждали соответствующие причины и связи при помощи простейших вероятностных соображений и интуитивной веры в устойчивость статистических показателей, что можно отнести к предыстории ЗБЧ. Укажем, однако, что Граунт иногда некритически основывался на малом числе наблюдений и полагал, что население возрастает в арифметической (а не в геометрической) прогрессии. Эту ошибку исправили Зюссмильх и Эйлер (§ 7.2.2).

Новую дисциплину Петти нарёк политической арифметикой, хотя и не привёл её определения. Впрочем, можно сказать, что её целью было социально-экономическое изучение государств и отдельных городов или регионов при помощи (весьма ненадёжных) статистических данных о населении, промышленности, сельском хозяйстве, торговле.

Петти (1690/1899, т. 2, с. 244) чётко сформулировал свой отказ от *сравнительных и превосходных* [степеней] *слов* и пытался выражаться *в числах, весе или мере* и так же поступал Граунт. По меньшей мере 30 рукописей Петти (1927) принадлежат политической арифметике, и все они в целом показывают, что он был философом науки, близким по духу своему младшему современнику Лейбницу. Вот одно из его высказываний (там же, т. 2, с. 39 – 40), см. также Шейнин (1977b, с. 218 – 220):

*Что является общей мерой времени, пространства, веса и движения? Какое число основных звуков или букв* […] *составляют речь или язык? Как назначать имена и как складывать и вычитать ощущения и как оценивать вес и силу слов; всё это является логикой и рассуждением.*

Петти (1927, т. 1, с. 171 – 172) даже предложил учредить *общий регистр населения, посевов и насаждений и торговли Англии*. В частности, он имел в виду сбор данных обо

*Всех рождениях, женитьбах, погребениях,* […] *о печах и домах* […], *равно как и о населении по возрасту, полу, специальности,*

*титулам и должностям*.
Охват материала такого регистра *был бы шире, чем у нашего нынешнего Бюро генерального регистра* (Greenwood 1941 – 1943/1970, с. 61).

Граунт исследовал еженедельные списки умерших в Лондоне, которые начали появляться ещё в XVI в. и регулярно печатались с начала XVII в. Его основная заслуга была в том, что он понял значение этих статистических данных и постарался отыскать в них определённые закономерности. Так, он установил, что оба пола примерно равночисленны (что противоречило тогдашним взглядам) и что на 14 мальчиков рождалось примерно 13 девочек. Используя отрывочные статистические данные, он оценил численность населения Лондона и Англии, равно как и степень влияния различных болезней на смертность и при этом пытался учесть влияние систематических искажений исходных данных[6].

Далее, несмотря на скудные и подчас неверные сведения о возрасте умиравших, даваемые в еженедельных списках, Граунт смог как-то (не совсем понятно как) составить первую таблицу дожития, а потому и смертности, общую для мужчин и женщин (раздельные таблицы появились лишь в начале XIX в.). Именно, он указал долю доживавших до первых шести лет жизни и до каждого последующего десятилетия вплоть до 86 лет. До этого возраста доживал по его подсчётам лишь 1 человек из 100. Хотя таблица Граунта оказалась грубо ошибочной, её методическое значение было огромным.

Долгое время сочинение Граунта приписывали Петти, однако по мнению Халла (Hall), см. Петти (1690/1899, т. 1, с. lii), Петти

*Возможно подсказал предмет исследования,* […] *вероятно помогал тут и там при комментировании медицинских и иных вопросов,* […] *собрал* [некоторые] *числовые данные* […] *и быть может исправил или даже составил Заключение к книге* …
Но и в этом случае Петти оказывается соавтором. Сам Петти (1674, посвящение Лорду Брункеру), однако, назвал Граунта автором указанного сочинения.

Граунт существенно повлиял на последующих учёных, и вот мнения о нём (Huygens, письмо 1662 г./1888 – 1950, 1891, с. 149); Süssmilch (K. Pearson 1978, с. 317 – 318); Willcox (Graunt 1662/1939, с. x); Hald (1990, с. 86):

*Трактат Гранта* (!) *действительно заслуживает внимания, и он мне очень нравится. Он рассуждает разумно и ясно, и я восхищаюсь тем, что он смог извлечь все свои выводы из этих* *простых наблюдений, которые прежде считались бесполезными*.

Открытие статистической регулярности было *столь же возможно, как и Америки, требовался только Колумб* …

*Граунт достопамятен, в основном потому, что обнаружил* […] *равномерность и предсказуемость многих биологических явлений в массе.* […] *Поэтому он, скорее, чем кто-либо иной, был основателем статистики*.

Граунт, как он сказал сам, свёл данные *из нескольких огромных и беспорядочных томов в небольшое число понятных таблиц* и проанализировал их *в нескольких сжатых параграфах*, что и составляет цель статистики.

Хальд мог бы сослаться на Колмогорова и Прохорова (§ 1.2).

Вторую таблицу дожития составил Галлей (Halley 1694a; 1694b), многосторонний учёный, но в первую очередь астроном. Он (1694a) использовал статистические данные для Бреслау (Вроцлава)[7], города с закрытым населением, и применил свою таблицу для простых вероятностных подсчётов, связанных со страхованием жизни. Кроме того, он элементарным путём подсчитал общее относительное население города. Так, на 1000 младенцев в возрасте до 1 года приходилось 855 в возрасте от года до двух, …, и, наконец, в возрасте от 84 до 100 лет, − 107 человек. Сложив все эти числа, Галлей получил 34 тысяч человек (ровно), так что отношение населения к числу ежегодных рождений оказалось равным 34. До 1750 г. таблица Галлея оставалась лучшей из существовавших (K. Pearson 1978, с. 206).

Длительное время его вычисления оставались плохо понятными. Далее, ежегодная смертность в городе, 1/30, была столь же высока, как в Лондоне, и всё же Галлей считал Бреслау как бы статистическим стандартом. Если такое понятие разумно, то стандартов должно быть несколько. Наконец, Галлей полагал, что неравномерности в его данных *выправились бы, будь число лет* [наблюдения] *намного больше*. Здесь снова видна интуитивная вера в ЗБЧ, однако неравномерности вполне могли были быть вызваны систематическими влияниями.

Вторая статья Галлея интересна как рассуждение о благосостоянии населения.

K. Pearson (1978, с. 78) указал, что Галлей использовал свои данные *в такой же степени, в какой это мог бы сделать* *современный актуарий* и что он вычислил свою таблицу дожития *так, как мы сегодня должны были бы это сделать*. Sofonea (1957b, с. 31*) назвал статью Галлея *началом всего развития современных методов страхования жизни*, а Хальд (1990, с. 141) заявил, что она была *высоко значима для науки страхования жизни*. Последующие учёные применяли результаты Галлея, и самым значительным примером было введение равномерного закона смертности для возрастов от 12 лет (Муавр, De Moivre 1725).

В 1701 г. Галлей составил карту изолиний магнитного склонения для северной части Атлантического океана (Chapman 1941, с. 5), и его наряду с Граунтом можно считать зачинателем предварительного исследования данных, весьма важного, хоть и элементарного этапа статистических исследований. Карта Галлея послужила Гумбольдту примером для введения изотерм (§ 11.8.3).

В 1680 – 1682 гг. Лейбниц написал несколько рукописей, относящихся к так называемому государствоведению (§ 7.2.1) и политической арифметике и впервые опубликованных в 1866 г. (Leibniz 1986, с. 340 – 349, 370 – 381, 456 – 467 и 487 – 491), см. также Шейнин (1977b, с. 224 – 227). Он рекомендовал публиковать *государственные таблицы* достопримечательностей (числовые или нет?), а затем сравнивать их друг с другом по различным годам и странам. Составлять эти таблицы, по мысли Лейбница, должны были специальные регистрационные управления, и видимо для них-то он придумал перечень 56 вопросов (впрочем, записанный в весьма сыром виде), в том числе количество населения и сравнение рождаемости и смертности.

Он кроме того полагал желательным собирать сведения о научных достижениях, *умных мыслях* и медицинских наблюдениях, а также учреждать *санитарные коллегии* для сбора чрезвычайно широкого круга медицинских, метеорологических и сельскохозяйственных сведений.

Одна из рукописей Лейбница (там же, с. 456 – 467) была чисто политико-арифметической. В ней он ввёл *среднюю продолжительность жизни*, необходимую, как он заметил, для подсчёта стоимости пожизненных рент[8]; принял, хотя и без обоснования, соотношение смертности к населению равное 1:40 и явно ошибочно допустил равномерный закон смертности для всех возрастных групп, включая младенцев. Вслед за Арно и

Николем (Arnauld & Nicole 1662/1992, с. 331 и 332) он ввёл и *apparence* [видимость с оттенком *вероятность*] *или степень вероятности* и *среднее apparence* или ожидание. Но совершенно непонятно утверждение Лейбница, которым он закончил свою статью, о том, что рождаемость может быть в 9 или 10 раз выше существовавшей. В начале статьи он ошибочно утверждал, что при броске двух игральных костей выпадение 7 очков втрое (фактически, в 6 раз) более вероятно, чем 12 очков. Todhunter (1865, с. 48) отметил вторую ошибку Лейбница того же вида.

Дальнейшее развитие статистики населения связано с общей задачей отделения случайности от божественного предначертания. Кеплер и Ньютон достигли этой цели по отношению к неодушевлённой природе, и вскоре после этого учёные начали отыскивать закономерности в движении населения, ср. § 3.2.3.

## 3.2. Математические исследования

**3.2.1. Паскаль и Ферма.** В 1654 г. Паскаль и Ферма обменялись несколькими письмами (Pascal 1654a), положив начало формальной истории теории вероятностей. Они обсудили задачи, важнейшая из которых была известна уже в конце XIV в. Вот она. Азартная игра двоих или троих игроков должна была длиться до тех пор, пока один из них не выиграет $n$ партий (и не заберёт все ставки). И всё же игра прервалась при счёте $a:b$ (или $a:b:c$), $a, b, c < n$. Требуется справедливо разделить общую ставку. Оба учёных решили эту задачу, приняв одно и то же правило: ставку следует разделить в соотношении ожиданий их выигрыша, см., например, Takácz (1994) и Шейнин (1977b, с. 231 – 239). Именно фактическое введение этого понятия, ожидания, было их основным достижением. Они также по существу пользовались теоремами сложения и умножения вероятностей[9].

Методы Паскаля и Ферма отличались друг от друга. Паскаль, в частности, применил арифметический треугольник, составленный, как известно, из биномиальных коэффициентов разложения $(1 + 1)^n$ для возрастающих значений *n*. *Трактат об арифметическом треугольнике* Паскаля был опубликован посмертно (1665), однако Ферма был по крайней мере частично знаком с ним. Заметим (Hald 1990, с. 49 и 57), что Паскаль и в этом трактате, и в своих письмах фактически пользовался уравнениями в конечных частных разностях.

Знаменитое пари Паскаля (1669, посмертно) сводилось к выбору одной из двух гипотез. Существует ли Бог, риторически спрашивал глубоко верующий автор, и отвечал: следует держать пари. Если Бога нет, можете жить спокойно (и грешить!), однако в противном случае вы потеряете вечность. В математическом смысле рассуждение Паскаля, которое он, возможно, не успел отредактировать, расплывчато, но его суть ясна: если Бог существует хотя бы со сколь угодно низкой, но фиксированной вероятностью, ожидание блага от веры в Него бесконечно.

Арно и Николь (1662/1992, с. 334) опубликовали аналогичное утверждение:

*Такие бесконечности как вечность и спасение нельзя сравнивать ни с какой преходящей выгодой*. […] *Мы никогда не должны сопоставлять их ни с чем мирским*. […] *Малейшая степень возможности спасения самого себя ценнее всех земных благ взятых вместе, а малейший риск лишиться этой возможности опаснее всех преходящих зол*.

**3.2.2. Гюйгенс.** Его трактат ( Huygens 1657) был первым сочинением по теории вероятностей. Зная лишь общее содержание переписки Паскаля и Ферма, он независимо от них ввёл ожидание случайного выигрыша и также выбрал его в качестве критерия для решения вероятностных задач. Отметим, что он доказывал, что *цена ожидания* лица, которое в $p$ случаях должно получить сумму $a$, а в $q$ случаях − сумму $b$, составляет

$$(pa + qb)/(p + q). \qquad (3.1)$$

Гораздо проще выражение (3.1) обосновал Якоб Бернулли (Jakob Bernoulli 1713/1999, с. 9): если каждый из $p$ игроков получит $a$, а каждый из $q$ игроков получит $b$, то ожидание каждого составит (3.1). В дальнейшем, однако, ожидание, а стало быть и выражение (3.1), начало вводиться по определению.

В своём трактате Гюйгенс решил задачу о разделе ставки при различных начальных условиях и несколько задач, связанных с игрой в кости. Он кроме того перечислил ещё 5 задач (две из которых сформулировал Ферма и одну – Паскаль), решив их позднее либо в своей переписке, либо в неопубликованных рукописях. Они требовали применения теорем сложения и умножения вероятностей, введения (в неявной форме) условных вероятностей и формулы (в современных обозначениях)

$$P(B) = \sum P(A_i)\, P(B/A_i),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Опишем две задачи из упомянутых пяти. Задача № 4 относилась к исследованию выборки без возвращения. Из 8 чёрных и 4 белых шаров, находившихся в урне, извлечено 7; требуется определить соотношение шансов того, что выборка содержала или не содержала 3 белых шара. Гюйгенс (Hald 1990, с. 76) решил эту задачу, составив и решив уравнение в конечных частных разностях для неизвестного ожидания первого события, ср. ниже замечание Кортевега об аналитическом методе Гюйгенса. Ныне подобные задачи, при решении которых появляется гипергеометрическое распределение (Jakob Bernoulli 1713/1999, с. 167 – 168; De Moivre 1712/1984, задача 14 и 1718/1756, задача 20), имеют отношение к статистическому контролю массовой продукции.

Элементарная задача № 4 Паскаля впервые касалась разорения игрока. Каково, спрашивал он, соотношение шансов разорения двух игроков, имеющих по 12 фишек и взявшихся выбрасывать 14 и 11 очков тремя костями. Эти очки выпадают в 15 и 27 случаях соответственно, и искомое соотношение поэтому равно $(5/9)^{12}$.

В 1669 г., в переписке со своим братом, Гюйгенс (Huygens 1888 – 1950, т. 6; Kohli & van der Waerden 1975) обсуждал вероятностные задачи о смертности и страховании жизни. Так ещё не сформировавшаяся теория вероятностей вышла за рамки азартных игр, и произошло это под влиянием таблицы дожития Граунта (§ 3.1.4). Исходя из неё, Гюйгенс (с. 531 – 532) ввёл вероятный срок жизни (но не сам термин) и пояснил, что он не совпадает с *ожиданием* жизни. На с. 537 Гюйгенс указал, что второй срок жизни должен применяться при подсчётах пожизненных рент, а первый − при заключении пари о сроке жизни человека; подобные пари обсуждал и он сам (с. 524 − 526), и его брат Лодевик (с. 484 – 485).

Гюйгенс показал, что вероятный срок жизни может быть определён по графику функции (непрерывная кривая, проходящая через эмпирические точки, данные в таблице Граунта; график помещён между с. 530 и 531)

$$y = 1 - F(x),$$

где в современных обозначениях мы ввели оставшуюся неопределённой интегральную функцию распределения с допустимыми значениями $0 \le x \le 100$.

Здесь же Гюйгенс (с. 528) вычислил ожидаемый срок, после которого умрут два человека, оба в возрасте 16 лет, и сформулировал аналогичную задачу для 40 человек одного и того же возраста (46 лет). Он исходил из таблицы Граунта и равномерного закона смертности в пределах каждой возрастной группы (т. е., как у Граунта, с 16 до 26, с 26 до 36 лет и т. д.). В первой задаче он применил условное ожидание, предположив, что один из двоих (кто-то определённый) умирает раньше другого. Вторая задача была слишком громоздка, но Гюйгенс мог бы заключить, что искомый срок равен 40 годам (по Граунту, 86 лет являлось предельным сроком жизни).

Гюйгенс, правда, решил подобную же задачу, но ошибся. Оставив в силе равномерный закон, он посчитал, что количество смертей будет убывать со временем (т. е. с числом остающихся в живых). На самом же деле, при непрерывном и равномерном распределении на некотором интервале $n$ порядковых статистик разделят его на $(n + 1)$ примерно равных частей, так что количество смертей должно было оставаться примерно постоянным.

Гюйгенс ни разу не упомянул де Витта (§ 3.1.3), но возможно, что работа последнего (написанная в качестве официального и притом секретного документа) оставалась ещё неизвестной[10].

Решая задачи на азартные игры, Гюйгенс исходил из ожиданий, переменных от одной партии к другой, а не из постоянных вероятностей и должен был составлять и решать уравнения в конечных разностях (Korteweg, см. Huygens 1888 – 1950, т. 14, с. 135), так что его, как и Паскаля (§ 3.2.1), следовало бы упоминать в связи с историей этих уравнений. См. также Shoesmith (1986).

Развивая идеи Декарта и других учёных о моральной достоверности (§ 3.1.2), Гюйгенс утверждал, что доказательства в физике являются вероятностными и должны проверяться по их следствиям и что степень достоверности суждений в гражданской жизни следует определять по здравому смыслу. В письме 1691 г. он (1888 – 1950, т. 10, с. 739) действительно упомянул Декарта и без обоснования принял, что вероятность, равная $10^{-11}$, ничтожна. Вряд ли он сам применял это или какое-либо иное число в качестве соответствующего критерия. Заметим, что Борель (Borel 1943, с. 27) предложил считать $10^{-6}$ и $10^{-15}$ ничтожными в *человеческом* и *земном* масштабах соответственно. См. также

Шейнин (1977b, с. 251 – 252).

**3.2.3. Ньютон.** Он высказал интересные мысли и получил новые результаты в теории вероятностей (Шейнин 1971a), однако самыми важными оказались его философские взгляды (K. Pearson 1926):

*Идея Ньютона о вездесущем активизирующем божестве, которое сохраняет средние статистические значения, составила фундамент статистического развития по цепочке Дерхам* [религиозный философ] *– Зюссмильх* [§ 7.2.2] *– Нивентит* [статистик] *– Прайс* [гл. 6] *– Кетле* [§ 11.5] *– Флоренс Найтингейл*[11].

*Муавр расширил теологию Ньютона и направил статистику в новое русло, в котором она проплыла почти столетие. Причины, которые привели Муавра к его* <u>*Аппроксимированию*</u> *или Бейеса к его теореме, были более теологическими и социологическими, чем чисто математическими, и пока не будет признано, что после-ньютоновские английские математики находились под большим влиянием теологии Ньютона, чем под влиянием его математики, история науки XVIII в. и особенно история науки учёных − членов Королевского общества останется непонятой.*

Ньютон не высказывал подобных идей (хотя и полагал, что Бог регулярно избавляет систему мира от накапливающихся неправильностей, см. ниже). В 1971 г., отвечая на наш вопрос по этому поводу, Э. Пирсон указал:

*Прочитав* [K. Pearson (1978)], *я думаю, что понимаю, что имел в виду К. П.* [...] *Он пошёл дальше Ньютона в том смысле, что утверждал, что законы, которые свидетельствуют о предначертании, проявляются в устойчивости средних значений наблюдений …*

С тех пор мы заметили, что К. Пирсон (там же, с. 161 и 653) приписал Муавру (De Moivre 1733/1756, с. 251 – 252) божественную <u>*устойчивость статистических соотношений*</u>*, т. е. предопределение или предначертание* и сослался на Лапласа, который, впрочем, никогда не упоминал предначертания, см. § 8.1-3, но (1814/1999, с. 842) высказал родственную идею:

*В ряду событий, неопределённо продолженном, действие регулярных и постоянных причин должно со временем перевешивать действие причин нерегулярных.*

Пирсон (1926) затем перешёл к Муавру (см. § 5.4) и Бейесу (гл. 6) и заявил, что их работа была вызвана скорее теологическими и социологическими причинами, нежели собственно математикой.

А вот самое характерное высказывание из *Оптики* (Newton 1704, Вопрос 31):

*Слепая судьба никогда не могла бы заставить планеты двигаться по одному и тому же направлению по концентрическим орбитам за исключением некоторых незначительных неправильностей, которые могли происходить от взаимных действий комет и планет друг на друга и которые будут вероятно нарастать, пока эта система не потребует* [божественной] *реформации. Для столь чудесной однородности планетной системы следует допустить действие выбора. О том же свидетельствует однообразие в телах животных.*

В русском переводе (см. Библиографию) подчёркнутая нами фраза отсутствует и, более того, заменена непонятными словами.

Мы уже отметили и логическое несовершенство подобных рассуждений, и их практическую справедливость, – мы бы сказали, их моральную достоверность (§ 3.1.2). Мысль о божественном исправлении системы мира была впоследствии оставлена, но вот признание Ньютоном существования и роли её случайных искажений исключительно интересна; случайных, в том же смысле, в котором случаен результат подбрасывания монеты. И в то же время Ньютон (опубл. 1958, с. 316 – 318), как и Кеплер (§ 2.2.4), не признавал случайности, объясняя её незнанием. Это его мнение высказал в 1693 г. будущий теолог Бентли, который предварительно советовался с Ньютоном и пересказал его мысли. Философский аспект имело также замечание Ньютона (Schell 1960) о том, что понятие шанса можно применять к единичному случайному исходу[12].

Занимаясь хронологией событий древности, Ньютон (1728, с. 52) оставил интересное замечание:

*Греческие хронисты* [...] *утверждали, что цари их нескольких городов* [...] *правили в среднем по 35 – 40 лет, что настолько превосходит ход событий в природе, что не может быть признано. Ибо в соответствии с обычным ходом природы цари правят в среднем около 18 или 20 лет, иногда в среднем на 5 или 6 лет дольше, а иногда на столько же короче. 18 или 20 лет является средней величиной.*

Эту собственную оценку Ньютон вывел на основании других хронологических данных и его решение отвергнуть вдвое больший срок (35 – 40 лет) было разумным. Впрочем, формализация его рассуждения затруднительна: в пределах одной и той же династии срок правления последующего царя напрямую зависит от срока правления предыдущего, а вероятность существенного уклонения значений случайной величины от выведенного среднего арифметического нельзя подсчитать, не зная соответствующей дисперсии (которую Ньютон характеризовал лишь косвенно и обобщённо). Описав более позднее разъяснение Ньютона об источниках своей оценки, Пирсон (K. Pearson 1928a) остановился на примыкающих замечаниях Вольтера и, особенно, на работах Кондорсе.

Упомянем ещё рукопись Ньютона (1967, с. 58 – 61), написанную между 1664 и 1666 гг. *Если пропорция шансов* [...] *иррациональна*, писал он, *интерес* [выгода, ожидание] *может быть найден таким же образом*. Пусть, продолжал он, шар падает на центр круга и оказывается в одном из двух его секторов, отношение площадей которых равно 2:√5. Пусть, далее, в первом случае игрок выигрывает *a* и во втором случае – *b*, тогда его *надежды* стоят

$$(2a + b\sqrt{5})/(2 + \sqrt{5}).$$

Здесь можно усмотреть и обобщение данного Гюйгенсом понятия ожидания, и первое введение геометрической вероятности (§ 7.1.6). Второй пример Ньютона – неправильная игральная кость, для которой все-таки *можно определить насколько легче получается один результат, нежели другой*. Представляется, что Ньютон имел в виду не аналитические подсчёты, а статистические вероятности. Добавим лишь, что он, видимо, был знаком с общим содержанием книги Граунта (§ 3.1.4).

В 1693 г., отвечая на заданный ему вопрос, Ньютон (Gani 1982) определил [вероятности] выпадения не менее одной, двух и трёх шестёрок при броске, соответственно, шести, 12 и 18 костей (ср. задачу де Мере в Прим. 9). В последнем случае, например, вычисления Ньютона можно описать формулой

$$P = 1 - (18\cdot17/1\cdot2)\,(5/6)^{16}\,(1/6)^2 - (18/1)\,(5/6)^{17}\,(1/6) - (5/6)^{18}.$$

И вот, наконец, мнение Д. Т. Уайтсайда (частное сообщение, 1972) о Ньютоне-экспериментаторе:

*Фактически* (*но без явных утверждений об этом*) *Ньютон чётко представлял себе различие между случайными и структурно <u>встроенными</u> ошибками. Он безусловно был* *погружен в мысли о втором типе* <u>*встроенных*</u> *ошибок и многие теоретические модели различных видов физических, оптических и астрономических явлений были сознательно придуманы* [им] *таким образом, чтобы свести к минимуму эти структурные ошибки. В то же время он подходяще регулировал свою практическую астрономическую работу в смысле случайных ошибок наблюдений.*

**3.2.4. Арбутнот.** Он (Arbuthnot 1712) собрал воедино данные по Лондону о рождениях (точнее, крещениях) за 1629 – 1710 гг. Он заметил, что в течение этих 82 лет ежегодно рождалось больше мальчиков ($m$) чем девочек ($f$) и заявил, что этот факт не случаен, а отражает волю провидения, которое заботится о роде людском: мальчики и мужчины подвергаются бóльшим опасностям, и их смертность намного выше [чем у девочек и женщин], *в чем нас убеждает опыт*. С формальной точки зрения, как он указал, *цена ожидания* того, что статистические данные случайны, если даже не принимать во внимание наблюдавшиеся равенства годичных соотношений $m:f$ и постоянства пределов для ($m - f$), меньше чем $(1/2)^{82}$. Впрочем, он даже не вычислил ни эти соотношения, ни пределы.

Арбутнот мог бы заключить, что рождения обоих полов подчиняются [биномиальному распределению], и что в нём, а не просто в неравенстве количества рождений, проявляется воля провидения, и попытаться оценить его параметр (который, по Граунту, должен был равняться 14:13, см. § 3.1.4). Он не отметил, что крещения не равносильны рождениям, что христиане быть может чем-то отличаются от других и что, наконец, Лондон, возможно, являлся исключением. И сравнительная смертность полов не была ему известна. Уместно добавить, что Граунт (1662, конец гл. 3) заметил, что в 1650 – 1660 гг. менее половины христиан полагали, что крещение необходимо.

Имеется и другое обстоятельство, которое, правда, не является здесь существенным: вероятности последовательностей появления двух различных событий зависят от того, будет ли приниматься во внимание порядок следования этих событий или нет.

И все-таки его краткая статья была замечена позднейшими авторами, которые продолжили изучение соотношения рождаемостей и достигли на этом пути существенного развития теории вероятностей (см. особенно § 5.4), а Фрейденталь (Freudenthal 1961, с. xi) назвал Арбутнота автором первой работы по математической статистике. Из многочисленных других современных комментаторов Арбутнота назовем Shoesmith (1987) и David & Edwards (2001, с. 9 – 11).

Впервые в опубликованной работе Арбутнот воспользовался приёмом, по существу равносильным применению производящей функции биномиального распределения, хотя только для частного случая симметричного бинома. Ещё раньше эту функцию использовал Я. Бернулли (§ 4.1.2), но его сочинение увидело свет лишь в 1713 г.

Bellhouse (1989) описал рукопись Арбутнота, написанную, видимо, в 1694 г. В ней автор рассмотрел игру в кости, пытался исследовать хронологию (два примера, ср. § 3.2.3) и в большой степени предвосхитил свою опубликованную заметку 1712 г. В 1715 г. Гравезанд (s'Gravesande), см. К. Пирсон (1978, с. 301 – 303) и Хальд (1990, с. 279 – 280), усовершенствовал рассуждение Арбутнота и обсудил его с Н. Бернулли, ср. § 4.3.4.

### Примечания

**1.** Лейбниц сам занялся вероятностным исследованием азартных игр в 1675 г. (Biermann 1955). Основные места его переписки с Я. Бернулли опубликовали со своими комментариями Gini (1946) и Kohli (1975b). Всю переписку в оригинале (на латинском языке) см. в Leibniz (1971b, с. 10 – 110) и A. Weil и др. (1993).

**2.** Перемены в настроениях общества можно понять на примере задачи о безвестно отсутствующем. Чтобы не нарушать заповедь божью (какую именно?), Кеплер как астролог отказался отвечать, жив некто или умер (Kepler 1610/1941, с. 238), но вот Я. Бернулли (1713/1986, с. 29), как и Н. Бернулли (§ 4.3.2), предложил в таких случаях руководствоваться вероятностями.

**3.** Примерно в 1400 г. это понятие было введено для решения этических проблем (Franklin 2001, с. 69). В рукописи 1668 – 1669 гг. (?) Лейбниц (1971a) помышлял о приложении моральной достоверности в теологии. Название одной из её глав должно было включать выражение *бесконечная вероятность или моральная достоверность*. В более поздней рукописи 1693 г. он (Couturat 1901, с. 232), пожалуй, неудачно выделил логическую достоверность, физическую достоверность или *логическую вероятность* и физическую вероятность. Его пример последней, – южный ветер дождлив, – должен был, следовательно, как-то характеризовать положительную корреляционную зависимость.

**4.** Фразу об оценке участков Лейбниц повторил в письме Я. Бернулли 1705 г. (Kohli 1975b, с. 512), однако много раньше она встретилась в его политико-арифметической рукописи 1680 г. (§ 3.1.4).

**5.** Многие авторы упоминали практику страхования большого числа здоровых малолетних детей, см. здесь ниже и § 4.2.3.

**6.** Так, Граунт разумно предположил, что смертность от сифилиса существенно занижалась [не только ввиду трудности диагностирования, но и] по этическим соображениям.

**7.** Он (как и Лейбниц) получил их от магистра философии и члена Научного общества Берлина Каспара Ноймана. В письме 1692 г. Лейбниц (Leibniz 1970, с. 279) сообщил, что эти данные представляют интерес. О Галлее см. Böckh (1893).

**8.** Он может быть и не был знаком с перепиской Гюйгенса (§ 3.2.2).

**9.** В сохранившейся части переписки термина *вероятность* нет, есть только *шанс*. Инициатором переписки невольно стал некий светский человек, де Мере, который спросил Паскаля, почему шансы некоторых двух, казалось бы равновероятных исходов при игре в кости, все же различны. Несложный подсчёт показывает, что либо игроки сумели подметить малую разность вероятностей, либо, как утверждали Ore (1960, с. 411 – 412) и van der Waerden (1976), де Мере смог вычислить её, – и все-таки полагал, что выпадения шестёрки при четырёх бросках кости и двух шестёрок в 24 бросках двух костей должны были бы быть равновероятны так как 24/36 = 4/6. На самом деле вероятности этих событий равны соответственно

$$P_1 = 1 - (5/6)^4 \approx 0{,}5177,\ P_2 = 1 - (35/36)^{24} \approx 0{,}4913.$$

К сравнению указанных бросков впоследствии вернулся Я. Бернулли (1713/1999, с. 32). Об истории арифметического треугольника (см. ниже) см. Edwards (1987).

Курьёзный эпизод, затрагивающий де Мере, произошёл в XIX в. (Fraenkel 1930, с. 199). Г. Кантор ошибочно решил, что тот хотел своим эмпирическим наблюдением уничтожить науку. По этой причине он частным образом называл Кронекера, который отрицал зарождавшуюся теорию множеств, *господин де Мере*.

**10.** В последние годы своей жизни Я. Бернулли безуспешно просил Лейбница достать для него сочинение де Витта.

**11.** Из звеньев пирсоновской цепочки мы исключили бы Нивентита, Дерхам же был очень известен.

**12.** Вот аналогичное утверждение, сформулированное в IV в. до н. э. (Буров и др. 1972, с. 203):

*У кого* [из военачальников] *шансов перед битвой много – побеждает; у кого шансов мало – не побеждает, тем более* [тем менее] *же тот, у кого шансов нет вовсе*.

# 4. Якоб Бернулли и закон больших чисел

Мы рассмотрим основное сочинение Бернулли *Искусство предположений*[1] (ИП), изданное посмертно, и коснёмся его *Дневника* за 1684 – 1690 гг., лишь теоретико-вероятностная часть которого была опубликована совместно с перепечаткой ИП (в обоих случаях, только в оригинале, т.е. на латинском языке) с другими материалами и комментариями (J. Bernoulli 1975). Мы кроме того опишем сопутствующие вопросы и остановимся на работах современников Бернулли. ИП было целиком переведено лишь на немецкий язык (в 1899 г.; последнее издание 1999 г.), а его отдельные части появлялись и на других живых языках. В 1913 г. по инициативе Маркова В. Я. Успенский перевёл основную четвёртую часть ИП на русский язык. Этот перевод перепечатан с комментариями и приложениями (Я. Бернулли 1713/1986).

## 4.1. Отдельные сочинения

**4.1.1.** ***Дневник.*** Здесь Бернулли исследовал азартные игры и вероятностный аспект гражданского права . Он (с. 47) заметил, что вероятность[2] появления чумы в очередном году равна отношению количества *чумных* лет за длительный промежуток времени к общему числу лет в нем. Подчеркнём, что автор таким образом использовал определение вероятности события (притом статистической), а не шансы “за” и “против”. Но главное в *Дневнике* – наброски доказательства ЗБЧ, и это означает, что Бернулли доказал его не позже чем в 1690 г. В замечании на с. 46 к рассуждению о смертности приведены выходные данные рецензии 1666 г. на книгу Граунта (§ 3.1.4), которую Бернулли может быть и не видел; ни в *Дневнике*, ни в ИП он на неё не ссылался.

**4.1.2.** ***Искусство предположений.*** Четвертая часть книги должна была излагать *использование и применение предшествующего учения в гражданских, моральных и экономических делах* (Я. Бернулли 1713/1986, с. 92), но ничего подобного она не содержит[3]. В частях 1 и 3 решены интересные задачи: исследование случайных сумм для дискретных равномерного и биномиального распределений, аналогичное изучение суммы случайного числа слагаемых для одного дискретного распределения, отыскание распределения первой порядковой статистики для дискретного равномерного распределения и вычисление вероятностей безвозвратных выборок. Аналитические методы автора включали здесь комбинаторику и вычисление ожиданий выигрышей в каждой партии конечных или бесконечных игр с их последующим суммированием.

Часть 1-я является перепечаткой трактата Гюйгенса (§ 3.2.2) с решением его пяти дополнительных задач, одна из которых, впрочем, перенесена в 3-ю часть (J. Bernoulli 1713/1999, с. 167), с обширными и ценными комментариями, но упомянутая перепечатка, пожалуй, дополнительно свидетельствует о том, что автор не успел закончить своё сочинение. Здесь же Бернулли (с. 22 – 28), рассматривая игру в кости, составил таблицу, при помощи которой можно было вычислять коэффициенты при $x^m$ в разложении $(x + x^2 + ... + x^6)^n$ при небольших натуральных $n$.

Вторая часть, которая не имеет отношения к теории вероятностей, посвящена комбинаторике и в ней автор ввел *числа Бернулли*. Именно 4-я часть содержит ЗБЧ. Кроме того, в ней мы находим неформальное “классическое” определение вероятности (которое, однако, не используется при введении указанного закона), рассуждение о цели искусства предположений (в гл. 2), – возможно более точное измерение вероятностей для определения наилучших решений, видимо, в гражданской жизни, – и элементы стохастической логики[4].

О наилучших решениях высказался Цицерон (Cicero 1997, кн. 1, § 12, с. 7): многое вероятно, хоть и нельзя доказать, что оно истинно. Но мудрые руководятся им, потому что оно так существенно и ясно.

Искусство предположений Бернулли, кажется, понимал как математическую дисциплину, основанную на вероятности как мере уверенности, и ожидании, включающую (явно ещё не сформулированные) теоремы сложения и умножении вероятностей и увенчанную его ЗБЧ.

О своём сочинении Бернулли сообщил Лейбницу в письме 3 окт. 1703 г. (Kohli 1975b, с. 509): работая над ним много лет, он то и дело прерывался ввиду *природной лени* и ухудшения здоровья. В сочинении не хватает ещё *важнейшей части*, – приложения искусства предположений к гражданской жизни. Тем не менее, он, Бернулли, уже показывал своему брату [Иоганну] решение *в своём роде особой* и трудной задачи, которая основывает приложения искусства предположений (§ 4.2.3).

Основным в этом письме и в дальнейшей переписке 1703 –

1705 гг.[5] (там же, с. 510 – 512) была проблема статистических вероятностей, см. также §§ 4.2.2 – 4.2.3. Лейбниц так и не согласился с тем, что наблюдения могут обеспечить моральную достоверность, но его доводы вряд ли убедительны. В частности, он фактически повторил утверждение Arnauld & Nicole (1662/1992, с. 304 и 317) о том, что конечное (разум; стало быть, и наблюдения) не всегда может постичь бесконечное (например, Бога, но также, по Лейбницу, любое явление, зависящее от бесчисленных обстоятельств).

Возможно, что точка зрения Лейбница была частично обусловлена его пониманием случайности как чего-то, *полное доказательство которого превосходит всякий человеческий разум* (рукопись 1686 г.; Leibniz 1960, с. 288). Это эвристическое высказывание не противоречит современному “сложностному” подходу к случайности. Лейбниц был прав в том смысле, что статистические расчёты не могут окончательно подтверждать гипотезы.

В письме 3 дек. 1703 г. Лейбниц (Gini 1946, с. 405) также утверждал, что учёт всех обстоятельств важнее утончённых вычислений, и Борткевич (1923, с. 12) указал на положительное мнение Кейнса об этой точке зрения и вспомнил, что Милль (1843/1914, с. 490) резко сопоставил учёт обстоятельств с *детальным* приложением теории вероятностей. Милль мог бы упомянуть прикладную математику вообще; *обстоятельством* в ней была бы степень совместимости её моделей с реальностью, ср. соответствующее мнение Гаусса в § 10А5-2. Кроме того, не следовало бы противопоставлять обстоятельства и вычисление, тем более, что первые могут вначале оставаться недостаточно известными, особенно в статистике.

Более половины гл. 4 4-й части ИП по существу совпадает с соответствующими местами писем автора Лейбницу; в ней Бернулли (1713/1986, с. 44) отвечал на возражения *учёных мужей*, т.е. своего корреспондента[6].

## 4.2. Основные положения *Искусства предположений*

**4.2.1. Вероятностные предположения и доводы.** Им автор посвятил гл. 2 и 3 4-й части ИП. В дальнейшем изложении они не упоминаются; возможно, что Бернулли хотел вернуться к ним в ненаписанной части книги. Математическая сторона его рассуждений сводилась к применению теорем сложения и умножения [вероятностей] при сочетании различных доводов.

Необычной была неаддитивность этих [вероятностей][7]. Вот один из его примеров (1713/1986, с. 38): *нечто* имеет 2/3 достоверности, а противоположное – 3/4; обе возможности вероятны, однако их вероятности (по контексту иначе не скажешь) относятся как 8:9. Неаддитивные вероятности начал изучать Koopman (1940), а их истоки можно отыскать в средневековом учении о пробабилизме, в соответствии с которым мнение каждого теолога считалось вероятным. Franklin (2001, с. 74) относит возникновение этого учения к 1577 г. или во всяком случае (с. 83) к 1611 г. Впрочем, подобные высказывания о вероятностях суждений встречаются и у Джона Сольсберийского в XII в., а задолго до него – у Цицерона (Garber & Zabell 1979, с. 46).

Особо отметим одно *общее правило или аксиому приложения доводов* (Бернулли 1713/1986, с. 30): из двух исходов следует выбирать более безопасный, надёжный или по крайней мере более вероятный[8]. Этого мнения о принятии вероятностных решений видимо придерживались игроки (§ 2.2.3), если только они не основывались на суевериях (§ 3.1.1).

**4.2.2. Статистическая вероятность и моральная достоверность.** Предваряя доказательство ЗБЧ, Бернулли (1713/1986, с. 41) пояснил, что теоретические *количества случаев* часто неизвестны, но *что не дано вывести априорно, то, по крайней мере, можно получить апостериорно, т. е. из многократного наблюдения*. В применении статистических [вероятностей] нет ничего нового, заявил он и сослался на *знаменитого* Арно, соавтора книги Arnauld & Nicole (1662)[9]. Далее, в своём *Дневнике* автор косвенно упомянул Граунта (§ 4.1.1), и притом весьма кстати, в связи с невозможностью без привлечения статистических данных определить насколько вероятнее, что молодой человек переживёт старика, нежели противное[10].

О своем мнении Бернулли написал Лейбницу (ср. § 4.1.2), добавив, что именно указанное соображение натолкнуло его на мысль о замене, при необходимости, априорного знания апостериорным. Вспомним ещё (§ 4.1.1) мысль Бернулли о статистической вероятности *чумного* года.

Моральную достоверность мы обсуждали в §§ 3.1.2 и 3.2.2. Бернулли (1713/1986, с. 31) считал, что её следует допускать наравне с безусловной достоверностью, судьи же должны иметь *твёрдые указания* о том, является ли, например, 0,99 или 0,999 моральной достоверностью. Последняя мысль вряд ли была когда-либо реализована, к тому же вероятность справедливого приговора должна повышаться с его строгостью. На с. 43 Бернулли ещё раз упомянул эту категорию. Его теорема покажет, как он заявил, что статистическая [вероятность] является морально достоверной оценкой теоретической [вероятности]. Первая, в терминах математической статистики, является состоятельной оценкой второй[11].

**4.2.3. Закон больших чисел.** Бернулли доказал теорему, которая со времён Пуассона (§ 9.7) называется законом больших чисел. Пусть $r$ и $s$ – натуральные числа, $t = r + s$, $n$ – большое натуральное число, $\nu = nt$ – количество независимых [12] испытаний, в каждом из которых изучаемое событие появляется [с вероятностью] $r/t$, μ – количество появлений события. Тогда, как Бернулли доказал без применения математического анализа,

$$P[|\frac{\mu}{\nu} - \frac{r}{t}| \le \frac{1}{t}] \ge 1 - \frac{1}{1+c} \qquad (4.1)$$

и оценил необходимое значение ν при заданном $c > 0$. В более слабом виде результат Бернулли означает, что

$$\lim P[|\frac{\mu}{\nu} - \frac{r}{t}| < \varepsilon] = 1, \nu \to \infty, \qquad (4.2)$$

где, как и в формуле (4.1), $r/t$ это, разумеется, теоретическая, а $\mu/\nu$ – статистическая вероятности.

Марков (Руководство, 1924, с. 44 – 52) улучшил оценки Бернулли в основном за счёт уточнения его промежуточных неравенств, а Пирсон (K. Pearson 1925), применив формулу Стирлинга, добился практического совпадения результатов Бернулли с оценкой, использующей нормальное распределение в качестве предельного для биномиального[13]. Пирсон (с. 202), однако, посчитал бернуллиеву оценку необходимого числа испытаний в формуле (4.1) грубой и разорительной для тех, кто станет её применять. Наконец, он недопустимым образом сравнил закон Бернулли с неверной птолемеевой системой мира (а Муавра – с Кеплером и Ньютоном):

*Бернулли подметил значение некоторой задачи; то же сделал и Птолемей, но было бы нелепо назвать кеплерово или ньютоново решение задачи о движении планет по имени*

*Птолемея!*

Закон Бернулли имел громадное значение для развития теории вероятностей[14], да и можно ли отрицать важность теорем существования?

Итак, ЗБЧ установил соответствие между двумя вероятностями[15]. Бернулли (1713/1986, с. 42) хотел выяснить, не имеет ли его задача свою *асимптоту*, т.е. не имеется ли *такая степень достоверности, которую* [...] *нельзя превзойти, как бы ни умножались наблюдения* ... Иначе говоря, не существуют ли такие положительные числа ε и δ < 1, что

$$\lim P[|\frac{\mu}{\nu} - \frac{r}{t}| < \varepsilon] \le 1 - \delta,\ \nu \to \infty.$$

Он ответил на свой вопрос: нет, таких чисел не существует и тем самым установил в рамках вероятностной теории познания соответствие между индуктивными и дедуктивными методами и соединил статистику с искусством предположений. Странным образом статистики долго не воспринимали этого обстоятельства. Haushofer (1872, с. 107 – 108) объявил, что статистика не имеет *внутренних связей* с математикой (стало быть, и с теорией вероятностей), поскольку она основана на индукции, последняя же на дедукции. Известнейший немецкий статистик Кнапп (Knapp 1872a, с. 116 – 117) высказал странную мысль: закон малополезен, так как статистики всегда производят лишь одно наблюдение, как, например, при переписи населения города. И даже в XX в. Maciejewski (1911, с. 96) ввёл вместо теоремы Бернулли, которая якобы тормозила развитие статистики, *статистический закон больших чисел*, – качественное утверждение о затухании колебаний статистических показателей с возрастанием количества наблюдений.

Все это, конечно же, относилось и к ЗБЧ в форме Пуассона (результаты Чебышева европейские статистики в то время вряд ли знали), а мнение Мациевского видимо отражало общее настроение статистиков. Вот, действительно, заявление Борткевича (1917, с. 56 – 57): выражение *закон больших чисел* следует применять только в том смысле, который он приобрел в статистике, т.е. для обозначения *вполне общего* и *не связанного ни с какой определённой стохастической схемой факта* большей или меньшей устойчивости статистических показателей при неизменных или слабо изменяющихся общих условиях и большом числе наблюдений. Романовский (1912, с. 22; 1924, часть 1-я, с. 15; 1961, с. 127) занимал сходную позицию. Так, в последнем случае он подчеркнул естественнонаучную суть ЗБЧ и назвал его физическим.

ЗБЧ имеет предысторию. Задолго до Бернулли было принято полагать, что общее количество появлений события в *n* бернуллиевых испытаниях при вероятности *p* примерно равно

$$\mu = np. \qquad (4.3)$$

Эту формулу применял, например, Кардано (Ore 1963, с. 152 – 154 и 196) при подсчётах, связанных с игрой в кости. При составлении своей таблицы смертности Галлей (§ 3.1.4) предположил, что *нерегулярности* в его исходных данных исчезли бы при намного большем числе лет наблюдений, и эту мысль можно истолковать как утверждение о повышении точности формулы (4.3) с ростом *n*.

Второй подход к ЗБЧ наметился при обработке наблюдений, когда среднее арифметическое стало универсальной оценкой неизвестной константы (§ 2.2.4). Если ожидание результатов наблюдений равно искомой константе *a*, т.е. если систематические ошибки отсутствуют, и если (что всегда имело место) их дисперсии ограничены, то можно предполагать, что *a* приближённо равно среднему арифметическому из этих результатов.

Появились и аналогичные, но необоснованные утверждения о суммах величин, искажённых случайными погрешностями. Так, Кеплер (Шейнин 1973с, с. 120) заметил, что общий (средний!) вес большого числа монет одной и той же чеканки не зависит от неточностей в весе отдельных монет. Наконец, Gower (1993, с. 272) заметил, что Бошкович (Boscovich 1758, § 481) [нечётко] утверждал, что сумма случайных неравенств убывает с ростом числа слагаемых, ср. § 11.8.5. Порицать Кеплера и Бошковича не следует: подобное ошибочное мнение о сумме случайных величин существовало по крайней мере вплоть до XX в., так что Гельмерт (Helmert 1905, с. 604) счёл нужным опровергать его.

**4.2.4. Случайность и необходимость.** Видимо не желая вторгаться в область теологии, Бернулли (1713/1986, начало гл. 1) отказался обсуждать понятие случайности. В той же главе он предложил субъективное описание *случайного*, но поправил себя в гл. 4, объяснив случайность действием многочисленных и сложных причин. Наконец, в последних строчках своего сочинения он заметил, что *даже в вещах в высшей степени случайных мы принуждены были бы признать как бы некоторую необходимость* ... Он сослался на Платона, согласно которому *всё по истечении несметного числа веков возвратится в прежнее состояние*.

Бернулли видимо имел в виду архаическое представление о великом годе, по окончании которого все планеты и звезды возвратятся в исходное, на момент творения, положение и наступит конец света. Тем самым Бернулли безосновательно расширил узкие рамки приложения своего закона, а приведённый им пример вообще слишком сложен. Но утверждение о конце света встречается у Кеплера (Kepler 1596), который решил, что он вряд ли наступит. Его первоначальные соображения были малопонятны, но во втором издании своей книги Кеплер по сути исходил из того, что два какие-либо [случайно выбранные] числа *вероятно* несоизмеримы. Таково же было мнение Орема (Oresme 1966, с. 247)[16]. Наконец, в конце гл. 1 Бернулли повторил пример Аристотеля (§ 2.1.1) о находке клада, но лишь косвенно имел в виду случайность.

## 4.3. Современники Бернулли

Мы вкратце остановимся на мыслях и результатах некоторых современников Бернулли. Впрочем, Муавра, чьё первое теоретико-вероятностное сочинение появилось ещё до публикации ИП, мы выделяем особо (гл. 5).

**4.3.1. А. Арно.** Арно и Николь анонимно выпустили книгу *Искусство мыслить*[17] (Arnauld & Nicole 1662). Арно был её основным автором, и мы упоминали его в § 3.2.1 (пари Паскаля), в § 3.1.2 (моральная достоверность) и в § 3.1.1 (рекомендация пренебрегать маловероятными благоприятными событиями). Наконец, в §§ 4.2.2 мы заметили, что Бернулли сослался на Арно при обосновании применения статистических вероятностей и перенял у него одно из своих правил или принципов поведения. Далее, Арно неоднократно употреблял, правда, без формального определения, термин *вероятность* и её *степень* (например, на с. 331 и 332), и Лейбниц (§§ 4.1.2 и 3.1.4) воспользовался одним рассуждением и термином Арно.

**4.3.2. Николай Бернулли.** Он написал диссертацию о приложении искусства предположений к юриспруденции (1709/1975). Её английский перевод в интернете совершенно негоден. Тем не менее, мы по мере возможности воспользовались им для перевода диссертации на русский язык, см. **S, G,** 71. Юридическую часть мы резко сократили, выпустили излишние математические подробности и вынужденно пропустили отдельные места.

В диссертации содержатся

1) Подсчёт средней продолжительности жизни для лиц различных возрастов.

2) Рекомендация применять её для вычисления стоимости пожизненных рент и для суждений о вероятности смерти безвестно отсутствующих, которых он (с. 302) предложил считать умершими, если вероятность смерти была вдвое выше вероятности противоположного события.

3) Методический подсчёт ожидаемых убытков в морском страховании.

4) Вычисление ожидания выигрышей (точнее, проигрышей) в генуэзской лотерее, ср. конец § 2.1.2.

5) Вычисление вероятностей правдивости свидетельских показаний.

6) Вычисление ожидания продолжительности жизни последнего из группы людей (с. 296 – 297; Todhunter (1865, с. 195 – 196). Предположив непрерывный равномерный закон[18] смертности, он тем самым вычислил ожидание соответствующей [порядковой статистики]. И это распределение, и порядковая статистика впервые появились в печати в его работе.

7) Комментарий к введению ожидания Гюйгенсом (с. 291; Kohli 1975c, с. 542), см. выражение (3.1). Бернулли истолковал (3.1) как обобщённое среднее арифметическое и центр тяжести *всех вероятностей* (это уже неточно).

Видимо в связи с направленностью своей диссертации он не упомянул математическую обработку наблюдений, ср. § 3.1.4. Работа Бернулли несомненно способствовала распространению вероятностных идей в обществе (ср. § 3.1.2), но мы обязаны добавить (Kohli 1975c, с. 541), что он не только подхватил намёки, содержавшиеся в рукописи *Искусства предположений*, но дословно перенёс в свою диссертацию отдельные куски из этого сочинения и даже из *Дневника*, который вообще не предназначался к публикации. Многочисленные общие ссылки на Якоба не оправдывают плагиата.

**4.3.3. П. Р. Монмор.** Он – автор анонимного сочинения (Montmort 1708), которое было важно и само по себе и ввиду его несомненного влияния на Муавра, равно как и на Н. Бернулли, переписку с которым Монмор включил во второе издание своей книги. В предисловии (с. iii) он указал, что в суждениях и практической деятельности желательно руководствоваться *геометрией*, а не суевериями (§ 3.1.1). Он, однако, не будет исследовать приложений [вероятностных] методов к гражданской жизни, поскольку не может сформулировать подходящих *гипотез* (с. xii)[19].

О результатах Монмора см. Henny (1975) и Hald (1990). Последний (с. 290) перечислил его основные методы: комбинаторика, рекуррентные формулы и бесконечные ряды, равно как (с. 209) и формула включения и исключения

$$P(\Sigma A_i) = \Sigma P(A_i) - \Sigma P(A_i A_j) + \Sigma P(A_i A_j A_k) - ..., \qquad (4.4)$$

где $A_1, A_2, ..., A_n$ – события и $i < j < k < ...$ Эта формула является, конечно же, вероятностным следствием общего утверждения о множествах, произвольно расположенных друг относительно друга.

Вот некоторые задачи, решённые Монмором (1708, с. 244 – 246; 46 – 50 и 203 – 205; 200 – 202; 130 – 143), см. соответственно Hald (1990, с. 196 – 198; 206 – 213; 292 – 297; и 328 – 336):

1) Раздел ставки в прерванной игре. Монмор пришёл к отрицательному биномиальному распределению. Он вернулся к этой задаче в переписке с Н. Бернулли (Hald 1990, с. 312 – 314).

2) Выбрасывание $s$ очков при броске $n$ костей с $f$ гранями каждая. Монмор применил комбинаторный метод и формулу (4.4).

3) Задачи о размещении и снова игра в кости. Монмор пришел к многомерному гипергеометрическому и полиномиальному распределениям.

4) Задача о совпадениях. Билеты, пронумерованные по порядку 1, 2, ..., $n$, извлекаются из урны по одному без возвращения. Какова вероятность, что хотя бы один билет с номером $k$, $1 \le k \le n$, будет извлечён $k$-м по счету? Монмор получил решение в виде

$$P_n = 1 - 1/2! + 1/3! - ... + (-1)^{n-1}/n!, \ \lim P_n = 1 - e^{-1}, \ n \to \infty.$$

Комментированный перевод решения этой задачи различными учёными (Н. Бернулли, Муавр), см. H. A. David & Edwards (2001, с. 19 – 29).

**4.3.4. П. Р. Монмор и Николай Бернулли: переписка.** Здесь мы кратко опишем переписку 1710 – 1713 гг. между этими учёными (Montmort 1708, с. 283 – 414).

1) Стратегическая игра Her (Hald 1990, с. 314 – 322). Её решение стало возможным в рамках современной теории игр на основе принципа минимакса, но Бернулли всё же заметил, что игрокам следует придерживаться [смешанных стратегий].

2) Разорение игрока. Монмор выписал результат своих вычислений для конкретных начальных условий, а Бернулли привёл без вывода соответствующую формулу в виде бесконечного ряда. Хальд полагает, что она была получена методом включения и исключения. Результаты Бернулли (равно как и Монмора и Муавра) описали также Thatcher (1957), Takácz (1969) и Kohli (1975a).

3) Исследование рождений мальчиков и девочек (Montmort 1708/1713, с. 388 – 394; Shoesmith 1985a). Мы остановимся лишь на неявном появлении нормального распределения у Бернулли (Шейнин 1968[20]; 1970a, с. 201 – 203). Пусть $m/f$ – соотношение полов, $n$ – общее число рождений в год, и количества рождений мальчиков и девочек, $\mu$ и $(n - \mu)$. Если

$$n/(m + f) = r,\ m/(m + f) = p,\ f/(m + f) = q,\ p + q = 1,$$

и $s = 0(\sqrt{n})$, то доказанное Бернулли можно представить в виде (Montmort 1708/1713, с. 388 – 394)

$$P\,(|\mu - rm \le s) \approx (t - 1)/t,\ t \approx [1 + s(m + f)/mfr]^{s/2} \approx \exp[s^2(m + f)^2/2mfn],$$

$$P\,(|\mu - rm| \le s) \approx 1 - \exp(s^2/2pqn),$$

$$P\,[|\mu - np|/\sqrt{npq} \le s] \approx 1 - \exp(- s^2/2).$$

Этот результат всё же не приводит к интегральной теореме, поскольку $s$ ограничено (см. выше), но не является и локальной теоремой, поскольку не содержит сомножителя $\sqrt{2/\pi}$ [21].

4) Петербургская игра. В письме Монмору Н. Бернулли (Montmort, с. 402) описал придуманную им игру: *A* платит *B экю* если тот с первого раза выбросит шестёрку на обычной игральной кости и заплатит 2, 4, 8, ... *экю* если это событие произойдёт лишь при втором, третьем, четвёртом, ... броске.

Требуется определить ожидание выигрыша *В*. Габриель Крамер (Gabriel Cramer) заменил кость монетой и её выпадением какой-либо определённой стороной. В этом новом варианте искомое ожидание *В* равно

$$E\xi = 1 \cdot 1/2 + 2 \cdot 1/4 + 4 \cdot 1/8 + ... = \infty, \qquad (4.5)$$

хотя ни один разумный человек не согласился бы заплатить сколько-нибудь значительную сумму за право оказаться на месте игрока *В*.

Этот парадокс продолжает обсуждаться до наших дней. Вводились дополнительные условия; предлагалось, например, вообще отказаться от учёта маловероятных выигрышей, т.е. усечь ряд (4.5); наперёд ограничить возможную выплату; и, самое интересное, – заменить математическое ожидание моральным[22]. Кроме того, было замечено, что возможно бесконечная игра всё же представляет собой лишь один эксперимент и что только средние характеристики многих игр могут подсказать целесообразное объяснение (Condorcet 1784, с. 714). Фактически опираясь на это соображение, Freudenthal (1951) предложил рассматривать серию игр с распределением ролей игроков в каждой из них по жребию. Наконец, петербургская игра послужила поводом быть может первого статистического эксперимента: Buffon (1777) сообщил о серии из 2048 таких игр, в которой средняя выплата составила 4,9 единиц, а максимальная продолжительность игры, оказавшаяся равной девяти броскам, произошла лишь в шести случаях[23]. В теоретическом плане игра была интересна и тем, что ввела в рассмотрение случайную величину с бесконечным ожиданием.

## Примечания

**1.** Бернулли (1713/1986, с. 27) дополнительно пояснил это выражение равнозначным греческим словом *стохастика*, которое Борткевич (1917, с. X), сославшись на него, ввёл в научный обиход. Впрочем, ещё Wallis (1685, с. 254) употребил выражение *стохастический* (т.е. итерационный) процесс, а Prevost & Lhuilier (1799, с. 3) упомянули стохастику *или искусство строго предполагать о пользе и пределах принципа, в соответствии с которым оценивают вероятность причин*. Hagstroem (1940) указал, что термин *стохастика* встречался у Платона и Сократа и что в 1919 г. он был включён в *Oxford English Dictionary* со ссылкой на сочинение 1662 г.

**2.** Этот термин Бернулли не применял последовательно (см. § 4.1.2).

**3.** Имея в виду опубликованное содержание этой части, указанные приложения искусства предположений следовало бы выделить отдельно.

**4.** Издатели добавили к ИП написанное автором по-французски *Послание к другу об игре в мяч* (Bernoulli 1713/1975), в котором он подсчитал ожидания выигрыша игроков на различных стадиях старинной разновидности тенниса.

**5.** Мы упоминали переписку в § 3.1.1.

**6.** В 1714 г., в письме одному из своих корреспондентов, Лейбниц (Kohli 1975b, с. 512) смягчил свои сомнения в применимости статистических вероятностей и почему-то заявил, что Бернулли занимался *этими вещами* по его, Лейбница, увещеваниям.

**7.** О неаддитивных вероятностях у Бернулли см. Shafer (1978) и Halperin (1988).

**8.** См. Arnauld & Nicole (1662/1992, с. 327): следует выбирать более вероятное.

**9.** Мы нашли в этой книге лишь один подходящий пример, да и то не очень в данном случае убедительный, ср. § 3.1.2. Эти же авторы на с. 281 упоминают о возможности апостериорных суждений.

**10.** Ср. его пример 4 (Бернулли 1713/1986, с. 29).

**11.** См. Прим. 3 к гл. 3.

**12.** Независимость впервые упомянул Муавр (§ 5.1).

**13.** Марков применил формулу Стирлинга чуть ниже (с. 55 и след.). Он, видимо, вначале хотел показать, чего Бернулли, который ещё не знал её, всё же мог бы добиться.

**14.** Усиленное длительным забвением результатов Муавра (§ 5.3).

**15.** Бернулли последовательно рассматривал определение статистической вероятности события по его теоретической вероятности, и это наиболее чётко видно в формулировке его *Главного предложения* (т.е. ЗБЧ, см. его гл. 5). Однако, и в последних строках этой главы, и в гл. 4 он упомянул обратную задачу и фактически утверждал, что решил и её тоже. Мы вернёмся к этому вопросу в нашей гл. 6.

**16.** Орем понимал несоизмеримость необычным для нас образом, но мы не будем на этом останавливаться. Ещё раньше Леви бен Гершон (Levi ben Gerson 1999, с. 166) заявил, что небесные тела не смогут вернуться в своё первоначальное положение, если их скорости несоизмеримы, но о конце света он не упоминал.

**17.** Возможно, что Бернулли имел в виду это выражение при выборе названия для своей собственной книги (и для одноименной дисциплины, предшественницы теории вероятностей).

**18.** Соответствующие рассуждения Гюйгенса (§ 3.2.2) появились в печати намного позднее.

**19.** Ср. введённое Даниилом Бернулли моральное ожидание (§ 7.1.1).

**20.** Только в перепечатке 1970 г. (с. 232).

**21.** А. П. Юшкевич (1986) сообщил, что по его просьбе трое современных математиков (трое!) заключили, опираясь на описание, данное Хальдом, что Бернулли близко подошёл к локальной теореме. Хальд (1998, с. 17) также не упомянул недостающий сомножитель.

**22.** См. мемуар Даниила Бернулли 1738 г. в § 7.1.1. Он опубликовал свою работу в Петербурге, отсюда и произошло название игры.

**23.** Jorland (1987) и Dutka (1988) описали историю исследований петербургской игры, а последний, кроме того, привёл результаты её моделирования методом статистических испытаний. О её ранней истории см.

O. Spieß (1975).

# 5. А. Муавр
## 5.1. *О мере случая*

В своём первом теоретико-вероятностном сочинении Муавр (De Moivre 1712) обосновал понятие ожидания случайного выигрыша соображениями здравого смысла (а не определил формально, ср. § 3.2.2), сформулировал теорему умножения шансов, упомянув при этом условие независимости событий и воспользовался теоремой их сложения, также для шансов, а для решения одной задачи (№ 26) фактически применил формулу включения и выключения (4.4). Мы опишем некоторые из его задач; задачу 14, повторенную в *Учении о шансах*, мы упоминали в § 3.2.2.

1) Задача № 2. Определить шансы игроков на выигрыш в незаконченной серии игр, если в каждой из них соотношение этих шансов равно $a:b$, а число оставшихся игр не более $n$. Муавр замечает, что шансы игроков относятся как суммы соответствующих членов разложения бинома $(a + b)^n$.

2) Задача № 5. Появление события имеет $a$ шансов из их общего числа $(a + b)$. Сколько испытаний ($x$) следует произвести, чтобы оно произошло или не произошло с равными вероятностями?[1] Определив $x$ из уравнения

$$(a + b)^x - b^x = b^x,$$

Муавр принимает, что $a/b = 1/q$, $q \to \infty$ и получает

$$1 + x/q + x^2/2q^2 + x^3/6q^3 + \ldots = 2, \quad x = q\ln 2, \qquad (5.1)$$

что напоминает распределение Пуассона.

3) Лемма. Определить число шансов появления $k$ очков при игре с $f$ $n$-гранными костями. Позднее он (1730, с. 191 – 197; 1756, задача 3, лемма) решил эту задачу, введя производящую функцию последовательности возможных исходов при броске одной кости.

4) Задача № 9 (ср. задачу Паскаля из § 3.2.2). Игроки $A$ и $B$ имеют $p$ и $q$ фишек, а их шансы выиграть каждую партию равны $a$ и $b$ соответственно. При помощи остроумного рассуждения, которое может быть связано с понятием мартингала (Seneta 1983, с. 78 – 79), Муавр получил искомое соотношение выигрышей в виде

$$P_A/P_B = a^q(a^p - b^p)/b^p(a^q - b^q). \qquad (5.2)$$

Элементарный случай $a = b$ он не рассматривал.

5) Задача № 25 о разорении игрока за конечное число партий, если его противник обладает бесконечным капиталом (это условие явно не сформулировано). Муавр привёл лишь схему вычислений; реконструкцию решения см. Hald (1990, с. 358 – 360).

## 5.2. Страхование жизни

Муавр был самым значительным автором своего времени в области математического страхования жизни, которым он занимался с начала 1720-х годов. Исходя из таблицы Галлея (§ 3.1.4), он (1725/1756, с. 262 – 263) принял равномерный непрерывный закон смертности для всех возрастов начиная с 12-ти лет и максимальную продолжительность жизни в 86 лет. Из его многочисленных результатов мы опишем некоторые из числа тех, которые потребовали приложения интегрального исчисления.

1) Определить ожидание продолжительности жизни для человека данного возраста, если максимальное значение (комплемент) этой величины (т.е. 86 минус возраст) равно $n$ (с. 288). Ответ Муавра: $n/2$. Реконструкция проста:

$$\int_0^n x dx/n = n/2.$$

2) Определить вероятность одному человеку пережить другого, если комплементы их жизней $n$ и $p$, $n > p$ (с. 324). Вот по существу решение Муавра. Обозначим случайные продолжительности жизни $A$ и $B$ через $\xi$ и $\eta$. Тогда, поскольку в некоторый момент времени $x$ комплемент жизни $A$ равен $(n - x)$,

$$P(\xi \geq x, \eta = x) = [(n - z)/n]dz/p,$$

$$P(\xi > \eta) = \int_0^p [(n - z)/n]dz/p = 1 - p/2n.$$

3) Определить ожидание срока, в течение которого два человека с теми же комплементами жизни, что и в предыдущей задаче, остаются в живых (с. 288). Муавр привёл лишь ответ, а реконструкция решения (Czuber, замечание 22 к немецкому переводу 1906 г. сочинения Муавра) такова:

$$P(x \le \xi \le x + dx \text{ или } x \le \eta \le x + dx) =$$
$$[(n - x)/n]dx/p + [(p - x)p]dx/n,$$
$$\mathrm{E}\zeta = \int_0^p \{[(n - x)/np] + [p - x)p/n]\}dx = p/2 - p^2/6n.$$

Заметим, что из вероятности типа $P(\xi \ge x)$ очень просто получить соответствующую интегральную функцию распределения $F(x)$.

Подробное изложение работы Муавра и его основного соперника, Т. Симпсона, см. Hald (1990, с. 515 – 546). Симпсон усовершенствовал, а в нескольких случаях исправил результаты Муавра. Рассмотрев один из вариантов совместного страхования, Хальд (с. 546) заключил, что соответствующие выводы Симпсона были *значительным шагом вперёд*. Впрочем, отношения Муавра с Симпсоном стали невыносимыми, и К. Пирсон (1978) справедливо назвал Симпсона *самым постыдным типом* (с. 145), *бесстыдным лжецом и отъявленным мошенником* (с. 184).

## 5.3. *Учение о шансах*

Это основное произведение Муавра (1718, 1738 и посмертное 1756), которое он развернул из мемуара 1712 г., предназначалось для игроков, так что полученные там результаты Муавр как правило сообщал без доказательства. Вместе с другими обстоятельствами[2] это привело к тому, что книга, о переводе которой на французский язык помышляли и Лагранж, и Лаплас[3], многие десятилетия оставалась плохо известной. Мы будем ссылаться на перепечатку её последнего издания.

В предисловии Муавр перечислил свои основные методы: комбинаторный анализ, возвратные последовательности (теорию которых он сам и разработал) и бесконечные ряды; в частности, он применял и надлежаще оборванные расходящиеся ряды. Там же он (с. 1 – 2) привёл “классическое” определение вероятности, которое обычно приписывается Лапласу, но сохранил прежнее рассуждение об ожидании (см. § 5.1) и даже ввёл *цену ожидания* (с. 3), сформулировал теорему умножения вероятностей (уже не шансов) и снова упомянул при этом независимость.

Независимыми он назвал такие события *A* и *B*, что (здесь и чуть ниже – современные обозначения)

$$P(B) = P(B/A),\ P(A) = P(A/B).$$

Для зависимых же событий (например, для трёх), см. с. 6,

$$P(ABC) = P(A)\,P(B/A)\,P(C/AB). \qquad (5.3)$$

Перечислим теперь некоторые задачи из *Учения* из числа указанных Хальдом (1990, с. 409 – 413), не повторяя описанных в § 5.1 и оставив пока в стороне нормальное распределение.

1) Дополнительная задача Гюйгенса № 4 (§ 3.2.2). Появление гипергеометрического (в том числе многомерного) распределения: задачи №№ 20 и 26.

2) Серии появления события в $n$ бернуллиевых испытаниях, также при $n \to \infty$: задачи №№ 34 и 74.

3) Совпадения. Обобщение результата Монмора (§ 4.3.3) при помощи метода включения и исключения: задачи №№ 35, 36.

4) Разорение игрока: задачи №№ 58 – 71.

5) Продолжительность игры: задачи №№ 58 – 64, 68 – 71.

Для неискушённого читателя основное достоинство книги заключалось в исследовании многих распространённых азартных игр, сам же Муавр, см. посвящение 1-го издания *Учения* Ньютону (перепечатанное в 1756 г. на с. 329), видел свою основную цель в выработке метода вычисления влияния шансов и тем самым в установлении

*определённых правил для оценки того, в какой степени некоторые виды событий могут быть вызваны предначертанием, а не шансом,* [что позволит] *исходя из Вашей* [Ньютона] *философии,* [изучать] *способ сбора* [...] *свидетельств утончённой мудрости и предначертания, которые выявляются в явлениях природы по всей вселенной.*

Подчеркнём, что Муавр написал это до того, как доказал свою предельную теорему (§ 5.4). См. утверждение Пирсона о влиянии Ньютона в § 3.2.3.

## 5.4. Теорема Муавра – Лапласа

В 1730 г. Муавр опубликовал *Аналитические этюды*. Впоследствии он снабдил их двумя дополнениями, из которых нас интересует второе (1733)[4], отпечатанное в небольшом числе экземпляров и разосланное Муавром своим коллегам. В 1738 г. Муавр перевёл его на английский язык и включил во 2-е, а затем, в дополненном виде, и в 3-е издание *Учения*. Вот его название: *Метод аппроксимирования суммы членов разложенного в ряд бинома* $(a + b)^n$... Обратим внимание: Муавр имел в виду бином вообще. Это означает, что, в современных обозначениях, изучая случай $p = q = 1/2$, он всё же думал об общей теореме. Он, кроме того, прямо (и справедливо) указал (с. 250), что переход к общему случаю нетруден, но тем не менее ещё недавно (Schneider 1988, с. 118) утверждалось, что Муавр рассматривал лишь указанный выше частный случай.

Дата составления *Аппроксимирования* известна: уже в его латинском тексте Муавр на первой же странице сообщил, что, по крайней мере математическую часть этого мемуара, он закончил около 12 лет назад, – т.е. намного раньше выхода в свет *Этюдов*. Вот этапы его вычислений (Шейнин 1970a).

1) В 5-й книге *Этюдов* Муавр определил отношение среднего члена бинома $(1 + 1)^n$ к сумме всех его членов, а в 1-м дополнении к этому сочинению вывел, независимо от Стирлинга и одновременно с ним, так называемую формулу Стирлинга; лишь значение постоянной, $\sqrt{2\pi}$, тот сообщил Муавру.[5]

2) В той же книге *Этюдов* Муавр вычислил логарифм отношения среднего члена бинома к члену, удалённому от него на $l$ при $m = n/2$ в виде

$$(m + l - 1/2)\ln(m + l - 1) + (m - l + 1/2)\ln(m - l + 1) - 2m\ln m + \ln[(m + l)/m].$$

Но лишь в *Аппроксимировании* он преобразовал это выражение при $n \to \infty$ в $-2l^2/n$. Само отношение оказалось таким образом эквивалентным

$$1 - 2l^2/n + 4l^4/2n^2 - ... \qquad (5.4)$$

Фактически, что подтверждается дальнейшими выкладками, Муавр имел в виду обратное соотношение.

3) В *Аппроксимировании*, проинтегрировав (5.4), Муавр подсчитал отношение суммы членов между средним и удалённым от него на $l$ к сумме всех членов бинома. Оно оказалось равным

$$[2/\sqrt{2\pi n}\,]\,[l - 2l^3/(1\cdot 3n) + 4l^5/(2\cdot 5n^2) - ...]. \qquad (5.5)$$

Он, далее, вычислил сумму (5.5) либо численным интегрированием, либо, при $l < \sqrt{n}/2$, принимая во внимание лишь несколько её первых членов. Его основной результат при $n \to \infty$ можно записать в виде

$$\lim P\left(a \le \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp(-z^2/2)dz \qquad (5.6)$$

(обозначения стандартны). За этой формулой сохраняется название интегральной теоремы Муавра – Лапласа (см. § 8.1-3), с современной же точки зрения она является частным случаем ЦПТ. Заметим, что и Лаплас ещё не владел понятием равномерной сходимости, которая имеет здесь место.

Тодхантер (Todhunter 1865, с. 192 – 193) неудовлетворительно описал суть достижения Муавра. Он не указал, что тот фактически рассмотрел общий случай неравных $p$ и $q$ и кроме того заявил лишь, что Муавр значительно усилил теорему Бернулли при помощи теоремы Стирлинга**[6]**. Первым, кто заметил нормальное распределение у Муавра, был Де Морган (De Morgan 1864), который, однако, допустил совершенно непонятные утверждения о появлении и отрицательных, и превышающих единицу вероятностей. Более того, в письме 1842 г. (Sophia De Morgan 1882, с. 147) он заявил, что тангенс и котангенс бесконечности равны $\pm\sqrt{-1}$.

Заканчивая *Аппроксимирование*, Муавр (с. 252) упомянул об исследовании полового состава новорождённых (§ 3.2.4), иллюстрируя его воображаемой игрой в 14 тысяч 35-гранных костей, раскрашенных в два цвета (18 белых граней и 17 черных)**[7]**. Из его рассуждения здесь (и из общего утверждения на с. 251) следовало, что биномиальное распределение являлось божественным законом природы, вероятностным лишь в смысле возможных случайных уклонений от него. По сути Муавр таким образом признал совместное действие случайного и необходимого, ср. § 4.2.4.

## Примечания

**1.** Муавр таким образом пользуется и шансами, и вероятностями.

**2.** Символика Муавра быстро устарела; английский язык был мало распространён на континенте Европы; Тодхантер неудовлетворительно описал основное достижение Муавра (см. § 5.4); и, наконец, Лаплас (Laplace 1814/1999, с. 865) не разъяснил его достаточно подробно.

**3.** Письмо Лагранжа Лапласу 30.12.1776 в томе 14 его *Oeuvres* (1892), с. 66.

**4.** Мы называем этот мемуар дополнением лишь по традиции: его экземпляры, дошедшие до нас в крупных библиотеках, оказались приплетёнными к *Этюдам*.

**5.** В этом же дополнении Муавр поместил таблицу lg $n$! для $n$ = 10 (10) 900 с 14-ю знаками, перепечатанную в 1756 г. (с. 333). Верны 11 – 12 знаков, хотя в значение для lg380! вкралась опечатка.

**6.** Общий случай явно рассмотрел Симпсон в 1740 г. (Hald 1990, с. 21 – 23).

**7.** Правильных 35-гранников не существует, но вряд ли это здесь существенно. Муавр имел в виду 14 тысяч ежегодных рождений и $m$:$f$ = 18:17.

# 6. Т. Бейес

## 6.1. “Формула Бейеса” и индукция

Бейесу (или Байесу) принадлежит посмертно опубликованный мемуар (Bayes 1764 – 1765) с комментариями Прайса. В первой части Бейес ввёл основные определения и доказал несколько теорем; заметим, что вероятность он определил через ожидание. Так называемой формулы Бейеса

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)\,P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B/A_j)\,P(A_j)} \qquad (6.1)$$

в его мемуаре не было. Это название встретилось у Курно (1843, § 88), который, однако, ввёл его нерешительно.

К формуле (6.1) мы вернёмся в §§ 8.1-1 и 10А.2-2; здесь мы лишь укажем, что подход Бейеса, который предполагает существование априорных вероятностей или распределений (см. ниже), оказал громадное влияние на развитие математической статистики[1].

Бейес далее исследовал воображаемый опыт, – падение мяча в точку *r*, лежащую в единичном квадрате *ABCD*, “левее” или “правее” некоторой прямой *MN*, параллельной *AB* и *CD* и расположенной между ними. Все положения *MN* и точек *r* относительно *AB* и *CD* равновероятны. Если после $(p + q)$ испытаний точка *r* оказалась *p* раз правее *MN* и *q* раз левее этой прямой, то

$$P(b \le r \le c) = \int_b^c u^p(1-u)^q\,du \div \int_0^1 u^p(1-u)^q du, \qquad (6.2)$$

где *bc* – отрезок внутри *AD*. Знаменатель этой дроби Бейес получил в виде [бета-функции] $B(p + 1; q + 1)$ и затратил много усилий для оценки её числителя. Вся правая часть (6.2) есть разность двух значений той же, но неполной бета-функции

$$I_c(p + 1; q + 1) - I_b(p + 1; q + 1).$$

Таким образом, по результатам опыта и в предположении равномерного априорного распределения[2] положений *MN* и *r* (т. е. при полном незнании) определялась соответствующая теоретическая вероятность, которая оказалась случайной величиной. Было бы неверно применять формулу (6.2) для определения, скажем, вероятности того, что какая-то далёкая цифра в разложении π равна 4 (Нейман 1934/1944, с. 212).

В своём сопроводительном письме Прайс (с. 151) решил чисто методическую задачу о [вероятности] последующего восхода Солнца, который наблюдался $10^6$ раз подряд. Формула (6.2) при $b = 1/2$ и $c = 1$ дала косвенный ответ на этот вопрос (какова вероятность, что искомая вероятность превышает половину); при $b = 0$ и $c = 1/2$ она же выразит вероятность противоположного события. Прайс (1764/1970, с. 149 и 150 – 151) решал ту же задачу и для $p = 1$ и $q = 0$, получив $p = 3/4$, а это сомнительно: не зная ничего о сути явления по однократному наблюдению и все-таки подсчитывая вероятность его повторения, мы должны были бы получить указанную косвенную вероятность равную 1/2 (ср. рассуждение Пуассона в § 9.1).

Заметим ещё, что Чебышев (1879 – 1880/1936, с. 158) сформулировал ту же задачу на обыденном уровне: студент ответил на ряд вопросов, какова вероятность, что он ответит и на следующий?

Вероятность последующего восхода равна

$$P = \int_0^1 x^{p+1} dx \div \int_0^1 x^p dx = \frac{p+1}{p+2}.$$

При $p = 1$ она равна 2/3, что тоже вряд ли разумно.

Курно (1843, § 93) рассуждал об аналогичном вопросе. Женщина родила мальчика; какова вероятность, что её следующий ребёнок будет мальчиком? Он заявил, что *может быть было бы правильно назначить ставки в соотношении 2:1*, но что все-таки решить эту задачу нельзя. Указанное соотношение он не обосновал.

О соображениях Лапласа, Гаусса и Чебышева по поводу бейесовского подхода см. §§ 8.1-1, 8.1.-5 и 10А.2-2 и 14.2-7 соответственно. Начиная с 1930-х годов и быть может в течение 30 лет английские и американские статистики продолжали отрицать Бейеса. Этот период мы уже оставляем в стороне и приведём лишь одно общее замечание. Первым и главным критиком “теоремы” или формулы Бейеса был Фишер (Fisher 1922, с. 311 и 326), который, однако, не указал, против чего именно он выступает. Можно полагать, что он не соглашался с введением плохо известных априорных вероятностей и/или с допущением их равенства друг с другом, ср., однако, соответствующее общее мнение Лапласа о гипотезах (§ 8.2-1). Также расплывчатыми были в том же смысле статьи Cornfield (1967) и Barnard (1967), первый из которых образно отметил, что теорема Бейеса *вернулась с кладбища* (с. 41).

## 6.2. Предельная теорема

Обратим теперь внимание на случай $n = (p + q) \to \infty$, который Бейес впрямую не рассматривал, а Прайс указал по этому поводу, что результат Муавра (§ 5.4) не является точным для конечных $n$. Укажем и вторую причину. В том же 1764 г. была опубликована посмертная заметка Бейеса, в котором он предупреждал об опасности использования расходящихся рядов (пусть даже и оборванных). Его мнение не было воспринято, а Тимердинг, редактор немецкого перевода мемуара Бейеса, исходя из его результатов для больших но конечных $p$ и $q$, доказал при помощи остроумного приема (не прибегая, правда, к расходящимся рядам), что для $n \to \infty$ при вероятности α падения мяча правее $MN$ имеет место

$$\lim P\{\frac{|\alpha - a|}{\sqrt{pq/n^3}} \le z\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z \exp(-w^2/2)dw, \qquad (6.3)$$

где (чего Тимердинг не указал) $a = p/n = \mathrm{E}\alpha$, $pq/n^3 = \mathrm{D}\alpha$.

Незаслуженно малоизвестная интегральная предельная теорема (6.3) имеет особое значение: вместе с интегральной теоремой Муавра – Лапласа она завершила построение первого варианта теории вероятностей. Поясним эту мысль. Функции в левых частях формул (5.6) и (6.3) являются одинаковым образом центрированными и нормированными случайными величинами. И примечательно, что Бейес, не владея понятием дисперсии, видимо понимал, что формула (5.6) недостаточно точна для описания его задачи, обратной по отношению к задаче Муавра. Во всяком случае, Прайс (с. 135) указал, что *не знает никого, кто показал бы как решить обратную задачу.* [...] *Сделанное Муавром нельзя считать достаточным.*

Заметим, что и Я. Бернулли, и Муавр утверждали, что их формулы подходят и для решения обратной задачи. Бернулли (1713/1986, с. 42) указал, что после большого числа наблюдений можно определить отношение, в котором *вероятно* находятся соответствующие количества благоприятных и неблагоприятных случаев, – но с какой точностью? Муавр (1756, с. 251) также упомянул обратную задачу:

*Обратно, если по бесчисленным наблюдениям мы найдём, что отношение* [количеств появлений противоположных] *событий стремится к определённой величине, то мы заключаем, что это отношение выражает детерминированный* [!] *закон, в соответствии с которым это событие* [эти события] *происходят ...*

И снова тот же вопрос: с какой точностью заключаем? Мизес вполне мог бы считать Бейеса своим предшественником.

## 6.3. Дополнительное замечание

Стиглер (Stigler 1983) заметил любопытное утверждение (Hartley 1749, с. 338 – 339) и посчитал его свидетельством против Бейеса. После ссылки на Муавра, Хартли, в частности, указал:

*Мой остроумный друг сообщил мне решение обратной задачи определения вероятности события по числу его появления и непоявления*.

Позднее Стиглер (1986, с. 98, 132) снова упомянул Хартли и свою статью 1983 г., но не повторил чётко своего прежнего вывода. Затем, однако, он (1999, с. 291 – 301) перепечатал свою статью и добавил крохотное примечание, отбрасывая всю критику, появившуюся с 1983 г. Он указал, что автором теоремы Бейеса был Сондерсон (1682 – 1739); применив формулу (6.1), Стиглер даже вычислил, что его вывод втрое вероятнее прежнего мнения. Стиглер, однако, предположил, что априорные вероятности авторства Бейеса и Сондерсона были одними и теми же, т. е. что вне-математические доводы (например, свидетельство Прайса, близкого друга Бейеса) отбрасываются. И таким образом не только честный математик Сондерсон, но почти всякий обманщик сможет претендовать на равные права с признанным автором. Мы же, в частности, полагаем, что сам Бейес сообщил Хартли решение *обратной задачи*. Основываясь на позднейших источниках, Zabell (1989, с. 316) заявила, что утверждение Стиглера нельзя считать серьёзным.

## Примечания

**1.** Современная энциклопедия (Прохоров 1999b) содержит 14 статей, в которых упоминается его имя, например бейесовская оценка, бейесовский подход (и ошибочно утверждает, что Бейесу принадлежит формула (6.1)).

**2.** Сам Бейес не указывал, что это распределение равномерно, однако это предположение все-таки приходилось принимать (K. Pearson 1978, с. 364). Не приведя никаких пояснений, Мизес (Mises 1919, § 9.2) заметил, что Бейес рассматривал также и общий случай. Сам Мизес, вслед за Чубером, на которого он сослался, доказал, что влияние неравномерности априорного распределения убывает с ростом числа испытаний.

# 7. Другие исследования до Лапласа

## 7.1. Теоретико-вероятностные исследования

**7.1.1. Даниил Бернулли.** Он опубликовал ряд интересующих нас мемуаров, а ещё ранее привёл вероятностное рассуждение о строении солнечной системы (1735). Наклонности орбит пяти (кроме Земли) известных в то время планет по отношению к орбите Земли малы и вероятность “случайного” возникновения этого обстоятельства он счёл ничтожной. Логику подобных умозаключений мы затронули в § 2.1.1, но в этом примере усматривается и новое обстоятельство: вместо наклонностей орбит можно было исходить из расположения их полюсов (Todhunter 1865, с. 223).

Здесь мы обсудим только некоторые работы Бернулли, остальные же целесообразно отложить до §§ 7.2.3 и 7.3, но сразу скажем, что он, наряду с Муавром, был основным предшественником Лапласа.

a) Моральное ожидание. Стремясь разъяснить парадокс петербургской игры (§ 4.3.4), Бернулли (1738) предположил, что выгода $y$ игрока в азартной игре определяется по его выигрышу $x$ из дифференциального уравнения (первого в теории вероятностей)

$$dy = cdx/x,\ c > 0, \text{ откуда } y = f(x) = c\ln x/a,$$

где $a$ – его первоначальный капитал. Логарифмическая функция появляется также в известном психофизическом законе Вебера − Фехнера и в теории информации.

Бернулли, далее, предложил заменить ожидание выигрыша $[px]/p_i$ ($p_i$ – вероятность выигрыша $x_i$) его *моральным ожиданием*

$$\Sigma p_i f(x_i)/\Sigma p_i.$$

Он заметил (но не доказал, см. § 8.1-9), что даже “справедливая” игра с нулевым математическим ожиданием проигрыша становится для каждого участника невыгодной (моральное ожидание их выигрышей отрицательно), а бесконечное математическое ожидание выигрыша в петербургской игре (4.5) заменяется конечным моральным ожиданием. Применив своё нововведение к морским перевозкам

грузов, он указал (но опять-таки не доказал, см. § 8.1-9), что товар следует размещать поровну на нескольких судах.
Моральное ожидание стало модным и Лаплас (1812/1886, с. 189) поэтому даже ввёл новый термин для прежнего “простого” ожидания, назвав его математическим. Его термин, впрочем, сохранился, кажется, лишь во французской и русской литературе, да и то напрасно. Современные математико-статистические функции ущерба эвристически близки моральному ожиданию, а в конце XIX в. экономисты начали разрабатывать теорию предельной полезности исходя из идеи Бернулли. Тем самым было опровергнуто мнение (Bertrand 1888a, с. 66) о практической бесполезности морального ожидания:

*Теория морального ожидания стала классической и никогда это слово* [...] *не употреблялось более точно. Она изучалась и разъяснялась в книгах поистине знаменитых. На этом успех прекратился; она никак не была, и не могла быть применена.*

Сам термин *моральное ожидание* ввёл Габриель Крамер в письме 1732 г. Николаю Бернулли, выдержку из которого опубликовал в своём мемуаре Даниил. Крамер также косвенно предложил применять

$$f(x) = \min(x; 2^{24}) \text{ или } f(x) = \sqrt{x}.$$

В письме Д. Б. 1742 г. (P. N. Fuss 1843/1968, т. 2, с. 496) содержалось неожиданное утверждение: *Я полагаю, что математика* [теория вероятностей?] *может справедливо применяться и в политике*. Сославшись на одобрение Мопертюи, он продолжал:

*Возникнет совершенно новая наука, если только в политике будет произведено столько же наблюдений, сколько в физике*.

b) Предельная теорема. Обратившись все к той же задаче о половом составе новорождённых (§§ 3.2.4, 4.3.4, 5.4), Бернулли (1770 – 1771) в первой части своего мемуара принял, что мужские и женские рождения равновероятны. Тогда вероятность того, что из $2N$ новорождённых половина окажется мальчиками, будет

$$P = 1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2N - 1)/2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2N = q(N).$$

Эту дробь он подсчитал не по формуле Валлиса, а применив дифференциальные уравнения. Вычислив $q(N - 1)$ и $q(N + 1)$ и два соответствующих значения $\Delta q$, он получил

$dq/dN = – q/(2N + 2)$, $dq/dN = – q/(2N – 1)$

и *в среднем* $dq/dN = – q/(2N + 0.5)$. Решение этого уравнения при $q_0 = q(12)$ было достаточно точным:

$$q = 1,12826\sqrt{4N+1}.$$

Использование дифференциальных уравнений в теории вероятностей (см. также выше) было обычным приёмом Бернулли. Аналогичным образом (см. ниже) он обнаружил, что для μ порядка $\sqrt{N}$ вероятность числу мальчиков примерно равняться $m$ была равна

$$P(m = N \pm \mu) = q\exp(- \mu^2/N). \qquad (7.1)$$

Во второй части своего мемуара Бернулли принял, что вероятности рождений обоих полов находятся в соотношении $a:b$. Приравняв вероятности рождений $m$ и $(m + 1)$ мальчиков, снова из общего числа рождений $2N$, он фактически получил ожидаемую величину

$$\text{E}m = M = \frac{2Na-b}{a+b} \approx \frac{2Na}{a+b},$$

что, разумеется, было очевидно. Более интересно его последующее определение вероятности произвольного $m$, снова при том же порядке μ:

$$P(m = M + \mu + 1) - P(m = M + \mu) \equiv d\pi - \frac{a}{b}\pi\frac{2N-M-\mu}{M+\mu+1}d\mu,$$

$$-d\pi/\pi = \frac{\mu+1+\mu a/b}{m+\mu+1}d\mu.$$

Последующие преобразования включали разложение в степенной ряд $\ln[(M + 1 + \mu)/(M + 1)]$. Ответ оказался таким:

$$P(m = M \pm \mu) = \pi = P(m = M)\exp\left(-\frac{(a+b)\mu^2}{2bM}\right),$$

откуда следует (7.1). Заметим, что Бернулли не применил также локальной теоремы Муавра – Лапласа.

Исходя из некоторых статистических данных, он далее сравнил два возможных соотношения мужских и женских рождений, но не сделал окончательного выбора. Он также определил такое значение $\mu$, для которого сумма вероятностей (7.1), начиная от $\mu = 0$, равнялась половине. При этом он применил не интегрирование, а суммирование и, стало быть, не вывел интегральной предельной теоремы. О результатах Муавра Бернулли, видимо, не знал и это лишний раз подтверждает (см. § 5.4), что они долгое время не были замечены.

c) Урновые задачи. Рассмотрим две из его задач. В урне находятся $n$ пар белых и черных полосок. Требуется определить число (здесь и ниже – фактически ожидание числа) парных полосок, оставшихся в урне после $(2n - r)$ извлечений без возвращения. Комбинаторным путём Бернулли (1768a) получил

$$x = r(r - 1)/(4n - 2);\ \text{при}\ n \to \infty\ x = r^2/4n.$$

Тот же результат он вывел иным способом: при убывании $r$ на $dr$ соответствующее $dx$ равно либо нулю [$(r - 2x)$ случаев] либо $dr$ ($2x$ случаев), так что

$$dx = [(r - 2x)0 + 2xdr]/r,\ x = r^2/4n,\ \text{поскольку}\ r = 2n\ \text{при}\ x = n.$$

Далее Бернулли обобщил эту задачу на случаи неравных вероятностей извлечения полосок различных цветов и на полоски нескольких цветов, а затем применил полученные результаты для исследования продолжительности браков (1768b), – для задачи, непосредственно относящейся к страхованию *нескольких жизней*.

Пусть теперь по $n$ белых и черных шаров находятся соответственно в двух урнах. Найти число белых шаров в первой урне после $r$ циклических перекладок из урны в урну. Бернулли (1770) решил эту задачу теми же двумя методами. Так, он исходил из дифференциального уравнения

$$dx = -(x/n)dr + [(n - x)/n]dr,$$

откуда

$x \approx (1/2)n[1 + e^{-2r/n}]$.

Затем Бернулли рассмотрел случай трёх урн и шаров трёх цветов. Он заметил, что сумма первого, четвёртого, седьмого, ... членов ряда $[(n-1)+1]^r$, делённая на $n^{r-1}$ равна числу белых шаров в первой урне. Для остальных урн он, соответственно, подсчитал суммы второго, пятого, восьмого, ... и третьего, шестого, девятого, ... членов того же ряда. Для первой урны он получил

$$A = [1/n^{r-1}]\{(n-1)r + C_r^3(n-1)^{r-3} + C_r^6(n-1)^{r-6} + ...\} \approx ne^{-r/n}S, \quad (7.2)$$

где фигурная скобка удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Sdr^3/n^3 = d^3S,$$

и потому равна

$$S = ae^{r/n} + be^{-r/2n}\sin(r\sqrt{3}/2n) + ce^{-r/2n}\cos(r\sqrt{3}/2n),$$

а ввиду начальных условий $a = 1/3$, $b = 0$, $c = 2/3$.

Бернулли также заметил, что существует предельное состояние, – равное количество шаров каждого цвета в каждой урне. Это проще всего подтвердить, сославшись на теорему о предельной матрице перехода в однородных цепях Маркова. Формулу (7.2) Бернулли получил исходя из дифференциальных уравнений

$$dx = -xdr/n + [n - (x+y)]dr/n, \; dy = -ydr/n + xdr/n,$$

где $x$, $y$ и $[n - (x+y)]$ – количества белых шаров в урнах после $r$ перекладок[1]. К этой задаче мы вернёмся в § 8.1-3, а здесь укажем, что Todhunter (1865, с. 231 – 234) упростил решение Бернулли и сделал его более изящным. Он выписал дифференциальные уравнения в форме

$$dx = (dr/n)(z - x), \; dy = (dr/n)(x - y), \; dz = (dr/n)(y - z)$$

и заметил, что

$S = (1/3)[e^{\alpha rn} + e^{\beta rn} + e^{\gamma rn}]$, где α, β, γ были значениями $\sqrt[3]{1}$.

Величина *x* в первой задаче и *S* и *A* в формуле (7.2) зависят от дискретного “времени” *r/n* ,что характерно для случайных процессов с неоднородным временем. То же относится к отношению *s/*ξ в § 7.2.3.

**7. 1. 2. Ж. Л. Даламбер.** В теории вероятностей Даламбер[2] известен в основном как автор заведомо ложных утверждений. Так, он (D’Alembert 1754) заявил, что вероятность выпадения герба два раза подряд при двух бросках монеты равна не 1/4, а 1/3. Далее, он (1768a) необоснованно рассуждал о различии между *математической* и *физической* вероятностями[3], утверждая, например, что если одно из двух противоположных событий произошло несколько раз подряд, то появление второго становится физически более вероятным. Он, стало быть, оказался в плену суеверий, о которых упоминал ещё Монмор и которые одной лишь фразой позднее опровергнул Бертран (§ 3.1.1). Тут же Даламбер рекомендовал определять вероятности опытным путём, но сам никаких экспериментов не произвёл (и потому не выявил своей ошибки). Наконец, Даламбер (1768b) стал отрицать различие между средним и вероятным сроками жизни, которое прекрасно представлял себе ещё Гюйгенс (§ 3.2.2). Тут уместно вспомнить высказывание Эйлера из его частного письма 1763 г. (Juskevic и др. 1959, с. 221): Даламбер *самым бесстыдным образом защищает все свои ошибки*. Во всяком случае, Даламбер (1768d, с. 309 – 310) не относил теорию вероятностей к *точным и верным исчислениям ни по принципам, ни по результатам*[4].

В то же время Даламбер (Тодхантер 1865, § 473) полагал, что при одиночном испытании редкие события следует считать неосуществимыми и что абсолютная уверенность качественно отличается от *самой высокой вероятности*. Второе утверждение означало, что при большом числе испытаний могут происходить маловероятные события (ср. усиленный ЗБЧ), а взятые воедино его соображения означали, что теорию вероятностей следует применять с осторожностью. Даламбер (1768c) также высказал справедливые возражения против рекомендаций Д. Бернулли по поводу борьбы с оспой и сформулировал по этому поводу свои собственные разумные мысли (§ 7.2.3). Мы обязаны добавить, что Даламбер имеет крупные заслуги в других отраслях математики (и в механике). См. о нём также Yamazaki (1971) и Paty (1988), который привёл в порядок запутанную библиографию работ

Даламбера.

**7.1.3. И. Г. Ламберт.** Он был первым продолжателем Лейбница в попытке создать учение о вероятностях в качестве составной части общего учения о логике. Как и Даламбер (Прим. 3), Ламберт объяснял случайность незнанием соответствующих причин, но он сформулировал и тезис о равной вероятности всех цифр в бесконечных десятичных разложениях иррациональных чисел, т.е. эвристически подошел к понятию нормального числа, и современно звучащую идею о связи случайности и беспорядка (Lambert 1771, § 324; 1772 – 1775), см. также Шейнин (1971a, с. 238 – 239; 1971b, с. 246; 1974, с. 136 – 137).

Его рассуждения были забыты, и вспомнил о них только Курно (1851/1975, § 33 Прим.), а после него Чупров (1909/1959, с. 188).

Ламберт не вышел за пределы “равномерной случайности”. Следует, однако, добавить, что философские сочинения XVIII в. свидетельствуют о значительных трудностях, которые в то время испытывались при обобщении понятия случайности (Шейнин 1991c/1995, § 7.1), см. также § 3.2.4. Один пример. Даже в XIX в. многие учёные, полагая, что случайность может быть лишь “равномерной”, отказывались признавать эволюцию видов, а три автора (J. Herschel 1861, p. 63 прим.; Baer 1873, c. 6; Данилевский 1885, ч. 1, с. 194) упомянули по этому поводу философа, изображённого в *Путешествиях Гулливера*, но взятого Свифтом у Раймунда Луллия (XIII – XIV вв.). Этот “изобретатель”, надеясь познать все истины, записывал каждую осмысленную цепочку слов, которая появлялась при их “равномерно случайном” поиске.

**7.1.4. Ж. Л. Л. Бюффон.** Бюффон известен в первую очередь своим рассуждением, которое окончательно ввело в теорию вероятностей геометрические вероятности (§ 7.1.6). Он также разумно предположил, что ценность выигрыша в азартной игре убывает с ростом имущества игрока (ср. § 7.1.1) и опытным путем исследовал петербургскую игру (§ 4.3.4), предложил значение 1/10 000 в качестве ничтожной вероятности события в единичном испытании, решал задачу о вероятности последующего восхода солнца (см. § 6.1)[5], к которой мы вернёмся в § 8.1-5, и составил ставшие известными таблицы смертности. Всё это находится в его основном для нас сочинении (Buffon 1777).

Ничтожной он счёл вероятность здоровому человеку 56 лет умереть в течение ближайших суток, однако она, видимо, оказалась слишком стеснительной и, более того, она должна была назначаться с учётом конкретных условий и не могла оставаться постоянной во всех случаях. Пирсон (K. Pearson, 1978, с. 193) посчитал более подходящим значение 1/1000.

В том же сочинении Бюффон (§ 8, Прим.) опубликовал текст своего письма Даниилу Бернулли 1762 г., в котором содержался зародыш понятия о *среднем человеке* Кетле (§ 11.5):

*Таблицы смертности неизменно относятся к среднему человеку, т. е. к людям вообще, и вполне хорошо чувствующим себя, и больным, здоровым и немощным, дюжим и хилым*.

**7.1.5. М. Ж. А. Н. Кондорсе.** Он пытался приложить теорию вероятностей к юриспруденции при молчаливо принятой предпосылке о независимости суждений судей и присяжных. Он также оценивал степень доверия к свидетельским показаниям и критически отнёсся к проблеме замещения выборных должностей. Основным математическим аппаратом служили у Кондорсе конечно-разностные уравнения. Todhunter (1865, с. 351 – 410) подробно описал его работы и заметил, что во многих случаях его *почти невозможно понять* (с. 352)[6]. *Неясность и противоречивость сравнить не с чем* ... Он, Тодхантер, приведёт несколько примеров, *но никакое их число не может достаточно хорошо передать степень пагубности*. Но во всяком случае Лаплас и Пуассон продолжали применять вероятностные соображения в юриспруденции и безусловно в какой-то мере воспользовались работой Кондорсе. Пуассон (Poisson 1837a, с. 2) вполне положительно упомянул его идеи.

Обсуждая азартные игры, Кондорсе (1785b/1847, с. 561) выразился весьма неудачно, а затем (с. 562) без всякого обоснования заявил, что Даниил Бернулли не устранил всех возражений против *правила* ожидания, что удалось Даламберу. В 1772 г., в письме государственному деятелю, философу и экономисту Тюрго, он (Henry 1883/1970, с. 97 – 98) сообщил, что *забавляется* вычислением вероятностей, составил (неизвестную) *книжечку по этой теме* и придерживается убеждений Даламбера! Он же составил, прямо скажем, антинаучные *похвальные слова* Даниилу Бернулли (1785a) и Эйлеру (1786), см. Шейнин (2009b). О Кондорсе см. также Yamazaki (1971).

**7.1.6. Геометрические вероятности.** В XVIII в. теория вероятностей обогатилась понятием “геометрическая вероятность”, которое, правда, было формализовано, да и то лишь интуитивно, только в середине XIX в. (§ 11.3). Первым на возможность применения геометрических вероятностей указал Ньютон (§ 3.2.3). Д. Бернулли воспользовался ей в 1735 г. в астрономическом контексте (§ 7.1.1) и её же молчаливо применяли Муавр (De Moivre 1756, с. 323), T. Simpson (1757), см. § 7.3.1, и Бейес (§ 6.1).

Для непрерывного равномерного распределения вероятность типа $P$ ($0 < \xi < a$) Муавр записал в виде отношения двух отрезков. Симпсон заметил, что в его случае (непрерывное треугольное распределение) вероятности пропорциональны площадям соответствующих фигур. Бейес, введя непрерывное равномерное распределение, предположил, что для равных отрезков вероятность падения мяча в любой из них одна и та же.

Всеобще известной стала задача Мичелла (Michell 1767): определить вероятность того, что две звезды из общего их числа, равномерно распределённых по небесной сфере, находятся не далее чем на 1° друг от друга. Если выбрать произвольную точку *A* на сфере с центром *O* и провести малый круг, перпендикулярный *OA* на расстоянии 1° от *A*, то искомая вероятность окажется отношением площадей поверхностей полученного шарового сегмента и шара. Ньюком и Фишер вычислили ожидаемое количество близко расположенных звёзд (§ 11.8.4), а другие авторы высказали и некоторые общие соображения. Так, Proctor (1874, с. 99) сформулировал вопрос об *ожидаемых особенностях распределения точек, абсолютно случайно расположенных на плоскости*. Ныне подобные задачи относятся к математической статистике и именно к отклонениям эмпирического распределения от теоретического. Бертран (1888а, с. 170 – 171) заметил, что без изучения иных возможных особенностей звёздной системы нельзя решить, расположены ли звезды случайно.

По-настоящему ввёл геометрические вероятности Бюффон (1777); впрочем, краткое сообщение о его работе см. Anonymous [Buffon] (1735). Вот его основная задача: игла длиной $2r$ падает *случайным образом* на пучок параллельных прямых, расположенных на расстоянии $a > 2r$ друг от друга. Требуется определить вероятность того, что игла пересечёт одну из них. Оказывается, что

*P* = 4*r*/®*a*. (7.3)

Сам Бюффон, правда, определил лишь отношение $r/a$ для заданной $P = 1/2$. Многие комментаторы (в том числе Буняковский и Марков) описывали и обобщали задачу Бюффона.

Первый из них (Laplace, см. § 8.1-4), заметил, что формула (7.3) позволяла экспериментально [но с небольшой точностью] определить число $\pi$. Основной целью Бюффона было, как он указал, *ввести геометрию в свои права в науке о случае* (1777/1954, с. 471). О дальнейшей истории геометрической вероятности см. гл. 13.

## 7.2. Статистические исследования

**7.2.1. Государствоведение.** В середине XVIII в. Ахенваль (Шейнин 1997b) создал гёттингенскую школу "государствоведения", которая описывала климат, географическое положение, политическую структуру и экономику отдельных государств и оценивала их население по данным о рождаемости и смертности, но не изучала соотношений между количественными показателями.

Ахенваль (Achenwall 1752/1756, Введение) косвенно определил статистику:

*Во всяком случае, статистика это не тот предмет, который можно сразу понять пустой головой. Она относится к хорошо переваренной философии и требует основательного знания государственной и естественной истории Европы, равно как и множества понятий и принципов, а также умения достаточно хорошо понимать весьма различные положения конституций нынешних королевств.*

Сославшись на Зюссмильха, Ахенваль рекомендовал принимать государственные меры, способствующие возрастанию населения и советовал проводить переписи населения, без которых (1763, с. 187) *вероятная оценка* населения все же может быть получена, см. выше.

Его ученик Шлёцер (Schlözer 1804, с. 86) образно заявил, что *история − это движущаяся статистика, а статистика – застывшая история*. Для государствоведов эта крылатая фраза стала определением статистики, которая тем самым не должна была ни исследовать причинные связи в обществе, ни обсуждать возможные последствия нововведений, т.е. отказывалась от соответствующих попыток основателей политической арифметики (§ 3.1.4). Ободовский (1839, с. 48) предложил иную фразу: статистика так относится к истории, как живопись к поэзии. Крылатое выражение Шлёцера не имело особого смысла: он сам в § 14.3 заметил, что следовало сравнивать статистические данные одного и того же государства в разное время и разных государств в одно и то же время. То же рекомендовал ещё Лейбниц в рукописи 1680-х годов (Sheynin 1977b, p. 224).

Второе отличие между двумя указанными дисциплинами было вызвано тем, что только политическая арифметика интересовалась главным образом населением. Наконец, методы исследования также различались: не числа, а словесные описания лежали в основе государствоведческих сочинений.

Knies (1850, с. 24) привёл выдержки из сочинений неназванных им немецких авторов, которые в 1806 и 1807 гг. заявляли, что статистика должна интересоваться национальным духом, любовью к свободе, талантами и характерными особенностями крупных деятелей и простых граждан данной страны. Эта критика политической арифметики объясняется, конечно, тем, что и математика никогда раньше подобными вопросами не занималась. Добавим указание Моисея (Числа 13:17 и след.) своим разведчикам: *высмотреть землю Ханаанскую*; какова там земля, каковы люди и много ли их и т. д.

Впрочем, ближе к концу XIX в. от государствоведения отделились существенные части; К. Пирсон (1978, с. 125) заметил, что первой откололась от него политическая экономия (Адам Смит) и что *эволюция политических философов* ещё более ограничила государствоведение. К концу XIX в. его сфера сильно сузилась, но оно всё ещё существует, по крайней мере в Германии, хотя и в новой форме: использует количественные данные и изучает причины и следствия, оказавшись приложением статистического метода к различным дисциплинам и данному государству или региону. Статистика в современном ее понимании ведёт своё начало от политической арифметики, и поэтому мы ниже остановимся на работах, которые, никак не относясь к прежнему государствоведению, носили математический характер или во всяком случае основывались на статистических данных.

Табличная статистика, которая описывала государства при помощи числовых таблиц, возникла в сочинении Анхерсена (Anchersen 1741) и могла бы стать связующим звеном между словами и числами, однако Ахенваль, видимо, не признал ее. Во всяком случае, он (1752, Введение) указал, что Анхерсен *подверг публичному нападению* первое издание его книги. *Табличные* статистики презирались, их даже называли *фабрикантами* и *рабами* таблиц (Knies 1850, с. 23). Ещё в 1734 г. И. К. Кириллов составил табличное описание России, но его рукопись была опубликована лишь в 1831 г. (Плошко и Елисеева 1990, с. 65 – 66). Мы не видели более ранее сочинение И. Голицына (1807).

Пирсон (1978, с. 29) упомянул Эдуарда Чемберлена (Chamberlayne, 1616 – 1703), *английского Ахенваля*, но заметил, что тот *скопировал* свою книгу с французской работы 1661 г., которую он не видел.

**7.2.2. Статистика населения.** Зюссмильх продолжил традицию Граунта и Петти. Он собрал обширные статистические данные о движении населения и пытался (как и Арбутнот, см. § 3.2.4) выявить в нем Божий промысел. Свои материалы он, однако, обрабатывал весьма нестрого. Так, осредняя данные по городам и сельским местностям, он молчаливо полагал, что численность населения в обоих случаях одна и та же; изучая смертность, он не пытался учесть различия в возрастной структуре населения отдельных мест и т.д. И все же можно сказать, что его труды проложили путь для Кетле (§ 11.5), что он изучал вопросы, позднее вошедшие в моральную статистику (например, внебрачную рождаемость, преступления, самоубийства) и что его таблицами смертности продолжали пользоваться даже в начале XIX в., см. Birg (1986) и Pfanzagl & Sheynin (1997).

Как и Граунт, Зюссмильх обсуждал причины и предлагал свои мнения. Так, он (1758) помышлял об изучении зависимости смертности от климата и географического положения и знал, что бедность и невежество способствовали распространению эпидемий. Он осуждал войны и роскошь и указывал, что благосостояние бедных полезно и государству, и богатым. Его непрестанные обращения по этому поводу к городским (берлинским) и государственным (прусским) властям приводили к раздорам. Зюссмильх, видимо, согласился бы с автором позднейшего времени (Budd 1849, с. 27), который обсуждал холерные эпидемии:

*Ввиду общности нашей природы, мы гораздо ближе, чем склонны думать, связаны друг с другом*. […] *И тот, кто никогда ещё не оказывал милосердия своему более бедному соседу и не любил его, быть может слишком поздно выяснит, что связан с ним узами, которые одновременно сведут их обоих в общую могилу*.

С основным сочинением Зюссмильха (Süssmilch 1741) связано возникновение демографии, а второе издание книги 1765 г. содержало математическую главу *О скорости возрастания и* *периоде удвоения* [населения], которую он написал совместно с Эйлером. Она частично переиздана в *Opera omnia* последнего (в т. 7 1-й серии, 1923), и на ней же основан один из его мемуаров (Euler 1767). Зюссмильх, естественно, считал, что возрастание населения было предусмотрено Божьей заповедью и что поэтому правители должны заботиться о своих подданных. Мальтус (1798) воспользовался одним из его выводов, именно тем, что население возрастает в геометрической прогрессии. Сотрудничество Зюссмильха с Эйлером и многочисленные ссылки на последнего означают, что Эйлер разделял его общие социальные взгляды.

Эйлер составил таблицу возрастания населения за 900 лет начиная от Адама и Евы, допустив, что период удвоения постепенно возрастал от 10 до 50 лет. В своей третьей таблице, которая снова начиналась от Адама и Евы, он принял другие, также произвольные ограничения, приводившие к тому, что каждые 24 года число живущих примерно утраивалось. Gumbel (1917) доказал, что, соответственно, количества рождений, смертей и живущих в третьей таблице стремились к геометрической прогрессии со знаменателем 1,0961 и заметил, что с 1600 г. несколько авторов (но не Граунт) предлагали такую пропорцию в качестве закона.

И как статистик, и как глубоко религиозный человек, Зюссмильх отрицательно отзывался о полигамии, и представляется, что только Даниил Бернулли (1768с, с. 103) бездоказательно утверждал, что она, *конечно*, способствует возрастанию населения. Эйлер, которому он послал своё письмо, кажется, не ответил на это утверждение, а биографы Даниила были вовсе не уверены в его религиозности.

Известно, что Эйлер не интересовался всерьёз теорией вероятностей (см., однако, § 7.3.1, относящийся к теории ошибок), но он опубликовал несколько мемуаров по статистике населения, собранных в том же томе его сочинений. При обработке статистических данных он не вводил никаких теоретико-вероятностных законов (например, законов смертности), но его рассуждения были изящны и представляли большой методический интерес, в том числе и для института страхования жизни (Паевский 1935).

Ламберт (Lambert 1772) опубликовал демографическое исследование в основном методического характера. В нём он без должного обоснования предложил несколько законов смертности

(§ 9), сформулировал задачу о продолжительности браков, статистически изучал детскую смертность от оспы и количество детей в семьях (§ 108), см. Шейнин (1971b) и Daw (1980). Последний приложил перевод той части сочинения Ламберта, которая относилась к смертности от оспы.

Один из законов смертности, принятых Ламбертом, был представлен суммой двух членов, которые, как он разъяснил, описывали физические процессы; теперь можно добавить, что они принадлежали к типам IX и X кривых Пирсона. Скажем несколько слов о последней теме.

Ламберт исходил из данных о 612 семьях с различным, до 14, количеством детей, и, снова не пояснив образа своих действий, уравнял эти данные. Примечательно, однако, что он произвольно увеличил вполовину общее количество детей и что новые данные, как он заметил, оказались более *гладкими*. Можно предположить, что Ламберт хотел учесть мертворождённых и умерших детей. В другом месте своего сочинения он (§ 68) указал, что статистическое исследование должно выявлять (мы бы добавили: и объяснять) нерегулярности.

**7.2.3. Медицинская статистика.** Она возникла в XIX в., частично ввиду необходимости бороться с опустошительными эпидемиями холеры. Интересно, что выражение *медицинская вероятность* возникло не позднее середины XVIII в. (Mendelsohn 1761, с. 204). В конце того же века были высказаны пожелания о сборе медицинских наблюдений (Condorcet 1795/1988, с. 542)[7]. Был даже составлен каталог (возможно забытый) *всех основных болезней и несчастных случаев, которые уничтожают или беспокоят род людской* (Black 1788, с. 65)[8], который напоминал мысли Лейбница (§ 3.1.4).

Заметим, что описания, относящиеся и к другим отраслям естествознания, активно составлялись и впоследствии и должны были предваряться какой-то статистической работой, иногда же они сопровождались ложными утверждениями о ненужности соответствующих теорий (ср. мнение Даламбера в Прим. 7). В собственно статистике сторонники полных описаний продолжали отрицать выборочный метод вплоть до начала XX в., см. § 11.7-2.

Особо выделим исследования Д. Бернулли и Даламбера профилактики оспы. Бернулли (1766) обосновал распространённую тогда вариоляцию, т.е. прививку слабой формы оспы от больного человека здоровому. Эта процедура, см. Condamine (1759, 1763, 1773) и Karn (1931), распространяла инфекцию, была, следовательно, небезопасна для окружающих. В своём первом мемуаре Кондамин сообщил о медицинских и религиозных возражениях против вариоляции и закончил его замечанием: *После вариоляции королевской семьи в Англии эта практика стала всеобще принятой во Франции*. Даниил Бернулли, однако, приводил доводы в её пользу.

В своём втором мемуаре Кондамин (с. 464) упомянул семью Бернулли:

*В Базеле, господа Бернулли, одно имя которых может само по себе развеять сомнительные мнения по многим вопросам, не ограничились открытым заявлением в пользу вариоляции и добились одобрения первых опытов от факультетов медицины и религии. Младший из двух братьев* [Иоганн II, 1710 – 1790] *и единственный женатый из них, решил участвовать, и в 1756 г. вариолировал двух своих младших сыновей, а год назад и их старшего брата.*

Вторым братом был Даниил. Иоганн II имел несколько детей, не все из которых стали известными. Разрешение богословов было действительно необходимо; White (1896/1898) описал *войну науки и богословия*. В т. 2, с. 55 – 59 он привёл примеры свирепой оппозиции вариоляции (и, до 1803, вакцинации оспы). Многие тысячи канадцев погибли в середине XIX в. только потому, что по религиозным соображениям отказались вариолироваться. Уайт чётко отделял богословие, бывшее противодействующей силой, и "практическую" религию.

В третий мемуар Кондамин включил тексты свой переписки, в частности с Даниилом Бернулли, которому сообщил данные об эпидемиях оспы, а Карн в начале своей статьи указала, что

*Метод определения влияния смертности от некоторых болезней на продолжительность жизни основан на предложениях, сделанных в первую очередь Д. Бернулли.*

В течение некоторого времени вариоляция была запрещена сначала в Англии, − в 1728 − 1740 гг. (Creighton 1891/1965, vol. 2, p. 489), − а затем во Франции. Ссылаясь на статистические данные (но не опубликовав их), Бернулли предположил, что ежегодно оспой заболевает восьмая часть населения, что оспенная смертность составляет одну восьмую часть заболевших и, наконец, что сама вариоляция смертельна в 0,5% случаев.

Бернулли составил соответствующее дифференциальное уравнение, решение которого

$s = m\xi/[1 + (m - 1)e^{x/n}]$

показало соотношение между возрастом в годах, *x*, и числом лиц этого возраста, ξ, из которых *s* не болело оспой. Тем же методом дифференциальных уравнений он вывел аналогичную формулу для населения, подвергнутого вариоляции, т.е. для тех его 99,5%, которые благополучно перенесли эту процедуру и не были более подвержены оспе. Оказалось, что вариоляция увеличивает среднюю продолжительность жизни на 3 года и 2 месяца и потому, как он решил, крайне полезна. Оспопрививание, *неоценимое открытие Дженнера, сделавшее его одним из благодетелей человечества* (Лаплас 1814/1999, с. 853), было внедрено в конце XVIII в. И всё же его великолепный успех не исключил необходимости статистических исследований. Так, Simon (1887, т. 1, с. 230) сформулировал вопрос о длительности действия вакцины и заключил, что только всеобъемлющая национальная статистика сможет на него ответить.

Даламбер (1761b; 1768c) высказал критические замечания в адрес Бернулли[9]. Не всякий согласится, заметил он, увеличить среднюю продолжительность жизни за счёт хотя бы небольшого риска умереть от прививки, а при вариоляции детей следует принимать во внимание моральные соображения. Не отрицая пользы прививки, Даламбер заключил, что необходимы сбор статистических данных об оспе и дополнительные исследования и что семьям погибших от прививки должны выдаваться денежная компенсация или памятные медали.

Даламбер изложил и свои собственные соображения, методологически менее очевидные, но годные и для изучения смертности от болезней, не поддающихся профилактике. Dietz & Heesterbeek (2000; 2002) описали историю вариоляции и исследования обоих учёных на современном уровне математической эпидемиологии и упомянули источники по истории вариоляции, Пирсон же (1978, с. 543) указал, что вариоляция*, как говорят, была распространена в Греции в XVII в. В 1713 г. её рекомендовали в Phil. Trans. Roy. Soc*. См. также Шейнин (1972b/1977, с. 114 – 116; 1982, с. 270 – 272). Вопросы, относящиеся к данному разделу, описываются и в § 11.8.1.

**7.2.4. Метеорология.** В соответствии с рекомендацией Лейбница (§ 3.1.4), регулярные наблюдения атмосферного давления и погоды проводились в Ганновере в 1678 г. и в Киле с 1679 по 1714 г. (Wolf 1935, с. 312). В 1780 г. в Пфальце (княжество в Германии) было учреждено Палатинское метеорологическое общество. Впервые в истории экспериментальных наук оно организовало сотрудничество в международном масштабе (Шейнин 1984b, § 3.1). Примерно в то же время Королевское медицинское общество в Париже начало проводить наблюдения в нескольких европейских странах (Kington 1974). И даже в тридцатые – сороковые годы того же века они проводились в нескольких сибирских городах по инструкции (точнее, общим указаниям), составленной Д. Бернулли в 1733 г. (Тихомиров 1932). Во второй половине века несколько учёных (метеоролог Cotte, Ламберт и Кондорсе) предложили планы обширных международных метеорологических исследований.

Первое статистико-метеорологическое исследование связи между различными явлениями связано с Тоальдо (1775; 1777), который заявил, что погода зависит от конфигурации Луны. Это мнение просуществовало до середины XIX в., но ни в то время, ни во второй половине XIX в. ни астрономы, ни метеорологи не подошли к теории корреляции (конец § 11.6).

Ламберт (1773) изучал влияние Луны на атмосферное давление, и Даниил Бернулли (Radelet de Grave и др. 1979, с. 62) поощрял это исследование. Вот мнение Д. Б.: если это влияние схоже с его влиянием на поверхность моря, его можно будет заметить, потому что расстояние до Луны переменно, однако необходимо будет учесть упругость и незначительную инерцию воздуха. И далее:

*Ваши соображения* […] *вполне обоснованы. Публикуйте их без колебаний* […], *каковы бы ни были результаты.* […] *Только постарайтесь установить их должным образом.*

## 7.3. Математическая обработка наблюдений

В новое время математическая обработка наблюдений стала необходима после начала регулярных астрономических наблюдений, т.е. с эпохи Тихо Браге (§ 2.2.2). Во второй половине XVII в. возникла новая естественнонаучная задача, определение формы и размеров Земли (земного эллипсоида вращения), связанная с введением метрической системы мер. При помощи градусных измерений вычислялись (косвенно, посредством триангуляции) длины дуг меридианов. Определив длину одного градуса в двух различных широтах и зная разности широт конечных точек этих дуг, можно было вычислить оба

параметра эллипсоида, а избыточные измерения позволяли составлять системы уравнений типа (2.2) с этими неизвестными и тем или иным способом решать их. Параметры эллипсоида Красовского (Закатов 1950, с. 364), который до сих пор считается достаточно точным, примерно таковы: $a$ = 6378,2 *км* и α = 1:298,3. Сжатие α определяется и при помощи маятниковых наблюдений, ср. § 11.9.1 (и они же стали применяться для изучения гравитационного поля Земли).
Длина меридиана оказывается примерно равной 40 000 *км*, что соответствует первоначальному определению метра. Впрочем, в 1960 г. метр был заново определён в терминах длины волны света.

Термин *теория ошибок* (Theorie der Fehler) ввёл Ламберт (1765a, Введение и § 321), определив её как изучение соотношения между погрешностями, их последствиями, обстоятельствами измерения и качеством инструментов. Он отдельно сформулировал задачи *теории последствий*, – изучение ошибок функций наблюдённых (с погрешностями) величин, – иными словами, задачи детерминированной теории ошибок, см. § 1.4. Ей, этой второй теории, он посвятил §§ 340 – 426 указанного сочинения. Ни Гаусс, ни Лаплас не восприняли терминологию Ламберта, однако Бессель (1820, с. 166; 1838b/1961, с. 121), ни на кого не ссылаясь, пользовался термином *теория ошибок* и к середине XIX в. новое выражение стало общепринятым. Можно сказать (см. § 7.3.1), что в области теории ошибок Ламберт был основным предшественником Гаусса.

Ниже мы рассматриваем уравнивание прямых и косвенных наблюдений по отдельности, однако учёные XVIII в. отдавали себе отчёт в общности обеих задач. Так, вне зависимости от варианта уравнивания, неизвестные величины назывались одним и тем же термином, – Mittel (Ламберт 1765b, § 6) или milieu (Maire & Boscovich 1770, с. 484 и 501), и о том же свидетельствует история метода средних (§ 7.3.2).

**7.3.1. Прямые наблюдения.** Случая прямых наблюдений впервые коснулся Котс (Cotes 1722, посмертно; Gowing 1983), который без какого-либо обоснования порекомендовал принимать за неизвестную константу как *наиболее вероятное* взвешенное среднее арифметическое из наблюдений:

*Пусть p – положение какого-то предмета, определённое из первого наблюдения, q, r, s – положения того же предмета из последующих наблюдений; пусть кроме того P, Q, R, S – веса,* *обратно пропорциональные расстояниям, на которые могут рассеиваться ошибки, проистекающие из отдельных наблюдений и которые* [расстояния] *могут быть получены из данных о пределах ошибок.*

*Будем считать, что веса* [...] *соответствуют точкам положений p, q, r, s; найдём их центр тяжести Z; я утверждаю, что точка Z будет наиболее вероятным положением предмета, которое с наибольшей вероятностью может считаться его истинным положением.*

Котс приложил рисунок (возможно представлявший трёхмерную картину), на которой, однако, были указаны только 4 точки. Он не разъяснил своего понимания *наиболее вероятного* и не привёл примеров. И все же его авторитет видимо подкрепил общее мнение (§ 2.2.4). См. о нём Gowing (1983).

Не упоминая его и приведя лишь качественные соображения, Кондамин (Condamine 1751, с. 223) рекомендовал применять арифметическое среднее, а Лаплас (1814/1999, с. 862) заявил, что *правилу Котса следовали все вычислители*. Более чётко он (1812/1886, с. 351 – 353) указал, что астрономы начали применять это правило вслед за Эйлером (1749). Однако, ещё раньше Пикар (1693/1729, с. 330, 335, 343) назвал среднее арифметическое истинным значением (*véritable*)**[10]**.

Симпсон (T. Simpson 1756) был первым, применившим вероятностные соображения к обработке наблюдений и притом с использованием производящих функций. Целью своей работы он объявил желание опровергнуть не названных им авторов, которые утверждали, что одно хорошее наблюдение столь же надёжно как среднее из многих, ср. § 2.2.2.

По Симпсону, шансы ошибок наблюдений

$$-v, -v+1, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., v-1, v$$

равны (точнее, пропорциональны), соответственно, либо**[11]**

$$r^{-v}, r^{-v+1}, ..., r^{-2}, r^{-1}, 1, r^{1}, r^{2}, ..., r^{v-1}, r^{v},$$

либо

$$r^{-v}, 2r^{-v+1}, ..., (v-1)r^{-2}, vr^{-1}, (v+1), vr, (v-1)r^{2}, \ldots, 2r^{v-1}, r^{v}.$$

В дальнейшем Симпсон принял, что $r = 1$ и таким образом рассмотрел равномерное и треугольное дискретные распределения и впервые фактически ввёл случайные ошибки наблюдения.

Обозначим эти ошибки через $\varepsilon_i$ и пусть $N$ будет количеством каких-либо шансов. Тогда, как Симпсон заметил, $N(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n = m)$ будет равно коэффициенту при $r^m$ в разложениях

$$(r^{-v} + \ldots + r^0 + \ldots + r^v)^n = r^{-vn}(1 - r)^{-n}(1 - r^{2v+1})^n,$$

$$[r^{-v} + 2r^{-v+1} + \ldots + (v + 1)r^0 + \ldots + 2r^{v-1} + r^v]^n = r^{-vn}(1 - r)^{-2n}(1 - r^{v+1})^{2n}.$$

Левые части этих равенств – производящие функции с единичными коэффициентами в первом случае и с коэффициентами

$$1, 2, \ldots, v + 1, \ldots, 2, 1$$

во втором. Для обоих случаев он определил вероятность ошибки среднего арифметического из $n$ наблюдений быть по абсолютной величине меньше некоторой величины или равняться этой величине. По результатам своих вычислений он решил, что среднее арифметическое вообще [стохастически] предпочтительней чем отдельное наблюдение, однако тем самым произвольно и неверно расширил доказанную им теорему. Симпсон также указал, что в первом случае его задача равносильна определению вероятности открыть заданное число очков при броске $n$ $(v + 1)$-гранных костей. Игру в кости исследовали он сам (T. Simpson 1740, задача № 22), а ещё раньше Монмор (§ 4.3.3), правда, не применявший производящих функций, и Муавр (1730, с. 191 – 197).

Через год Симпсон (1757) перепечатал свой мемуар, добавив к нему исследование непрерывного треугольного распределения. Он перешёл к непрерывности, положив $|v| \to \infty$ при постоянном соотношении $(m/n)/v$, где дробь в числителе есть допустимая погрешность среднего арифметического и $n$ по-прежнему число наблюдений. Чертёж Симпсона, однако, соответствовал конечному $v$ при непрерывном аргументе (погрешности наблюдения), а кривая погрешности среднего арифметического не имела характерного для нормального распределения закругления. Симпсон, разумеется, не владел понятием дисперсии и подсчёт вероятности того, что абсолютная погрешность среднего арифметического превзойдёт ту же погрешность одного наблюдения, оказался нелёгким (Shoesmith 1985b).

Не сославшись на Симпсона, Лагранж (Lagrange 1776) исследовал погрешность среднего арифметического для нескольких других распределений чисто теоретического плана, также при помощи производящих функций (даже для непрерывных распределений, тем самым предвосхитив введение характеристических функций). Его мемуар содержал и другие интересные общематематические результаты; он ввел первые интегральные преобразования, а в Задаче 6 вывел уравнение поверхности многомерного нормального распределения (K. Pearson 1978, с. 599). В своём § 18 он ввёл термин *кривая возможностей ошибок*. См. также Шейнин (1973a, § 2).

Возможно, что Лагранж не захотел упоминать Симпсона, чтобы полностью остаться в стороне от происшедшего ожесточённого спора между тем и Муавром. Муавр был гораздо более значимым учёным, чем Симпсон (который это прекрасно сознавал) и на 43 года старше его. По крайней мере в нескольких существенных случаях Симпсон не сослался на него и, будучи обвинён Муавром (1725, с. xii в издании 1743 г.) в *показе моих новых правил и работ*, обратился *ко всему человечеству с вопросом, не выказал ли он* [Муавр] *самонадеянность, дурной нрав и закоренелость, недостойные джентльмена* (посмертная публ. 1775, с. 144).

Ламберт (Lambert 1760, §§ 271 – 306)[12] описал свойства "обычных" случайных ошибок, классифицировал их по происхождению (§ 282), неубедительно доказывал необходимость отбраковки уклоняющихся наблюдений (§§ 287 – 291) и оценивал точность наблюдений, – также не очень удачно, но впервые (§ 294). Он кроме того сформулировал неопределённую задачу нахождения [статистики], которая с наибольшей вероятностью наименее уклонялась бы от истинного значения измеряемой константы (§ 295) и ввёл принцип наибольшего правдоподобия (но не термин) для непрерывной плотности (§ 303), хотя и заявил (§ 306), что оценка наибольшего правдоподобия в большинстве случаев мало уклоняется от среднего арифметического. Заметим, что весь этот материал был исключён из немецкого перевода 1892 г. сочинения Ламберта; по мнению переводчика, он устарел.

Вводя принцип наибольшего правдоподобия, Ламберт не основывался на какой-либо определённой плотности распределения, а лишь показал на чертеже более или менее симметричную одновершинную кривую. Если обозначить ее уравнение через $\varphi(x - x_o)$ с искомым параметром сдвига $x_o$, а результаты наблюдений через $x_1, x_2, ..., x_n$ и упростить его рассуждения, то его функцию правдоподобия можно будет записать в виде

$$\varphi(x_1 - x_o)\ \varphi(x_2 - x_o)\ \dots\ \varphi(x_n - x_o).$$

Ламберт дифференцировал эту функцию, хотя и не указал, что аргументом при этом являлся параметр $x_o$ и т. д.

Через пять лет Ламберт вернулся к обработке наблюдений (1765a). Он пытался оценить погрешность среднего арифметического, однако, снова не введя никакой плотности распределения, не смог придти ни к какому определённому выводу. Ламберт кроме того частично повторил свои прежние рассуждения и предложил вывод такой плотности (§§ 429 – 430) по принципу недостаточных оснований: она оказалась полуокружностью (с неизвестным радиусом) лишь потому, что *не было причин* для её *угловатости*.

Более подробно остановимся на работах Д. Бернулли (Шейнин 1972b). Иоганн III Бернулли (Johann III Bernoulli 1785) опубликовал выдержку из рукописи Даниила, полученную им в 1769 г., но написанную, со слов автора, намного раньше (опубликована в 1997 г.). В ней Даниил принял плотность распределения ошибок наблюдения в виде “полуэллипса” или полуокружности с некоторым радиусом $r$, а в качестве параметра сдвига – взвешенное среднее арифметическое с апостериорными весами

$$p_i = r^2 - (x - x_i)^2. \qquad (7.4)$$

Здесь $x_i$ – соответствующее наблюдение, а $x$ – обычное среднее арифметическое. При необходимости могли применяться последовательные приближения.

В своём опубликованном мемуаре Бернулли (1778) возражал против выбора среднего арифметического, который согласуется лишь с равной вероятностью всех возможных ошибок и равносилен стрельбе вслепую (§ 5)[13]. Взамен он предложил для [параметра сдвига оценку наибольшего правдоподобия] и подкрепил свою мысль тем (§ 9), что при осуществлении некоторого из возможных и несовместимых событий следует полагать, что имело место то, которое обладало наибольшей вероятностью.

Выбрав несколько разумных условий для кривой плотности (но добавив к ним её пересечение с осью абсцисс почти под прямым углом), Бернулли остановился на полуокружности с радиусом, равным максимально возможной для данного наблюдателя ошибке. Далее (§ 11), он записал [функцию правдоподобия] в виде

$$\{[r^2-(x-x_1)^2]\,[r^2-(x-x_2)^2]\,[r^2-(x-x_3)^2]\,...\}^{1/2},$$

где, в несколько изменённых обозначениях, $x$ – неизвестная абсцисса центра полуокружности, а $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... – наблюдения. Предлагая *для простоты вычислений* искать максимум квадрата этой функции, Бернулли, однако, перешёл от полуокружности к дуге параболы, не зная, разумеется, что дисперсия получаемого результата при этом изменится.

Для трёх наблюдений его [уравнение правдоподобия] имело пятую степень. Бернулли решил его в одном конкретном случае с произвольно выбранными $x_1$, $x_2$ и $x_3$ (что было допустимо при столь малом числе наблюдений). Мы же представим это уравнение в виде

$$\frac{x-x_1}{r^2-(x-x_1)^2}+\frac{x-x_2}{r^2-(x-x_2)^2}+\ldots=0,$$

так что оценка наибольшего правдоподобия оказывается равной

$$x_0=\frac{[px]}{\sum p_i},\ p_i=\frac{1}{r^2-(x_0-x_i)^2}, \qquad (7.5;\ 7.6)$$

где метод последовательных приближений неизбежен. Бернулли не выписал указанных формул, хотя апостериорные веса (7.6) были обратны весам (7.4) из его рукописи. Этот факт эвристически противоречил его собственным предварительным соображениям о стрельбе, да и астрономы того времени вряд ли согласились бы на веса, возрастающие к краям распределения.

Впрочем, теперь известно, что подобные веса могут быть разумны при некоторых распределениях. Заметим ещё, что, по Бернулли, нормированная должным образом плотность распределения такова:

$$y = (3/4r^3)[r^2 - (x - x_o)^2],\ x_o - r \le x \le x_o + r.$$

Веса (7.6) следовало соответственно исправить.

Эйлер (1778) комментировал мемуар Бернулли. Он возразил против [принципа наибольшего правдоподобия] (§ 6), поскольку результат уравнивания должен почти сохраняться вне зависимости от отбрасывания или удерживания уклоняющегося наблюдения. Это соображение должно было бы привести его к медиане, он, же заметил (§ 7), что не было нужды *обращаться к принципу максимума, поскольку бесспорные правила теории вероятностей вполне достаточны для решения всех подобных вопросов*. Подобное же возражение против указанного принципа сформулировал Гаусс (§ 10А.4-2).

В позитивной части своего комментария Эйлер рекомендовал взамен среднего арифметического оценку (7.5) с апостериорными весами (7.4), ошибочно полагая, что Бернулли предложил (фактически) те же веса. Развивая свою рекомендацию и обозначив наблюдения числом $n$ через П + $a$, П + $b$, П + $c$, ..., где

$$a + b + c + ... = 0, \qquad (7.7)$$

он вывел уравнение

$$nx^3 - nr^2x + 3Bx - C = 0,\ B = a^2 + b^2 + c^2 + \dots,$$
$$C = a^3 + b^3 + c^3 + \dots,$$

из которого следовало определить оценку П + $x$ при $x$ равном корню с наименьшим абсолютным значением. Условие (7.7) означало, что искомая оценка находится ближе всего к арифметической середине. Впрочем, сам Эйлер (§ 9) обосновал свой выбор корня уравнения тем, что $x = 0$ при $r \to \infty$, т.е. при $n \to \infty$.

Далее Эйлер (§ 11) заметил, что оценка (7.5) с весами (7.4) может быть получена из условия

$$[r^2 - (x_o - a)^2]^2 + [r^2 - (x_o - b)^2]^2 + \dots]^2 + ... = \max. \qquad (7.8)$$

Величины в круглых скобках это уклонения наблюдений от искомой оценки и их четвертыми степенями можно пренебречь, так что условие (7.8) оказывается равносильным требованию

$$(x_o - a)^2 + (x_o - b)^2 + (x_o - c)^2 + ... = \min, \qquad (7.9)$$

откуда по равенству (7.7) следует обычное среднее арифметическое. Эвристически условие (7.9) напоминает принцип наименьших квадратов (который и приводит к среднему арифметическому при одном неизвестном), а условие (7.8) с весами (7.4), – принцип Гаусса наибольшего веса (наименьшей дисперсии). Впрочем, и Бернулли, и Эйлер полагали, что плотность ошибок наблюдений известна, и тогда среднее арифметическое возможно не будет наилучшей оценкой параметра сдвига. Небольшие уклонения от условия (7.9) существуют, и вызваны они уклонениями от предположенной (или молчаливо принятой) симметрии плотности, и сам Бернулли заметил это при решении числовых примеров (см. выше).

Short (1763) первым применил взвешенное или обобщённое среднее арифметическое. Веса он выбрал субъективно, в зависимости от расстояния данного наблюдения от *середины*, и поэтому указанное чуть выше обстоятельство относилось и к нему.

Фон Цах (von Zach 1805) применил рекомендацию Эйлера, однако отобранные им наблюдения (с. 414) значительно отличались друг от друга и не требовали никакой утончённой обработки. Во всяком случае, полученный им результат (с. 491) практически совпадал со средним арифметическим.

В своём последнем мемуаре Бернулли (1780) впервые подразделил ошибки наблюдения на случайные (*моментальные*) и систематические (*хронические*), хотя (§ 2.1.4) уже древние астрономы несомненно знали, что некоторые погрешности действуют систематически. Поскольку Бернулли рассматривал маятниковые наблюдения[14], то эти ошибки, как он указал, пропорциональны соответственно корню квадратному из времени их действия и самому этому времени. Используя свои прежние результаты (§ 7.1.1, формула (7.1)), Бернулли основал своё исследование на нормальном распределении, которое таким образом впервые появилось при обработке наблюдений, хотя только в качестве предельного.

Количество колебаний секундного маятника в течение суток равно $2N \approx 86\,400$; пусть, как предположил Бернулли, $(N + \mu)$ из них замедлены, а $(N - \mu)$ убыстрены с периодами $(1 + \alpha)$ и $(1 - \alpha)$ соответственно. Эта простая схема означала, что количество положительных (например) ошибок имело симметричное биномиальное распределение и что погрешность маятника после большого числа колебаний окажется нормально распределённой.

В своей прежней работе Бернулли заметил, что при $N = 10\,000$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi N}}\int_0^{\mu} \exp\,(-\,x^2/N)\,dx = 1/2,$$

если $\mu = 47{,}25$. Теперь же, при $N = 43\,200$, он получил для половинной вероятности

$$\mu = 47{,}25(43\,200/10\,000)^{1/2} \approx 100.$$

Это вычисление и привело его к утверждению о порядке действия случайных ошибок (см. выше), хотя в XIX в. стало известно, что случайные ошибки могут и не иметь нормального распределения.

Ещё Гюйгенс (§ 3.2.2) ввёл вероятную продолжительность жизни, Бернулли же, как мы видим, подошёл к вероятной ошибке. Он также первым ввёл элементарные ошибки; впрочем, мы не придаём особого значения этому понятию, поскольку оно не является необходимым ни для доказательства ЦПТ, ни для экспериментаторов. Заметим далее, что Бернулли не исследовал более общий случай, соответствующий также рассмотренному им ранее неравенству вероятностей мужских и женских рождений и не упомянул о возможной зависимости между периодами последовательных колебаний маятника.

**7.3.2. Уравнивание косвенных измерений.** Мы рассмотрим здесь решение избыточных систем

$$a_ix + b_iy + ... + s_i = v_i,\ i = 1, 2, \ldots, n \qquad (7.10)$$

с $k$ неизвестными $(k < n)$ и остаточными свободными членами $v_i$ (см. § 2.2.1). В случае двух неизвестных (ср. начало § 7.3) система (7.10) разбивалась на все возможные группы по два уравнения в каждой и решения этих пар осреднялись. Иначе говоря, если

($x_{ij}$; $y_{ij}$) – решение группы ($i$, $j$), $i$, $j$ = 1, 2, ..., $n$, $i < j$, то принимали, что окончательным решением системы по этому *методу сочетаний* будет

$$x_о = \frac{1}{C_n^2}\Sigma x_{ij},\ y_о = \frac{1}{C_n^2}\Sigma y_{ij}.$$

Величинами $v_i$ при этом пренебрегали.

Попарные сочетания уравнений применил Бошкович в 1757 г. (Cubranic 1961, с. 90 – 91) и позже (Maire & Boscovich 1770, с. 483 – 484), однако не удовлетворился ими, см. ниже. Интересно, что в первом случае он (Cubranic 1961, с. 46) необычным для нас способом, который напоминал метод попарных сочетаний, вывел среднее арифметическое из четырёх разностей широт: вначале он вычислил полусуммы всех попарных разностей и только затем вывел общее среднее. Возможно, что он хотел, не меняя окончательного результата, исключить неизбежные систематические влияния и получить представление о случайных погрешностях астрономических определений[15].

В XIX в. выяснилось, что решение систем по МНКв сводилось к подобной же процедуре, но с надлежащим взвешиванием частных оценок (Whittaker & Robinson 1924/1949, с. 251). Но уже для трёх неизвестных метод сочетаний становился слишком громоздким. Майер (Mayer 1750), которому при изучении либрации Луны пришлось решать 27 уравнений с тремя неизвестными, разделил эти уравнения на три равные группы, вычислил столько же частных решений (см. ниже) и, наконец, осреднил их. Надёжность получаемых таким образом результатов зависит от целесообразности состава групп и представляется (Stigler 1986, с. 21 – 25), что Майер удачно справился с этой задачей. Интересуясь в основном лишь первым неизвестным, он составил первые две группы из уравнений с наибольшими положительными и отрицательными коэффициентами соответственно. Заметим, что Майер полагал, что точность результатов пропорциональна количеству наблюдений, но в его время подобная ошибка была объяснима.

Осталось сказать, что каждую группу уравнений Майер решал при дополнительном условии

$$\Sigma v_i = 0, \qquad (7.11)$$

где индекс указывал номер уравнения; если в первую группу включить первые 9 уравнений, то для неё $i = 1, 2,..., 9$.

Био (Biot 1811, с. 202 – 203) засвидетельствовал, что до изобретения МНКв астрономы неизменно применяли метод Майера, а Лаплас (1812/1886, с. 352 – 353) заметил, что *лучшие* астрономы следовали за ним. В письме 1850 г. Гаусс (*W*-6, с. 90) указал, что Майер вычислял при помощи примитивных комбинаций и сослался на его рукописи. Весьма возможно, что и в рукописях Майер поступал таким же образом, но интересно, что сам Гаусс (там же, с. 66 – 67) в письме того же года рекомендовал подобный же метод, хотя лишь при исследовании анероида.

Условие (7.11) определяет *метод средних* и рекомендацию Ламберта (1765b, § 20) о подборе эмпирических прямых также можно истолковать как его применение. Он разделил точки (наблюдения) на две группы с меньшими и большими абсциссами и проводил прямые через центры тяжести этих групп. Аналогично он подбирал и кривые, применяя уже несколько центров тяжести.

Метод средних интуитивно воспринимался как вытекающий из равной вероятности ошибок каждого знака (Maire & Boscovich 1770, с. 501) и, видимо, как приводящий в случае непосредственных измерений к арифметической середине. О дальнейшей истории метода см. § 11.1.

*Метод Бошковича*. Бошкович (Maire & Boscovich 1770, с. 501) уравнивал систему (7.10) при дополнительных условиях

$$v_1 + v_2 + ... + v_n = 0, \ |v_1| + |v_2| + ... + |v_n| = \min, \qquad (7.12; 7.13)$$

первое из которых определяло метод средних. От него можно было освободиться, если сложить все уравнения системы и исключить одно из неизвестных из полученного выражения. *Среднее* (milieu), как заявил Бошкович, должно быть *соединено по определённому закону с правилами случайных сочетаний и с исчислением вероятностей*[16]. Впрочем, как именно указанные условия соответствовали этой цели он не смог объяснить.

Второе условие (7.13)[17] связывало способ Бошковича с [медианой]. И действительно, его геометрический метод уравнивания систем (7.10) состоял в построении прямой, угловой коэффициент которой оказался равным медиане из некоторых дробей. Иначе: для градусных измерений системы (7.10) имеют вид

$$a_i x + y + s_i = v_i. \qquad (7.14)$$

Избавляясь от условия (7.12), мы имеем

$$[a_i - (1/n)\Sigma a_i]x + [s_i - (1/n)\Sigma s_i] = 0$$

и выбираем медиану из $n$ частных значений неизвестного в качестве его оценки. Метод Бошковича применял и Лаплас (§ 8.2-5).

*Метод минимакса.* При этом методе системы (7.10) решаются при дополнительном условии

$$|v_{max}| = \min,$$

где минимум отыскивается среди всех возможных и целесообразных решений[18]. В § 2.2.4 мы указали, что Кеплер, видимо, пользовался элементами метода минимакса (правда, даже не для алгебраических уравнений), который не обеспечивает наилучших в каком-нибудь смысле результатов, но позволяет проверить, верна ли теория, на которой основана заданная система (7.10). Действительно, любой иной способ ее решения приведёт к большему значению $|v_{max}|$, разрыв между теорией и наблюдениями увеличится, и справедливость теории может ошибочно показаться сомнительной.

Гусак (1961) описал историю способа минимакса от 1778 г., когда Эйлер применил его к важному исследованию, которое, однако, не будет нас интересовать, до Чебышева. Эйлер (1749), однако, намного раньше использовал элементы этого метода для решения систем (7.10), принимая во внимание лишь несколько “решений”, а Ламберт (1765а, § 420) рекомендовал применять его, хотя и признал, что не знает, как это осуществить *общим способом и без многих окольных путей*.

Лаплас (1789/1895, с. 493, 496, 506 и позже) применял принцип минимакса для предварительных исследований, – для выяснения, не противоречат ли результаты градусных измерений и маятниковых наблюдений теории о форме Земли (эллипсоид вращения, сплюснутый у полюсов). Поскольку принцип минимакса не носит вероятностного характера, мы не станем описывать те алгоритмы, которые Лаплас предложил для его использования. Впрочем, он применяется в теории статистических решений (Леман 1959/1979, гл. 9).

Эйлер (1755; 1770) и позднее уравнивал косвенные наблюдения. Ни в 1749, ни в 1755 гг. его цель не ограничивалась этим, поскольку соответствующие теории не были твёрдо установлены, и он был *смущён* тем, что некоторые искомые величины оказались совершенно ненадёжными (Wilson 1980, с. 262, прим. 438). Эйлер и не пытался построить общую теорию уравнивания, он скорее ограничился практическими потребностями, и иногда должен был прибегать к элементам метода минимакса. В последнем случае он (1770) не применил никакого определённого метода и, более того, объединил свои уравнения сомнительным образом. Именно, для исключения одного неизвестного он вычел все уравнения из, скажем, первого из них, и тем самым молчаливо придал ему весьма большой вес (Шейнин 2007d, § 3.5)[19].

## Примечания

**1.** Лагранж (Lagrange 1777) решил аналогичную задачу для конечного числа урн и шаров двух различных цветов и несколько других вероятностных задач при помощи уравнений в конечных частных разностях.

**2.** Даламбер опубликовал много мемуаров и статей, посвящённых теории вероятностей и её приложениям (§ 7.2.3). Todhunter (1865) посвятил ему целую главу.

**3.** Ср. по этому поводу задачу Даламбера – Лапласа (гл. 2, Прим. 6). Отрицание случая (гл. 2, Прим. 2) оказалось бесплодным.

**4.** Ниже описано весьма странное отношение Даламбера к медицине.

**5.** Вывод Бюффона, который он не обосновал, был неверен, см. Zabell (1988b) и Loveland (2001).

**6.** Напомним (§ 4.3.4), что Кондорсе высказал разумное замечание по поводу Петербургской игры.

**7.** Следует упомянуть и Даламбера (1821, с. 163). Первоначальное издание этого сочинения 1759 г., кажется, не содержало соответствующего утверждения; добавим, однако, что он умер в 1783 г., т. е. что его аналогичное пожелание также относилось к XVIII в. Даламбер даже заявил, что врач подобен слепому, и может ударить своей дубиной либо болезнь, либо больного, а на с. 167 добавил, что консультироваться следует с врачом, который менее всего верит в медицину.

**8.** Тот же Блек приложил к своей книге *Таблицу всех смертельных болезней и несчастных случаев в Лондоне за* [...] *1701 – 1776 гг.* Он (с. 56) заявил , что подобные схемы *предупредят нас и позволят нам наилучшим образом приготовиться к защите*. В своей предыдущей книге Блек (1782), однако, высказал противоречивые мысли.

**9.** В первом случае он основывался на докладе Бернулли; напомним (см. выше), что мемуар последнего был опубликован лишь в 1766 г. В дальнейшем Даламбер переработал свои статьи; подробное описание его собственных

предложений см. Todhunter (1865, с. 265 – 271, 277 – 278 и 282 – 286).
**10.** Лишь Фурье (Fourier 1826/1890, с. 534) определил *истинный объект изучения*, т.е. эту константу, или её *истинное* значение, как предел среднего арифметического при неограниченном возрастании числа наблюдений. До него подобное мнение сложилось у Ламберта и Лапласа, но соответствующего определения они не вводили. Многие авторы, начиная, пожалуй, с Тимердинга (Timerding 1915, с. 83) [особо отметим Мизеса (1919/1964, с. 40 и 46)], без упоминания Фурье и независимо друг от друга вводили то же самое определение. Один из них (Eisenhart 1963/1969, с. 31) указал на неизбежное следствие: среднюю остаточную систематическую погрешность приходится включать в это *истинное* значение:

*По определению* [...] *масса эталона массы равна массе его металлического вещества плюс масса среднего объёма воздуха, адсорбированного им при стандартных условиях.*

Но и независимо от систематических влияний точность наблюдений всегда ограничена (§ 12.2-8), а потому в определении Фурье понятие *предел* нельзя понимать буквально. Укажем ещё, что Гаусс наблюдал каждый угол триангуляции до тех пор, пока не убеждался, что дальнейшая работа не имела смысла (*W*-9, 1903, с. 278 – 281 и др.; Schreiber, 1879, с. 141). Только Марков (1924, с. 323), также не зная определения Фурье, не позже, чем во втором издании своего руководства, счёл необходимым заметить, что *прежде всего необходимо допустить существование чисел, приближённые значения которых доставляются наблюдениями.*
Математическая статистика перешла от истинных значений к параметрам функций распределения, что было шагом в правильном направлении: чем математика абстрактнее, тем она полезнее. Но, во-первых, практическая астрономия, геодезия, метрология, физика не могут обойтись без прежнего понятия. И, во-вторых, сама статистика подчас применяет его (Хальд 1998, гл. 5 и 6). Даже Фишер (1922, с. 309 – 310), который определил состоятельность, эффективность и достаточность статистических оценок, на следующей же странице применил прежний термин, притом по отношению к мере точности (к величине, не встречающейся в природе), и так же поступил Гаусс (1816, §§ 3 и 4). См. Шейнин (2007c).

**11.** Введённые Симпсоном распределения, если считать их непрерывными, в определённом смысле сводятся одно к другому: дисперсии среднего арифметического равны для них, соответственно, $v^2/3$ и $v^2/6$.

**12.** В письме 1971 г. E. S. Pearson сообщил, что *примечательно*, что (тогда ещё не опубликованные) *Лекции* (1978) его отца умалчивали о Ламберте**.** Он пояснил:

*Это произошло не потому, что сочинения* [Ламберта] *были написаны по-немецки, которым мой отец отлично владел. Я полагаю,* [...] *что он выбрал для изучения тех учёных, которые были указаны в небольшом числе источников, например, в трактате Тодхантера, и что эти источники не включали имя Ламберта.* [Тодхантер все-таки упоминал Ламберта, но не описал его трудов.] *Конечно, ко времени, к которому его лекции перешли за 1750-й год, К. П. было уже за семьдесят, и его исследование безусловно ограничивалось четырьмя французами, – Кондорсе, Даламбером, Лагранжем и Лапласом.*

**13.** Вот, однако, разумное качественное замечание К. Пирсона (1978, с. 268):

малые погрешности более вероятны, нежели большие и потому должным образом влияют на образование среднего арифметического.

**14.** По этой причине мемуар был ошибочно отнесён к практической механике, и его вероятностная сущность оставалась незамеченной вплоть до нашей публикации (Шейнин 1972b).

**15.** Более убедителен пример Тихо Браге, см. гл. 2, Прим. 18.

**16.** На последний термин следует обратить внимание: до Бошковича его, кажется, применил только Николай Бернулли (J. Bernoulli 1713/1975, p. 108).

**17.** Для случая, когда величины, подобные $v_i$, положительны по определению, это условие встречается у Галилея (§ 2.2.3) и Даниила Бернулли (1735/1987, с. 321 – 322), который предложил определять плоскость солнечного экватора так, чтобы сумма абсолютных величин наклонностей планетных орбит относительно неё была минимальна. У. Гершель (1805) определял движение Солнца, исходя из видимых движений звёзд. Сумма последних зависит от движения Солнца, а её минимум, как он предположил, соответствует целесообразной оценке этого движения. Уравнения Гершеля были даже не алгебраическими, но после необходимых последовательных приближений их можно было бы считать линейными. Заметим, что в те времена движение звезды можно было определять только в плоскости, перпендикулярной визирному лучу. Вот более раннее рассуждение Гершеля (1783/1912, т. 1, с. 120):

*Мы должны* [...], *в той мере, в какой это будет соответствовать известным фактам, перевести то, что является общим для всех звёзд*, [ ...] *в единое действительное движение Солнечной системы и приписать собственному движению каждой определённой звезды лишь уклонения от общего закона, которому звезды, видимо, следуют ...*

Таковы, он добавил, *правила философствования*. Сравним это с ньютоновским Правилом № 1 рассуждений в философии (1729/1960, с. 398):

*Мы не должны признавать никаких причин для естественных вещей, кроме тех, которые и истинны, и достаточны для объяснения их появления.*
Можно вспомнить и о Бритве Оккама (§ 2.1.5).

Заметим, наконец, что Гершель (1806), см. также (Шейнин 1984a, с. 172 – 173), предпочёл при обработке непосредственных измерений не среднее арифметическое, а медиану.

**18.** Примечательно, что метод минимакса, как заметил Гаусс (1809b, § 186), соответствует условию

$$\lim (v_1^{2k} + v_2^{2k} + ... + v_n^{2k}) = \min, k \to \infty.$$

**19.** Stigler (1986, c. 27 – 28) назвал мемуар Эйлера (1749) *статистически несостоятельным*, а самого Эйлера – математиком, *не верящим* в целесообразность сочетания уравнений. Не разобравшись в основной цели метода минимакса и развязно упоминая классика науки, он сам себя высек. В своей второй книге Stigler (1997/1999, c. 317 – 318), нисколько не стесняясь, назвал Эйлера крупным статистиком.

Следует добавить, что в XVIII в. астрономы не всегда решались уравнивать наблюдения (Méchain & Delambre 1810, pp. 415 – 433). Лаплас**,** Лежандр и другие учёные, видимо опасаясь распространения крупных погрешностей, просто отказались уравнивать цепь триангуляции, проложенную между двумя базисами. Вместо этого они решили вычислить каждую половину цепи от “своего” базиса (Шейнин 1993b, с. 50). Позже Лаплас (прим. 1819, с. 590 – 591) обосновал указанный отказ отсутствием в то время *истинной теории* уравнивания, и добавил, что положение изменилось после того, как он обосновал МНКв. Упомянем ещё Мопертюи (Maupertuis 1738/1756, с. 160; 1756b/1768, с. 311 – 319), который вычислил свою триангуляцию 12 раз (каждый раз принимая во внимание различные наборы измеренных углов), отобрал два результата и принял среднее из них.

Полезно ещё заметить, что перед собственно уравниванием советской астрономо-геодезической сети каждое её звено, расположенное между базисами и астрономическими “азимутами Лапласа”, предварительно уравнивалось и заменялось геодезической линией (ср. начало § 11.6). Только эти линии и уравнивались совместно, после чего каждое звено окончательно уравнивалось независимо от остальных. Этот метод уравнивания не позволял систематическим ошибкам *свободно гулять* по всей сети (А. А. Изотов, первый помощник Ф. Н. Красовского, автора *эллипсоида Красовского*, на лекции примерно 1950 г., на которой мы присутствовали).

# 8. П. С. Лаплас
## 8.1. Теория вероятностей

Теории вероятностей Лаплас посвятил ряд мемуаров и впоследствии объединил их в своей *Аналитической теории вероятностей* (1812). Мы опишем её вторую книгу; первая была посвящена исчислению производящих функций с приложением к решению уравнений в обыкновенных и в частных конечных разностях и приближенному вычислению интегралов. Мы ссылаемся на это сочинение, указывая лишь его страницы.

1) **В гл. 1** Лаплас привёл “классическое” определение вероятности (введённое Муавром, см. § 5.3), теоремы сложения и умножения вероятностей для независимых событий и теоремы об условных вероятностях. Этот же материал он изложил в *Опыте философии* (1814)[1], в котором кроме того словесно сформулировал и так называемую теорему Бейеса (1814/1999, с. 837), см. формулу (6.1), назвав её принципом. “Фундаментальный принцип” обращённой вероятности, равнозначный этой теореме при постоянных априорных вероятностях $P(A_i)$, мы находим у него намного раньше (Laplace 1774/1891, с. 29):

$$P(A_i/B)/P(A_j/B) = P(B/A_i)/P(B/A_j).$$

2) **Во второй главе** Лаплас решил ряд задач при помощи уравнений в обыкновенных и частных конечных разностях. Особо рассмотрим три другие задачи.

а) В астрономическом контексте Лаплас рассмотрел выборку с возвращением из урны с билетами, пронумерованными от 0 до $n$ и отыскивал вероятность сумме $k$ появившихся при этом номеров равняться $s$ (с. 257). Пусть эти номера будут $t_1, t_2, ..., t_k$, тогда

$$t_1 + t_2 + ... + t_k = s. \quad (8.1)$$

Лаплас подсчитал количества сочетаний, приводящих к равенству (8.1). При этом он учёл условие $t_i \le n$, $i = 1, 2, ..., k$, назначая этим величинам вероятности

$$(1 - l^{n+1})/(n + 1), \quad (8.2)$$

где $l = 0$ для $t_i \le n$ и $l = 1$ в противном случае. Несколько подробнее о разрывных множителях у Лапласа см. Шейнин (1973a, с. 291 – 298), где описан аналогичный метод, который Лаплас применял в 1810 г. и который восходит к Муавру и Симпсону (там же, с. 278 – 279). Если, например, две (три) величины $t_i$ превосходят $n$, то множитель (8.2) возводится в квадрат (в куб) и т. д. Лаплас вычислил искомую вероятность и перешёл к случаю $s$, $n \to \infty$ и его формула (с. 260) соответствовала современной литературе (Уилкс 1962/1967, с. 217) для распределения суммы независимых, непрерывно и равномерно распределённых на интервале [0; 1] величин, но, впрочем, без требования больших $s$ и $n$.

Задачу об упомянутом распределении, также в астрономическом контексте, Лаплас решил ещё в 1776 г. при помощи весьма сложных возвратных соотношений (Шейнин 1973a, с. 287 – 290). Заметим, однако, что в рамках теории ошибок аналогичные результаты получили ещё Симпсон и Лагранж (§ 7.3.1). Следующие две задачи Лаплас решил на этот раз так же, как и в своём раннем мемуаре 1781 г.

b) Неотрицательные случайные величины $t_1$, $t_2$, ..., $t_k$ с различными законами распределения $\varphi_i(t)$ [взаимно] независимы, их сумма равна $s$. Требуется определить интеграл

$$\int \psi(t_1; t_2; ...; t_k)\varphi_1(t)\varphi_2(t) ... \varphi_k(t)dt_1dt_2 \dots dt_k,$$

распространённый на все возможные значения переменных; $\psi$ – пока ещё не выбранная функция. Этот весьма общий случай Лаплас ещё более обобщил, допустив, что каждая функция $\varphi_i(t)$ может быть задана различными формулами на различных интервалах свой области определения.

При решении своей задачи Лаплас воспользовался тем же разрывным множителем (8.2) и вывел формулу Дирихле (выражение для $n$-кратного интеграла от произведения $n$ степенных функций; интеграл распространён на область, в которой сумма аргументов, т.е. оснований этих степенных функций, заключена в интервале [0; 1]), притом в более общем виде. Случай $\psi \equiv 1$ соответствовал определению вероятности равенства (8.1), которое интересовало Лапласа и здесь. Он, далее, ещё раз специализировал свою задачу, приняв, что

$$\varphi_i(t) = a + bt + ct^2.$$

В процессе решения Лаплас получил кратный интеграл от $u$, $u_1$, $u_2$, … по области

$$0 \le u + u_1 + u_2 + \ldots \le s$$

и продифференцировал его по $s$, т. е. по области интегрирования. Не упомянув, что он вычисляет эту производную, а не интеграл, Лаплас привёл лишь окончательный ответ. Заметим, что простое преобразование $u = sx$, $u_1 = sx_1$, … избавляет от необходимости необычного дифференцирования интеграла. См. Шейнин (1973a, с. 292).

c) Некоторый интервал $OA$ разделён на равные или неравные части, из концов которых восставлены перпендикуляры числом $n$. Сумма их длин известна, и они (считая от $O$ к $A$) не возрастают. Пусть теперь последовательность длин перпендикуляров (т.е. ординат) выбирается неоднократно, какова будет тогда, спрашивает Лаплас, средняя ломаная, соединяющая их концы? Среднее значение какой-то промежуточной ординаты? Или, в непрерывном случае, средняя кривая?

Каждую кривую можно полагать реализацией случайного процесса, а средняя кривая – его ожидание. Лаплас сумел определить эту среднюю кривую (Шейнин 1973a, с. 297) на основе своей предыдущей задачи[2] и в 1781 г. попытался использовать её в теории ошибок (§ 8.2). Кроме того, он рекомендовал приложить её решение к исследованию экспертных оценок. Пусть некоторое событие может происходить в силу $n$ взаимоисключающих причин. Каждый эксперт располагает их в порядке возрастания (или убывания) соответствующих [субъективных] вероятностей, которые, как оказывается, пропорциональны функции $n$ и номера причины $r$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{1}{n-r+1}.$$

Сравнение сумм этих вероятностей, относящихся к одной и той же причине, покажет среднее субъективное мнение об её существенности. Уточним: у различных экспертов одной и той же причине могут соответствовать различные по счету ординаты.

3) **Третья глава** посвящена предельной теореме Муавра – Лапласа и нескольким интересным задачам, связанным с

предельным переходом. Теорему Муавра (§ 5.4) Лаплас доказал уже с применением формулы суммирования Маклорена – Эйлера, и, чего у Муавра также не было, вычислил поправочный член, учитывающий неточность теоремы в случае большого но конечного числа опытов. Вот её вид:

$$P(|\mu - np - z| \le l) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l\sqrt{n/2xx'}} \exp(-t^2)dt + \sqrt{n/2\pi xx'}\, \exp(-l^2n/2xx'). \qquad (8.3)$$

Здесь $p$ – вероятность появления события в единичном бернуллиевом испытании, $q = 1 - p$, μ – количество его появлений в $n$ испытаниях, $z$ не определено, но $|z| < 1$, $x = np + z$, $x' = nq - z$. Лаплас также заметил, что его теорема пригодна для оценки теоретической вероятности по статистическим данным (ср. теорему Бейеса в § 6.2), но его пояснения недостаточны, ср. Тодхантер (1865, с. 554 – 556); неясным представляется и соответствующее описание у Хальда (1990, § 24.6).

Одну из задач Лапласа прежде него решил Д. Бернулли (§ 7.1.1): каждая из двух урн содержит $n$ белых и черных шаров в неизвестных соотношениях, общее количество тех и других одно и то же. Требуется определить вероятность того, что первая урна будет содержать $x$ белых шаров после $r$ циклических перекладок по одному шару из урны в урну. Ту же задачу решили Lagrange (1777/1869, с. 249 – 251), Malfatti (Todhunter 1865, с. 434 – 438) и сам Лаплас (1811).

Лаплас вывел уравнение в частных разностях и, *беспощадно изуродовав* его (Тодхантер 1865, с. 558), перешёл к уравнению в частных производных

$$u'_{r/n} = 2u + 2\mu u'_{\mu} + u''_{\mu\mu}, \quad x = (n + \mu\sqrt{n})/2$$

и выразил его решение в терминах функций, родственных полиномам [Чебышева –] Эрмита (Molina 1930, с. 385). Хальд (1998, с. 339) показал, однако, что критика Тодхантера была ошибочна.

Впоследствии Марков (1915b) несколько обобщил эту задачу, рассмотрев случаи $n \to \infty$ и $r/n \to \infty$ и $r/n$ = Const, Стеклов (1915) доказал существование и единственность решения лапласова дифференциального уравнения с надлежащими начальными условиями, а Hostinský (1932, с. 50) указал на связь этого уравнения с броуновским движением и, следовательно, с появлением случайного процесса (Molina 1936). Историю указанных полиномов описал Hald (2002).

Как и Бернулли, Лаплас заметил, что в пределе, притом даже в случае нескольких урн, числа белых шаров оказываются примерно одними и теми же во всех урнах, а на с. 306 он уточнил, что имел в виду средние количества. Наконец, Лаплас заметил, что этот результат не зависит от первоначального распределения шаров в урнах, а в *Опыте философии* (1814/1999, с. 843) указал, что его вывод остаётся в силе даже, если в процессе перекладок добавить новые урны, опять-таки с любым распределением шаров в них. Он заключил, видимо, слишком оптимистически, что

*можно распространить этот результат на все сочетания в природе, в которых постоянные силы* [...] *устанавливают правильный образ действий, способный вызвать даже из недр хаоса системы, управляемые удивительными законами*.

О предначертании (ср. посвящение Муавром своей книги Ньютону в § 5.3) речи здесь не было. Заметим, что указанный результат (как и полученный ранее Даниилом Бернулли) напоминает давнишнее утверждение о тепловой смерти вселенной.

По существу задача Д. Бернулли – Лапласа совпадает со знаменитой моделью Эренфестов (1907), с которой принято начинать историю случайных процессов, а их результат можно обосновать эргодической теоремой Маркова для марковских цепей, см. также § 7.1.1с.

4) **Гл. 4** *Анал. Теории* мы коснёмся в § 8.2-4. **Гл. 5** Лаплас посвятил выявлению постоянных причин (сил) в природе. Так, он попытался определить значимость суточных вариаций атмосферного давления. К. Пирсон (1978, с. 723) заметил, что более поздние авторы должны были бы применить для этой цели распределение Стьюдента, что некоторые из предпосылок Лапласа оказались неверными и, кроме того, что он безосновательно исключил из рассмотрения те сутки, в течение которых вариация превысила 4 *мм*.

Лаплас указал, что *исчисление вероятностей* может быть применено к медицине и экономике. Возможно, что он имел в виду вероятностное исследование статистических данных, см. его *Опыт* (1814/1999, с. 847 – 848). Затем, продолжал Лаплас, теория вероятностей может *даже* исследовать влияние моральных причин.

Некоторую часть гл. 5 Лаплас посвятил знаменитой задаче Бюффона, см. § 7.1.6, предварительно (с. 365) заметив, что *исчисление вероятностей* можно применять для *спрямления кривых и квадрирования их* [?] *поверхностей*, т.е. для вычисления интегралов. Он не развил своей мысли, но см. нашу гл. 13.

Игла длины $2r$ падает на пучок параллельных прямых, расстояние между которыми $a \geq 2r$ и вероятность $p$ игле пересечь прямую равна, см. формулу (7.3),

$$p = 4r/\pi a.$$

Без доказательства он заявил, что при $a = 1$ оптимальная для определения $\pi$ длина иглы составляет $2r = \pi/4$, хотя в первом издании своей книги он привёл другое значение, $2r = 1$. Тодхантер (1865, с. 590 – 591) и Gridgeman (1960) доказали верность первоначального мнения Лапласа.

5) **В гл. 6** Лаплас решает задачи при помощи бейесовского подхода (см. нашу гл. 6), хотя и без ссылки на Бейеса, которая, правда, имеется в его *Опыте* (1814/1999, с. 862). Вот одна из них. Обозначим неизвестную вероятность новорождённому оказаться мальчиком через $x$, и пусть в течение какого-то времени родилось $p$ мальчиков и $q$ девочек. Тогда вероятность этого *сложного* события будет пропорциональна

$$y = x^p(1 - x)^q \quad (8.4)$$

и если $z(x)$ – априорное распределение $x$, то

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b yzdu \div \int_0^1 yzdv, \; 0 < a < b < 1. \quad (8.5)$$

Если, как все-таки принял Лаплас, $z$ постоянно, то при больших $p$ и $q$ искомая вероятность выразится через интеграл от функции отрицательного квадрата.

Лаплас, стало быть, оценивал вероятность $x$. Для кривой (8.4) точка максимума

$$\alpha = p/(p + q) \quad (8.6)$$

представляется его естественной оценкой, однако E$x$, а точнее ожидание случайной величины с распределением

$$x^p(1-x)^q \div \int_0^1 z^p(1-z)^q dz,$$

не совпадает с (8.6): последняя величина является лишь асимптотически несмещённой оценкой $x$. Соответствующего понятия Лаплас не ввёл, а указанное ожидание очевидно равно

$$\mathrm{E}\xi = \frac{p+1}{p+q+1}. \qquad (8.7)$$

Функции $z(x)$ позволяли исходить из равной вероятности каждого значения $x$, однако вопрос об их выборе оставался открытым.

Далее Лаплас аналогичным образом рассмотрел двумерный случай, затем решил другую задачу о половом составе новорождённых. На протяжении ряда лет неизменно наблюдалось неравенство $p > q$. Какова вероятность, что оно сохранится в течение последующих ста лет? Лаплас, конечно же, представлял себе, что его вопрос имел смысл разве лишь при неизменных социально-экономических условиях существования общества. Вот его ответ:

$$P = \int_0^1 x^p(1-x)^q z^{100} dx \div \int_0^1 x^p(1-x)^q dx,$$

где $z$ – сумма первых $n$ членов разложения $[x + (1-x)]^{2n}$ и $2n = p + q$.

Аналогичная задача при $y = x^m$ и $z = x^n$ привела Лапласа к вероятности осуществления такого $z$:

$$P = (m + 1) \div (m + n + 1).$$

В *Опыте философии* Лаплас (1814/1999, с. 837 лев.) применил эту формулу, несколько отличную от его прежней формулы (8.7), для решения задачи Прайса о вероятности восхода Солнца (см. §

6.1), но упомянул лишь Бюффона и, разумеется, не согласился с его решением.

Эту задачу следует описать подробнее. Напомним (§ 6.1), что некоторые результаты Прайса сомнительны. Fries (1842/1974, с. 7 и 158 (140)) указал, что при $n \to \infty$ вероятность $P$ стремится к нулю, а потому явление, описываемое формулой Лапласа (восход Солнца он не упоминал), никак не оказывается законом природы. Фриз заключил, что из повторных наблюдений и апостериорной вероятности нельзя *угадать* априорную вероятность, что означало почти явное отрицание теоремы Якоба Бернулли.

В связи с указанным обстоятельством он посчитал, что решение задачи Прайса, равно как и лапласово решение задачи Даламбера − Лапласа, см. Прим. 6 к гл. 2, основано на философских (не математических) вероятностях и философской индукции. Наконец, без особого рассмотрения Фриз (с. 157/139) объявил МНКв *полностью субъективным*. Всё это он кратко указал уже в своём Предисловии.

Именно теорема Бернулли даст надлежащий ответ на замечания Фриза. Как фактически заметил Лаплас (1814/1999, с. 837 лев), его формула (пусть по необходимости) подтверждалась принципом недостаточного основания, но ведь с ростом числа наблюдений это предположение следовало уточнять, и сам Лаплас (§ 8.2-1) указал соответствующую рекомендацию. Задачу Прайса весьма основательно рассмотрела Zabell (1989), но Фриза она лишь назвала.

Полиа (1954/1963, Bd. 2, с. 51 и 207 – 208) повторил замечание Фриза о случае $n \to \infty$, но не упомянул его. Он также посчитал, что в случае $m = 0$ и $n = 1$ формула Лапласа ошибочно приводит к $P = 1/2$, с чем мы не согласны и указал действительно нелепый пример её применения: вероятность старику в возрасте 70 лет прожить ещё год равна 71/72. Здесь, правда, следовало бы напомнить мнение Гаусса (конец § 10А). Наконец, Полиа (с. 207 – 208) заявил, что при приложении теории вероятностей к правдоподобным заключениям следует *в принципе избегать количественных значений*, с чем мы снова никак не согласны.

Наконец, в этой же главе 6 Лаплас определил численность населения Франции по выборочным данным и впервые оценил точность (своего варианта) выборочного метода. Пусть $N$ и $n$ – известные ежегодные количества рождений во Франции в целом и в её нескольких районах и $m$ – численность населения в них же. Лаплас естественно принял, что искомая численность населения

$$M = (m/n)N,$$

а погрешность этого определения оценил посредством дроби

$$\int_0^1 x^{N+n}(1-x)^{m-n+M-N}dx \div \int_0^1 x^n(1-x)^{m-n}dx$$

(Hald 1998, с. 288).

Пирсон (1928a) заметил несовершенства в рассуждении Лапласа и уменьшил полученную тем дисперсию в отношении

$$[(N-n)/(N+n)]^{1/2}.$$

Вот его основные замечания. Во-первых, Лаплас посчитал, что $(m, n)$ и $(M, N)$ – независимые выборки из единой бесконечной совокупности, фактически же они не являлись независимыми, а само существование указанной совокупности сомнительно. Во-вторых, Лаплас выбрал для искомой величины явно неподходящее равномерное априорное распределение. Пирсон кроме того отрицательно отозвался о вычислении значений неполной бета-функции, которое Лапласу также пришлось выполнить. Впрочем, он (1934, Введение) признал, что эта задача осталась весьма трудной и тем самым фактически оправдал Лапласа.

Первое замечание Пирсона относилось к вспомогательной урновой задаче Лапласа. Пусть в наших обозначениях в урне находится бесконечное количество белых и черных шаров. После $n$ безвозвратных тиражей вынутыми оказались $m$ белых шаров, вторая же выборка неизвестного объёма $k$ содержала $r$ белых шаров. Полагая, что

$$k = nr/m + z,$$

Лаплас вывел предельную теорему:

$$P(|k - nr/m| < z) = 1 - 2\int \frac{m^3}{\sqrt{\pi A}} \exp(-m^3z^2/A)dz,$$

$$A = 2nr(n-m)(m+r).$$

Пределы интеграла, как он формально принял, были *z* и ∞.

Впоследствии Марков (1900b) доказал, что при неизвестном *m*

$$P\{|\frac{m}{n}-\frac{r}{k}|<\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{k}+\frac{1}{n}}\} > 1 - 1/t^2,\ t > 0.$$

Затем он (1914a) уточнил, что имел в виду равные возможности всех априорных вероятностей появления белого шара и дополнительно доказал, что то же неравенство типа Бьенеме – Чебышева имеет место и при *неопределёнными*, т.е. случайных, *m/n* и *r/k.* Как последний из могикан, Марков решительно отказывался применять новый тогда термин, *случайная величина*, см. § 15.2-1.

6) **В гл. 7** Лаплас рассматривал влияние возможного неравенства вероятностей, которые априорно считаются равными друг другу, на изучаемые явления. Например, при броске монеты вероятность выпадения орла может равняться (1 ± *a*/2) при неизвестном значении *a*. Полагая оба знака равновозможными, Лаплас получил для вероятности выпадения *n* орлов подряд

$$P = 1/2[(1 + a)^n + (1 - a)^n]/2^n,$$

так что при $n > 1$ оказалось, что $P > 1/2^n$.

Пусть теперь в общем случае вероятность равна не *p* (предположенное значение), а $p + z$, $|z| \le a$, и пусть $(p + z)$ имеет плотность φ(*z*). Тогда вероятность *сложного* события *y* будет равна

$$P = \int_{-a}^{a} y(p + z)\varphi(z)dz \div \int_{-a}^{a} \varphi(z)dz$$

(ср. выше формулу (8.5)), а при неизвестной функции φ(*z*) она заменяется плотностью *z*, которую Лаплас назвал вероятностью *z*. И все же появление знаменателя в этой формуле было вряд ли необходимо.

Особое рассуждение этой главы, как и один из примеров гл. 3, можно истолковать на языке цепей Маркова. По сути оно было равносильно утверждению о том, что при бесконечной тасовке колоды карт их всевозможные расположения оказываются равновероятными (Феллер 1950, гл. 15, § 9). Пусть вероятности извлечения билетиков из урны не равны друг другу. Неравенства между ними можно уменьшить, если класть их в урну не по какому-то порядку, а в соответствии с их извлечением из вспомогательной урны, и тем более, если таких урн будет несколько. Лаплас не доказал этого утверждения, но обосновал его общим, быть может слишком общим принципом: случайность убывает, если её подвергнуть действию случайности.

7) **Гл. 8** была посвящена статистике населения, – средним продолжительностям жизни и женитьб, – однако Лаплас не применил здесь никаких новых идей или методов. Он, правда, обобщил предпосылки модели эпидемии оспы, принятые Д. Бернулли (§ 7.2.3) и вывел для неё более общее дифференциальное уравнение (Тодхантер 1865, с. 601 – 602).

8) **В гл. 9** Лаплас рассматривал подсчёты, связанные с пожизненными рентами и впервые ввёл *пуассоново* обобщение теоремы Я. Бернулли (Molina 1930, p. 372). Пусть в каждом из $s$ независимых (как он чётко указал) испытаний противоположные события $A$ и $B$ могут появляться с вероятностями $q_i$ и $p_i$, $q_i + p_i = 1$, $i = 1, 2, ..., s$, и, соответственно, означать выгоду ν и урон μ. При постоянных вероятностях $q$ и $p$ ожидание выгоды после всех испытаний будет равно, как Лаплас напрасно вывел весьма сложным путём, $s(q¬ – p\mu)$. Он затем оценил эту величину при большом $s$ с помощью своей предельной теоремы (8.3). Обобщая, далее, полученный результат на случай переменных вероятностей, Лаплас ввёл характеристическую функцию общей выгоды

$$[p_1 + q_1\exp(\nu_1\omega i)]\ [p_2 + q_2\exp(\nu_2\omega i)]\ ...\ [p_s + q_s\exp(\nu_s\omega i)],$$

использовал формулу обращения и пришёл к нормальному распределению, всё это аналогично выводу распределения линейной функции ошибок наблюдения (§ 8.2-4, но фактически как в прежних мемуарах).

9) В **гл. 10** Лаплас изложил соображения о моральном ожидании (§ 7.1.1). Если реальный капитал игрока составляет $x$, то его моральный капитал окажется равным

$$y = k\ln x + \ln h,\ k, h, x > 0.$$

Пусть $\Delta x$ принимает значения $a, b, c, ...$ с вероятностями $p, q, r, ...$ Тогда

$$E y = k[p \ln(x + a) + q \ln(x + b) + \ldots] + \ln h,$$
$$E\Delta y < E\Delta x. \qquad (8.8)$$

Иначе говоря, даже справедливая игра ($E\Delta x = 0$) невыгодна. Тодхантер (1865, с. 215) доказал неравенство (8.8) проще, чем Лаплас, однако более общее соотношение $Ef(x) \geq f(Ex)$ имеет место для выпуклых функций (Rao 1965, §1e5), так что при $x > 0$

$$E(-\ln x) \geq -\ln Ex, \quad E\ln x \leq \ln Ex < Ex.$$

Лаплас, далее, доказал, что при морских перевозках груз следует распределять поровну на нескольких судах. Докажем это по-своему (Шейнин 1972b/1977, с. 111 – 113). Пусть капитал грузовладельца $a$, стоимость груза $A$, вероятность благополучного рейса $p$ и $q = 1 - p$. Тогда

а) При распределении груза поровну на $n$ судах моральное ожидание капитала грузовладельца (количество погибших судов $k = 0, 1, 2, ..., n$)

$$y(n) = \Sigma C_n^k p^{n-k} q^k \ln[(A/n)(n-k) + a]. \qquad (8.9)$$

b) Вне зависимости от $n$ соответствующее ожидание равно правой части (8.9) с заменой логарифма на его аргумент. При этом, что очевидно,

$$a + A\Sigma\{[(n-k)/n]p^{n-k}q^k\} = a + Ap.$$

c) Моральное ожидание (8.9) ограничено для любой возрастающей функции $f(x)$:

$$y(n) = \Sigma\{C_n^k p^{n-k} q^k f[A(n-k)/n + a]\} <$$
$$f(A + a)(p + q)^n = f(A + a).$$

d) Пусть $f(x)$ непрерывна, возрастает и имеет убывающую производную, тогда $y(n)$ монотонно возрастает с $n$, но ограничено моральным ожиданием (8.9). Доказательство здесь довольно длинное и мы отсылаем читателя к нашей статье (1972b).

В связи с моральным ожиданием и транспортировкой грузов на нескольких суднах Лаплас (1814/1999, с. 854 прав.) высказал весьма обобщённое утверждение:

*Можно рассматривать свободный народ как большую ассоциацию, члены которой взаимно поручились за своё имущество, неся пропорциональные расходы по этому поручительству.*

Многие авторы после Лапласа возвращались к моральному ожиданию (ср. § 7.1.1), а Фурье (1819) и Остроградский, от работы которого сохранилось лишь сообщение Н. И. Фусса 1836 г. (Остроградский 1961b, с. 293 – 294), пытались развить его: Остроградский

*не принял гипотезы Даниила Бернулли. Он выражает моральное удовлетворение некоторой произвольной функцией физического удовлетворения и ему удаётся дать решение главных вопросов, связанных с моральной удачей, с той широтой и с той точностью, какой только можно пожелать.*

Ни Фурье, ни Остроградский не возвратились к этой теме.

10) **В последней 11-й главе** и, частично, в **Дополнении 1 (1816) к *Анал. Теории*** Лаплас привёл свои соображения о вероятности свидетельских показаний. Пусть из урны, в которой находятся 1 000 пронумерованных билетов, вынут, как утверждает свидетель, билет с номером $i$, $1 \le i \le 1\,000$. Свидетель может говорить правду и притом либо ошибаться, либо нет; или лгать – с теми же двумя возможными добавлениями – и Лаплас вычисляет вероятность утверждаемого тем факта на основании заданных вероятностей всех указанных вариантов. В соответствии с одним из сформулированных им следствий, ошибка свидетеля или его ложь оказываются тем вероятнее, чем менее вероятно само по себе объявленное им событие (с. 460).

Затем Лаплас вводит априорную вероятность исследуемого события, которое подтверждали $m$ и опровергали $n$ свидетелей. Если эта вероятность равна 1/2, а вероятность правдивости свидетелей $p$, то, окончательно, вероятность события

$$P = \frac{p^{m-n}}{p^{m-n} + (1-p)^{m-n}}.$$

Пусть теперь вероятности правдивости свидетелей равны $p_i > 1/2$ и априорная вероятность события $1/n$. Если о нем сообщила цепь из $r$ свидетелей, то (с. 466)

$$P = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\frac{(np_1-1)(np_2-1)...(np_r-1)}{(n-1)^r},$$

так что, соответственно, для $n = 2$ и $n \to \infty$

$$P = 1/2 + {}_{1/2}(2p_1 - 1)\ (2p_2 - 1)\ ...\ (2p_r - 1) \text{ и } P = p_1p_2 \ldots p_r.$$

Далее Лаплас исследует вердикты, выносимые $s$ независимыми судьями или присяжными, решение каждого из которых справедливо с вероятностью $p > 1/2$. Вероятность единогласного вердикта равна

$$p^s + (1 - p)^s = i/n,$$

где правая часть известна из статистики ($n$ – общее число вердиктов, из которых $i$ вынесено единогласно). При $s = 3$ (с. 470)

$$p = 1/2 + [(4i - n)/12n]^{1/2}.$$

Если $4i < n$, то, видимо, нарушены (весьма стеснительные) предпосылки Лапласа, однако он такого замечания не делает.

Пусть (в иных обозначениях) вероятность справедливого решения для каждого судьи (присяжного) неизвестна и $p$ судей обвинили, а $q$ судей – оправдали обвиняемого, тогда вероятность справедливого окончательного решения будет равна (с. 527)

$$\int_{1/2}^{1} u^p(1-u)^q du \div \int_{0}^{1} v^p(1-v)^q dv$$

(ср. выше формулы из гл. 6). Предпосылку о независимости судей Лаплас (с. 523) оговорил лишь мимоходом. Пуассон (1837а, с. 4) заметил, что Лаплас считал подсудимого невиновным вплоть до вынесения обвинительного приговора: в его формулы не входила априорная вероятность вины, которая практически должна была, по мнению Пуассона, превышать половину. Это замечание, разумеется, не относилась к конкретному подсудимому. В § 9.9.1 мы вернёмся к приложению теории вероятностей к юриспруденции.

### 8.2. Теория ошибок

Работы Лапласа по теории ошибок естественным образом подразделяются на два этапа. В XVIII в. он как бы примерялся к ней, используя сравнительно новый инструмент, – плотность распределения[3], – и подбирая различные правила для выбора оценки истинных значений измеряемых констант. Полученные им уравнения оказывались слишком сложными, и он ограничивался случаем трёх наблюдений. Позднее он (нестрого) доказал несколько вариантов ЦПТ и смог отказаться от указанного ограничения (приняв, однако, другие предпосылки). Вот чёткое заключение Бьенеме (Bienaymé 1853/1867, с. 161), замеченное Идельсоном (1947, с. 11):

*Лаплас* [...] *сразу же осознал всю важность* [ЦПТ]. [...] *В течение почти сорока лет Лаплас представлял* [...] *мемуары о вероятностях, но* [...] *не хотел объединять их в общую теорию* ... Однако, продолжал Бьенеме, именно эта теорема позволила ему составить свою *Анал. Теорию.*

1) **Год 1774-й.** Лаплас (1774) принял без обоснования, что искомая плотность погрешностей наблюдения $\psi(x)$ при любых $x_1$ и $x_2$ удовлетворяет уравнению

$$\psi'(x_2)/\psi'(x_1) = \psi(x_2)/\psi(x_1)$$

и получил

$$\psi(x) = (m/2)e^{-m|x|}. \qquad (8.10)$$

По поводу подобного рода действий Лаплас (1798 – 1825/1878 − 1882, т. 3, с. xi) позже заявил, что принятые гипотезы следует постоянно совершенствовать в соответствии с новыми наблюдениями пока не постигнешь *истинных причин или по меньшей мере законов явлений*. Ещё раньше аналогичное высказывание появилось в его *Опыте философии* (1814/1999, с. 861). Ср. Double et al (1835, с. 176 – 177): основными средствами для выявления *истины* являются индукция, аналогия и гипотезы, основанные на фактах и *постоянно проверяемые и исправляемые новыми наблюдениями*.

Пусть $p = b – a$, $q = c – b$, где $a$, $b$, $c$ – наблюдения и $a < b < c$. Исходя не из самой плотности, а из [функции правдоподобия]

$$f(x) = \psi(x)\,\psi(p – x)\,\psi(p + q – x), \qquad (8.11)$$

Лаплас определил искомый параметр *e* как [медиану] относительно этой кривой или, иным способом, по условию

$$\int |x - e| f(x) dx = \min; \ |x| < \infty,$$

откуда следовало, что интегралы от функции $f(x)$ в пределах $(-\infty; e]$ и $[e; +\infty)$ равны друг другу и $e$ снова оказалось медианой. Заметим, что функции (8.10) и (8.11) не содержали параметра сдвига. При малых значениях $m$ величина $x = e - a$ ù $(2p + q)/3$, и потому $e$ совпало со средним арифметическим, а функция (8.10) стала

$$\psi(x) = (m/2)\,(1 - m|x|) \approx m/2 = \text{Const},$$

с чем Лаплас не согласился и тем самым отказался от медианы. Для случайной величины с плотностью (8.10) дисперсия равна $2/m^2$, так что малое $m$ действительно неблагоприятно. Eisenhart (1964) заметил, что Pitman (1939) применил функцию типа (8.11) аналогичным образом.

Далее Лаплас исследовал случай неизвестного параметра $m$ на основе принципа обращённой вероятности, т. е. так называемой формулы Бейеса (6.1) с равными априорными вероятностями. Он, однако, ошибся в своих выкладках (Шейнин 1977а, с. 7). Stigler (1986, с. 115 – 116) разъяснил суть его ошибки, но (с. 103) напрасно указал, что *формулу Бейеса* Лаплас не мог заимствовать у своего предшественника так как не читал его мемуара. Верно, не мог, но уже потому, что этой формулы у Бейеса вообще не было.

2) **Год 1781-й.** Лаплас (1781) снова исходит из [функции правдоподобия] вида (8.11), а для отыскания искомого истинного значения предлагает четыре возможных условия: интегралы либо от $f(x)$, либо от $xf(x)$ в пределах $[-N; 0]$ и $[N; 0]$, где $N$ – максимально возможная ошибка, должны быть равны друг другу; либо значение второго интеграла в пределах $[-N; N]$ должно быть минимальным; наконец, в качестве четвёртого он принял условие [наибольшего правдоподобия]. Напомним, однако, что кривая (8.11) не обладала параметром сдвига, и его пришлось бы вводить. Наилучшим, как решил Лаплас, было третье условие, которое, впрочем, совпадало с первым.

Для плотности распределения он получил (не очень убедительно) *средний закон ошибок*

$$y = (1/2a) \ln(a/|x|), |x| \le a. \qquad (8.12)$$

Лаплас, правда, сослался на принцип недостаточного основания и заметил, что функция (8.12) чётная и убывает с ростом $|x|$, т.е. соответствует свойствам "обычных" ошибок, а ограничение $x \ne 0$ его, видимо, не беспокоило.

Далее Лаплас перешёл, если можно так выразиться, к многомерному методу Бейеса. Пусть даны погрешности наблюдения $\varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots n$, *лёгкость появления* которых равна $x_i$. Тогда вероятность полученной системы ошибок будет равна

$$P = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{\int \ldots \int x_1 x_2 \ldots x_n dx_1 dx_2 \ldots dx_n},$$

причём интегралы берутся по всем возможным значениям каждого переменного.

Фактически Лаплас рассматривал более общий случай, при котором каждая погрешность $\varepsilon_i$ появлялась $k_i$ раз. Умножая полученное выражение на произведение всех дифференциалов, Лаплас получил дифференциал $n$-мерного случайного вектора и, при наличии указанной априорной информации, смог бы определить апостериорный закон распределения ошибок наблюдения.

С плотностью (8.12) связано особое исследование Лапласа, а именно, введение дельта-функции Дирака, которая, впрочем, встречалась уже у Эйлера (Truesdell 1984, с. 447, прим. 4, без точной ссылки). Одно из условий, под которым Лаплас отыскивал оценку истинного значения неизвестной константы $x_o$ по наблюдениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$, состояло в том, см. § 8.2-1, что интегралы

$$\int \psi(x - x_1)\, \psi(x - x_2) \ldots \psi(x - x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

в пределах $[-a; x_o]$ и $[x_o; a]$ должны равняться друг другу. Лаплас заметил, но не доказал, что среднее арифметическое может быть получено из закона (8.12) при неограниченном $a$. Он, видимо, имел в виду, что, аналогично указанному им в 1774 г., функция (8.12) становится при этом постоянной. Далее он перешёл к *намного более общей теореме* для плотности ($\alpha \to 0$)

$y = \varphi(\alpha x) = \varphi(-\alpha x) = q$ при $\alpha x = 0$; и $= 0$ в противном случае.

Фактически же он имел в виду последовательность функций $\varphi(\alpha x)$, так что

$$\varphi(\alpha x) = q(\alpha),\ \alpha = \{\alpha_1; \alpha_2; \dots ; \alpha_n; \dots\} \to 0.$$

Если $\alpha x = t$, то

$$\varphi(t) = q \text{ при } t = 0\ (|x| < +\infty);\ \text{и} = 0 \text{ в противном случае } (|x| = +\infty),$$

притом по вероятностным соображениям интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)dt = C\ (= 1).$$

Лаплас не выписал последние равенства, но мы полагаем возможным считать, что он фактически ввёл дельта-функцию Дирака с интерпретацией

$$\varphi(t) = \lim[(\lambda/\sqrt{\pi})\exp(-\lambda^2 t^2)],\ \lambda \to \infty.$$

Указанные равенства Лаплас мог считать записью равномерного распределения ошибок наблюдения со сколь угодно большим (а не произвольно назначаемым) интервалом допустимых значений. Собственно теорема Лапласа состояла в том, что неизвестная константа $x_0$ равнялась среднему арифметическому из результатов наблюдений, но на языке обобщённых функций она, видимо, не может быть доказана: Лапласу пришлось рассматривать интеграл от произведения

$$\varphi[\alpha(x - x_1)]\ \varphi[\alpha(x - x_2)]\ \dots\ \varphi[\alpha(x - x_n)],$$

который на этом языке не определён.

3) **Годы 1810 – 1811.** Лаплас (1810a) рассматривал $n$ [независимых] дискретных и случайных ошибок (или величин), равномерно распределённых на интервале $[-h, h]$. Применив вариант характеристических функций и формулу обращения, он (в современных обозначениях и при $n \to \infty$) крайне небрежно и нестрого доказал (Гнеденко и Шейнин 1978, с. 194 – 195), что

$$\lim P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}{n}\right| \le s\right) = \frac{\sqrt{3}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^s \exp(-x^2/2\sigma^2)dx, \qquad (8.13)$$

где $\sigma^2 = h^2/3$ – дисперсия каждого $\xi_i$.

Далее Лаплас обобщил свой вывод на одинаково и произвольно распределённые величины, обладающие дисперсией. При доказательстве [ЦПТ] он (с. 304) воспользовался интегралом от комплексной функции и заметил, что надеется заинтересовать *геометров* этим нововведением, и таким образом отделил себя от [чистых] математиков, см. также Лаплас (1774/1891, с. 62; 1812/1886, с. 365).

В приложении к этому мемуару Лаплас (1810b), решив, видимо, вслед за Гауссом обратиться к принципу наименьших квадратов, вывел его, не привлекая никаких предположений о среднем арифметическом (ср. § 10А.2), однако ограничился случаем большого числа наблюдений и допустил притом, что и средние из их отдельных групп распределены нормально.

Лаплас (1811) вскоре вернулся к принципу наименьших квадратов. На этот раз он умножил уравнения погрешностей с одним неизвестным

$$a_i x + s_i = \varepsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

($\varepsilon_i$ – не остаточные свободные члены, а погрешности) на неопределённые множители $q_i$ и сложил полученные выражения

$$[aq]x + [sq] = [\varepsilon q],$$

так что искомая оценка оказалась равной

$$x_0 = -[sq]/[aq] + [\varepsilon q]/[aq] \equiv -[sq]/[aq] + m.$$

Далее, молчаливо предполагая, что все множители $q_i$ одного и того же порядка, он нестрого доказал другой вариант локальной ЦПТ

$$P(m = \alpha) = \frac{1}{\sigma_m\sqrt{2\pi}}\exp[-\alpha^2/2\sigma_m^2],\ \sigma_m^2 = k''\frac{[qq]}{[aq]^2},$$

$$k'' = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\psi(x)dx,$$

$\psi(x)$ – чётная плотность распределения ошибок наблюдения, обладающих дисперсией и $n \to \infty$.

Теперь Лаплас определяет множители из условия минимального абсолютного ожидания

$$\int_{-\infty}^{\infty} |z|P(z)dz = \min, \qquad (8.14)$$

которое привело его к равенствам $q_i = \mu a_i$, а затем и к принципу наименьших квадратов (для одного неизвестного)

$$x = [as]/[aa].$$

Наконец, Лаплас обобщает своё изложение на случай двух неизвестных, для чего умножает соответствующие уравнения погрешностей на две группы неопределённых множителей $\{m_i\}$ и $\{n_i\}$[4]. Он получает таким образом двумерное нормальное распределение для независимых компонент и, снова, тот же принцип наименьших квадратов исходя из своего условия минимума абсолютных ожиданий. Случай трёх и более неизвестных исследовал Тодхантер (1865, с. 578 и след.) со ссылкой на Ellis (1849).

Итак, по Лапласу принцип наименьших квадратов по двум причинам существенно зависел от реализации нормального распределения. Во-первых, требовалась ЦПТ; во-вторых, применение его условий типа (8.14) оказалось бы в противном случае исключительно трудным. Неудивительно, что его теория не получила практического распространения, тем более, что она зависела ещё от наличия большого количества наблюдений. Цингер (1862, с. 1) неверно оценил значимость результатов Гаусса и Лапласа: последний будто бы предложил

*строгое* [?] *и беспристрастное исследование; из его анализа видно, что результаты способа наименьших квадратов получают более или менее значительную вероятность только при условии большого числа наблюдений; между тем как Гаусс старался на основании посторонних соображений придать этому способу безусловное значение* [ничего подобного]. *Если мы* *обратим внимание на то, что в законе больших чисел заключается вся сущность Теории случаев и что только при большом числе испытаний получают действительное фактическое значение все свойства случайных явлений, то не трудно будет видеть справедливости лапласова вывода; при ограниченном же числе наблюдений мы вовсе не можем рассчитывать на взаимное уничтожение погрешностей и* [...] *всякое сочетание наблюдений может* [...] *повести столько же к увеличению погрешностей, сколько и к ослаблению их*.

О Гауссе см. гл. 10. Цингер смешал воедино оба гауссова обоснования МНКв, притом практика требовала обработки конечного (иногда небольшого) числа наблюдений, а не предельных теорем. Пренебрежительное отношение Цингера к Гауссу объяснялось невниманием к его мемуарам, см. также §§ 11.8.5 и 14.2-7. Частично оно было вызвано, прямо скажем, несправедливым отношением Гаусса к Лежандру (§ 10А.1-4) и, соответственно, (антинаучным) игнорированием Гаусса французскими математиками, и частично их слепым следованием Лапласу.

4) **В гл. 4 *Анал. Теории*** Лаплас (1812) нестрого доказал ЦПТ для сумм и сумм абсолютных значений независимых, одинаково распределённых и ограниченных по величине ошибок, а также для суммы их квадратов и для их линейных функций. Все это [почти] содержалось в его прежних мемуарах. В 1811 г. он, правда, доказал только локальную теорему для линейной функции погрешностей. В § 23 Лаплас сформулировал свою цель: исследовать средний результат *большого числа ещё не сделанных наблюдений* ... Здесь, видимо, впервые было непосредственно сформулировано утверждение, относящееся к генеральным совокупностям.

5) **В *Дополнении 1* к *Анал. теории*** Лаплас (1816) рассматривал уравнения погрешностей с двумя (например) неизвестными

$$a_i x + b_i y + l_i = v_i, \; i = 1, 2, ..., s.$$

Пусть $\Delta x$ и $\Delta y$ будут погрешности оценок неизвестных, полученных по МНКв; обозначим также чётную плотность ошибок наблюдений через $\varphi(u/n)$ с $|u| \le n$, моменты – буквой $k$ с соответствующими индексами и $\xi = \Delta x\sqrt{s}$, $\eta = \Delta y\sqrt{s}$, и введём

$$\beta^2 = \frac{k}{kk_4 - 2k_2^{\ 2}},\ Q^2 = \sum_{i=1}^{s} (a_i\xi + b_i\eta)^2 \text{ и } t = \frac{[vv]}{\sqrt{s}} - \frac{2k_2 n^2\sqrt{s}}{k}.$$

Лаплас вычислил

$$P(\xi;\ \eta) \sim \exp\{-\ Q^2(2[vv] - 2t\sqrt{s})\},$$
$$P(t) \sim \exp\{-\ (\beta^2/4n^4)\ [t + (Q^2/s\sqrt{s})]^2\}$$

и таким образом получилось, что $P(\xi;\ \eta;\ t)$, которое он также вычислил, показало, что $t$ не зависело от $\xi;\ \eta$; или, что выборочная дисперсия оказалась независимой от оценок неизвестных. Напомним, что распределение ошибок наблюдений было принято чётным, – и нормальным в пределе, доказательство см. Meadowcroft (1920).

Лаплас также рассмотрел не чётные распределения и в таких случаях рекомендовал принимать условие равенства нулю суммы $v_i$. Поскольку $[av] = 0$ является первым нормальным уравнением, записанным в иной форме, это условие выполняется при $a_i$ = Const или $b_i$ = Const, в противном же случае оно представляет собой дополнительное нормальное уравнение, соответствующее фиктивному неизвестному, – средней систематической ошибке наблюдений.

Наконец, Лаплас вывел формулу для оценки точности. Без объяснения (которое появилось на с. 571 *Дополнения 2*) он аппроксимировал сумму квадратов истинных ошибок такой же суммой остаточных свободных членов и получил оценку дисперсии в виде

$$m = \sqrt{[vv]/s}.$$

Не называя никого, Гаусс (1823b, §§ 37 – 38) заметил, что эта формула недостаточно хороша, см. § 10А.4-6. Интересно, что Лаплас (1814/1999, с. 844) заявил, что

*Вес среднего результата растёт вместе с числом наблюдений, делённым* [*divisé*] *на число* [неизвестных] *элементов*.

6) **В *Дополнении 2* к *Анал. теории*** Лаплас (1818) принял [нормальный закон] уже в качестве распределения ошибок наблюдения, а не только для средних, поскольку новые “повторительные” теодолиты сделали возможным уравнивание порядка влияния двух основных погрешностей измерений в

триангуляции. Вряд ли, однако, можно считать это пояснение достаточным. Нормально распределённой оказалась, следовательно, и ошибка в сумме углов треугольника, т. е. его *невязка*. Итак, пусть случайная погрешность угла распределена нормально с мерой точности $h$ (= $1/2\sigma^2$), тогда невязка треугольника имеет плотность распределения

$$\varphi(x) = \sqrt{h/3\pi}\,\exp(-\,hx^2/3)$$

и, как доказал Лаплас, молчаливо принимая, что $h$ – случайная величина,

$$\mathrm{E}h = 3n/2\theta^2,\ \psi(x) = h^{n/2}\exp(-\,h\theta^2/3), –$$

её ожидание и плотность распределения, а $\theta^2$ – сумма квадратов невязок в цепи из $n$ треугольников триангуляции. Он вычислил вероятность совместной реализации погрешностей углов треугольника и заключил, что целесообразно распределять невязку поровну между углами. К такому же выводу приводит и МНКв, притом вне зависимости от нормального закона. Впрочем, при уравнивании цепи триангуляции, проложенной между двумя базисами и *азимутами Лапласа*, требуется дополнительно учитывать два условия, – базисное и азимутальное; предварительное уравнивание невязок треугольника возможно, но не обязательно.

Итак, пусть погрешности наблюдений имеют плотность распределения

$$\varphi(x) = \sqrt{h/\pi}\,\exp(-\,hx^2).$$

Обозначим невязку треугольника $i$ через $T_i$ и предположим, что погрешности углов треугольника $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$ уже удовлетворяют условию

$$\alpha_i + \beta_i + \gamma_i = T_i.$$

Лаплас вывел соотношения

$$P(\alpha_i;\, T_i) \sim \sqrt{h/3\pi}\,\exp[-\,(h/3)T_i^2],$$
$$P(T_1;\, T_2;\, \dots\, T_n) \sim (\sqrt{h/3\pi}\,)^{n/2}\,\exp\{-\,(h/3)[TT]\},$$

$$P(h) = \frac{h^{n/2}e^{-(h/3)[TT]}}{\int\limits_0^\infty h^{n/2}e^{-(h/3)[TT]}dh}, \ \mathrm{E}h = \int\limits_0^\infty hP(h)dh = \frac{3n+2}{2[TT]} \approx \frac{3n}{2[TT]}.$$

Погрешность приближения в последнем равенстве легко оценить: в *Дополнении 3* Лаплас принял $n_1 = 26$ и $n_2 = 107$. Наконец, предполагая, что $h = \mathrm{E}h$,

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{2h}} = \sqrt{\frac{[TT]}{3n}}, –$$

неплохой результат (улучшенный указанным приближением!).

Далее Лаплас исследует уравнивание по МНКв для случая одного неизвестного и [нормально] распределённых ошибок наблюдения. Интересно, что он не указал, что распределение остаточных свободных членов также нормально, т. е. что это распределение [устойчиво].

В том же *Дополнении* Лаплас обратился к методу Бошковича уравнивания градусных измерений (§ 7.3.2). Мы теперь запишем соответствующие исходные уравнения в виде

$$p_iy - a_i + x_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ p_i > 0, \ a_1/p_1 > a_2/p_2 > \ldots > a_n/p_n,$$

где второе неизвестное уже исключено, а $x_i$ – остаточные свободные члены. Условия Бошковича приводят (точнее, его второе условие приводит) к

$$y = a_r/p_r,$$

с погрешностью $-x_r/p_r$, т.е. к вычислению этого неизвестного из одного лишь уравнения, которое определяется по неравенствам

$$p_1 + p_2 + ... + p_{r-1} < p_r + p_{r+1} + \ldots + p_n,$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r > p_{r+1} + p_{r+2} + \ldots + p_n.$$

Иначе говоря, эти неравенства привели к выборочной медиане из дробей $a_i/p_i$. Пусть погрешности наблюдений обладают чётным распределением $\varphi(x)$ и

$$k'' = \int_0^\infty x^2\varphi(x)dx.$$

Тогда, как показал Лаплас, отказавшись здесь от абсолютного ожидания как от меры погрешности и основываясь на соответствующих дисперсиях[5], метод Бошковича предпочтительнее МНКв если и только если

$$4\varphi^2(0) > (1/2k'').$$

По Колмогорову (1931), медиана предпочтительнее среднего арифметического если

$$1/[2\sigma\varphi(m)] < 1,\ \sigma^2 = 2k'',$$

где $m$ – медиана генеральной совокупности.

При переводе *Небесной механики* Лапласа (1798 – 1825, т. 2, § 40, прим.) на английский язык, Боудитч заметил:

*Метод наименьших квадратов в применении к системе наблюдений, в которой одна из крайних ошибок очень велика, обычно не обеспечивает столь правильный результат как метод,* […] *предложенный Бошковичем.* [...] *Причина состоит в том, что в первом методе эта крайняя ошибка* [как всякая иная] *влияет на результат пропорционально своему квадрату, тогда как в другом методе – пропорционально первой степени*.

Иными словами, устойчивость метода Бошковича объясняется его связью с медианой.

7) **В *Дополнении 3* к *Анал. теории*** Лаплас (прим. 1819) оценивает цепь триангуляции (Перпиньян – Форментера) из 26 треугольников, которая составляла часть намного более длинной цепи из 107 треугольников. Для того же нормального распределения он получил

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi(x)dx,\ \varepsilon' = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx,\ \varepsilon' = \pi\varepsilon^2/2.$$

Эмпирическое значение ε для более длинной цепи равнялось

$$\frac{1}{107}(|T_1| + |T_2| + ... + |T_{107}|) = 1{,}62 \text{ так что } \frac{1{,}62^2}{2\pi} = 4{,}13.$$

$[TT]_1 = 4{,}13 \cdot 26 = 107{,}8$; эмпирическое значение, $\frac{26}{107}[TT]_2 = 108{,}8$.

Это вычисление показывает, во-первых, что Лаплас предпочл оценивать $[TT]_1$ по $[TT]_2$, а не использовать его действительное значение, что сомнительно, так как условия наблюдения вполне могли быть отличными друг от друга. Во-вторых, Лаплас тем самым качественно проверил реализацию нормального закона.

Далее Лаплас рассмотрел уравнивание уравнений

$$p_i x = a_i + m_i \alpha_i + n_i \beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

с одним неизвестным, *x*, и независимыми (указано им позднее (1827/1904, с. 349)) погрешностями $\alpha_i$ и $\beta_i$, распределёнными [нормально] с различными мерами точности. Он пояснил свои вычисления ссылкой на свои с. 601 – 603 (что не помогает), но по крайней мере он заключил, что погрешность неизвестного *x* распределена нормально, так что он знал, что нормальное распределение [устойчиво]. Впрочем, дисперсия полученного закона зависела от применения МНКв и потому только что полученный результат не был достаточно общим.

Также в 1827 г. Лаплас (с. 343) заметил, что МНКв является частным случаем *наиболее выгодного* метода уравнивания (основанного на минимальном ожидаемом значении абсолютной ошибки и на реализации нормального распределения). До 1823 г. он был бы частично прав, но после появления второго гауссова обоснования МНКв утверждение Лапласа оказалось неверным.

8) В Прим. 4 мы отметили, что Лаплас успешно справился со случаем зависимости между случайными величинами. Но в 1827 г. он, однако, каким-то образом ошибся при исследовании атмосферных приливов, происходящих под воздействием Луны. Среднесуточная вариация атмосферного давления в Париже по наблюдениям за 11 лет оказалась равной 0,763 *мм*, та же величина за февраль – апрель тех же лет, – 0,940 *мм*. Пытаясь выяснить, существенно ли указанное расхождение, Лаплас не отметил зависимости между ними[6]. В том же мемуаре Лаплас снова ошибся, решая уравнения с неизвестными силой воздействия Луны и временем суток максимального прилива: он не заметил, что свободные члены уравнений были зависимы. Не

обосновывая своего замечания, Пирсон (1914 – 1930, т. 3А, с. 1) отметил, что *Кондорсе часто и Лаплас иногда ошибался, потому что идея корреляции была им чужда*. Аналогичное замечание, снова без уточнения, мы находим в другом его сочинении (1978, с. 658). Там же, на с. 671, он добавил, что Лаплас *редко был хорошим сборщиком статистических данных или надёжным советчиком при их обработке*. Пирсон сгустил краски: на уровне науки своего времени и исходя из результатов наблюдений, Лаплас доказал длительную устойчивость Солнечной системы и завершил объяснение движения её тел на основе закона всемирного тяготения.

## 8.3. Философские взгляды

Общеизвестно высказывание Лапласа (1814/1999, с. 835) о том, что для всеведущего ума, способного на любые вычисления, случайности не существовало бы и *будущее, как и прошлое, предстало бы перед его взором*. В наши дни это утверждение устарело (см. описание хаотичности в § 2.2.4), но к нему следует добавить и другие соображения.

a) Такого ума не существует, нет также и всеобъемлющих теорий незначительных явлений, о чем Лаплас не мог не знать. Он, стало быть, фактически признавал случайность (Дорфман 1974, с. 265).

b) Дополнение: существуют неустойчивые движения, чувствительные к небольшим изменениям начальных условий, ср. § 12.2-9.

c) “Лапласов детерминизм” был свойственен и предшествовавшим учёным, – Мопертюи (Maupertuis 1756a/1768, с. 300) и Бошковичу (1758, §385). Оба они упомянули вычисления прошлого и будущего (*до бесконечности в каждом направлении*, как утверждал Бошкович), но, ввиду очевидных препятствий, см. выше пункт a), оба отрицали такую возможность.

В *Опыте философии* Лаплас (1814/1999, с. 842) дополнил своё высказывание примерами “статистического детерминизма”, – устойчивостью доходов от лотерей и относительного числа писем, отправляемых без указания адреса, и объяснил её действием ЗБЧ (правильнее: в то время его ещё малоизвестной пуассоновой формой, см. § 8.1-8). Участие в лотерее зависит лишь от свободной воли человека, ср. аналогичное утверждение Кетле (§ 11.5) и мнение Петти (§ 3.1.1)[7].

Уже в своих ранних мемуарах Лаплас (например, 1776/1891, с.

144 – 145), как и многие другие учёные, см. Прим. 2 в гл. 2, не признавал случая, объясняя его либо незнанием соответствующих причин, либо сложностью изучаемого явления и несовершенством математического анализа. Он даже заявил, что теория вероятностей, оценивающая степени правдоподобия явлений, обязана своим появлением слабости человеческого ума и аналогичное утверждение см. в *Опыте* (1814/1999, с. 835). Тем самым эта теория оказывалась для него прикладной математической дисциплиной, обслуживающей естествознание[8] и уже по этой причине он не выделил из неё математическую статистику, хотя и заметил появление в ней *нового жанра задач* (1774/1891, с. 56) и даже её *новой ветви* (1781/1893, с. 383)[9]. Наконец, Лаплас не оставил формального пояснения диалектики случайного и необходимого.

## 8.4. Выводы

Лаплас собрал воедино свои предшествующие работы, но не объединил их должным образом. Он не заботился о единообразии решения однотипных задач (а его *Опыт философии* не был образцом популярной литературы, см. Прим. 1). Далее. Многие авторы указывали, что Лаплас излагал свои соображения слишком сжато. Вот, к примеру, свидетельство Боудитча (Тодхантер 1865, с. 478), переводчика *Небесной механики* на английский язык:

*Всякий раз, когда я вижу* [у него] *слова таким образом, очевидно, что, я знаю, что только часы и может быть дни тяжёлого труда позволят мне понять каким образом это очевидно.*

Это мнение вполне можно отнести и к *Анал. Теории.*

Лапласово определение вероятности (введённое ещё Муавром, § 5.3), было, конечно же, неудовлетворительным, но ничего лучшего так и не появилось вплоть до разработки аксиоматической теории (или, если угодно, до частотной теории Мизеса). Вот соответствующее утверждение Камке (Kamke 1933, с. 14): В 1910 г. в Гёттингенском университете было в ходу изречение: математическая вероятность это число, лежащее между 0 и 1, *про которое больше ничего не известно*. Аналогичные мысли высказали Мизес в 1919 г., Кейнс в 1921 г. и П. Леви (который родился в 1886 г.) в годы своей юности (Крамер 1976/1979, § 2.1), равно как и Марков (§ 15.1-5). Но самым интересным можно назвать свидетельство Дуба (Doob

1989), заметку которого следовало бы полностью воспроизвести. Вот, во всяком случае, его основное утверждение: в 1946 г.

*Для большинства математиков математическая вероятность относилась к математике так же, как чёрный рынок к маркетингу; путаница между вероятностью и явлениями, к которым она прилагается,* [...] *все ещё досаждает этой дисциплине; долгие годы* [значение монографии Колмогорова] *не признавалось, и некоторые математики насмешливо заявляли, что* [...] *вероятность, возможно, нуждается в строгости, но никак не в трупном окоченении* [*needed rigor but surely not rigor mortis*]. [...] *Роль теории меры в теории вероятностей* [...] *все ещё смущает тех, кто любит думать, что математическая вероятность не является частью анализа.*

Все это означает, что Лаплас оправдан.

В то же время Лаплас ввёл в теорию вероятностей дифференциальные уравнения в частных производных и, фактически, случайные процессы, нестрого доказал несколько вариантов ЦПТ с применением характеристических функций и формулы обращения и на этом фундаменте построил свой вариант теории ошибок. Эта теория, однако, была практически неудачна, ибо требовала большого числа наблюдений и существенно зависела от реализации нормального распределения. В области ещё не оформленной математической статистики Лаплас исследовал статистическую значимость наблюдений, ввёл метод статистических испытаний, исследовал свой вариант выборочного метода и расширил применимость бейесовского подхода к статистическим задачам.

Лаплас не относил себя к чистым математикам, однако он владел формулой Дирихле (даже в обобщённой форме), ввёл дельта-функцию Дирака и интегралы от комплексных функций. Он также указал (задолго до введения усиленного ЗБЧ), что предел в теории вероятностей понимается не так, как в анализе. Molina (1930, с. 386) процитировал в оригинале его мемуар (Laplace 1786/1894, с. 308), в котором автор противопоставил (хотя и не вполне чётко) *приближения* (approximations), допускаемые в теории вероятностей, с уверенностью [в выполнении соответствующих неравенств], которая имеет место в анализе.

Вот обобщающее мнение Фурье (Fourier 1829, с. 375 – 376) из *Похвального слова* о Лапласе, в котором ничего не было сказано о грубой ошибке Лапласа, см. ниже:

*Мы не можем утверждать, что он был предназначен, чтобы создать совершенно новую науку, как Галилей или Архимед; чтобы привнести оригинальные принципы, охватывающие громадную сферу, в математические учения, как это сделали Декарт, Ньютон и Лейбниц; или, чтобы первым перенестись в небо и обобщить земную динамику Галилея на всю вселенную, как Ньютон. Но он был рождён, чтобы всё усовершенствовать и исчерпать, чтобы отодвинуть все пределы и решить всё то, что казалось невозможным. Он завершил бы науку о небе, будь это возможным*.

В заключение мы полагаем необходимым всё-таки привести критические замечания о Лапласе.

**1.** Даже на интуитивном уровне он не ввёл понятия "случайная величина" и поэтому не смог изучать плотности или характеристические функции как математические объекты. Его теория вероятностей оставалась прикладной математической дисциплиной и не могла быть усовершенствована. Уровень её абстракции был недостаточен, и её пришлось создавать заново. Уместно заметить, что Максвелл лишь дважды сослался на Лапласа, см. Шейнин (1985, с. 364 и 366, прим.) и наш § 11.8.5, а Больцман вообще не упомянул его ни разу.

**2.** Он ошибся при исследовании задачи Бюффона (§ 8.1-4).

**3.** Он принял неподходящую модель при подсчёте населения Франции (там же). Более того: его окончательный результат был плохо понятен, и Пуассон (1812) неверно истолковал его.

**4.** Там же Лаплас безоговорочно предсказал вероятность некоторого демографического соотношения на сто лет вперёд.

**5.** Он ошибся при обсуждении обработки наблюдений (§ 8.2-1).

**6.** Вот поверхностное утверждение Лапласа (1814/1995, с. 852 прав) о таблицах смертности: *Берут из гражданских актов большое число людей, рождение и смерть которых указаны* и т. д. Но как оценить надёжность исходных данных, отделить искажения и учесть особые обстоятельства?

**7.** В идеале Лаплас должен был бы признать, что его вариант теории ошибок практически малопригоден и признать совершенство результатов Гаусса. Ничего подобного не произошло, и даже Чебышев (§ 14.1-4), переходя к доказательству ЦПТ, указал, что эта теорема приводит к МНКв!

**8.** Повторяя Канта (и Кеплера), Лаплас (1796/1982, с. 328) заявил, что эксцентриситеты планетных орбит вызваны разностью температур и давлений в различных регионах этих планет. В последний раз указанная книга была переиздана при жизни Лапласа в 1813 г., так что вплоть до этого года Лаплас не знал, что, по Ньютону, этот эксцентриситет зависит от скорости обращения планеты около Солнца. Подробно об этом см. Шейнин (2011, с. 43).

## Примечания

**1.** *Опыт философии* выдержал ряд изданий и был переведён на многие языки (русский перевод 1908 г., перепечатан в 1999 г.). Он привлёк внимание общественности к теории вероятностей, однако полное отсутствие в нем математических формул затрудняло чтение. Появление литературно-совершенных, но поверхностных книг Кетле (§ 11.5) отрицательно сказалось на судьбе этого сочинения.

**2.** Более простой вывод её уравнения см. Тодхантер (1865, с. 545 – 546).

**3.** Лаплас называл её по-разному и в своей *Анал. теории* остановился на термине *закон вероятностей* (или *ошибок*).

**4.** Величины $[\varepsilon m]$ и $[\varepsilon n]$, появляющиеся здесь, не являлись независимыми. Не отметив этого, Лаплас все же верно решил поставленную им задачу.

**5.** И в следующем, третьем *Дополнении* к *Анал. теории* Лаплас (примерно 1819) снова обратился к дисперсии как к основной мере точности наблюдений.

**6**. Удержание тысячных долей миллиметра было, конечно же, данью традиции, которой придерживался и Гаусс (1828a, §§ 23 – 25), и даже Фишер (*Science*, vol. 84, 1936, с. 289 – 290).

**7**. Кант (Kant 1763/1912, с. 111) указал на постоянство относительного числа женитьб, которые, разумеется, зависят от свободной воли.

**8.** Ср. § 1.1. Темы, описанные Лапласом в *Изложении системы мира* (1796), не требовали вероятностных соображений, однако он безусловно пользовался ими, например, в *Небесной механике* (1798 – 1825), не говоря уже об обработке наблюдений, и его детерминизм нисколько ему в этом не помешал. В другом месте Лаплас (1812/1886, с. 361) указал, что некоторая величина, хотя и подсказанная наблюдениями, пренебрегалась *большинством астрономов*, он же доказал её высокую вероятность (и успешно обосновал её существование). Соответствующих вычислений Лаплас, к сожалению, не привёл. Так, в принципе, неизбежное неведение некоторого случайного события становится познаваемой регулярностью.

**9.** Это последнее выражение употребил Лагранж в письме 13.1.1775 Лапласу, см. т. 14 его собрания сочинений (*Oeuvres*) 1892 г., с. 58. Индуктивные вероятностные выводы встречались ещё в Талмуде (§ 2.1.2), а сочинение Арбутнота (§ 3.2.4) и многих других авторов до Лапласа (особо Бейеса) мы сегодня по крайней мере частично отнесли бы к математической статистике.

# 9. Пуассон

Публикации Пуассона по теории вероятностей начались в 1811 г. с рефератов двух ранних мемуаров Лапласа, а в 1812 г. появился его реферат лапласовой *Аналитической теории*. Особого интереса они не представляли, но кто мог бы тогда превзойти Пуассона? Разве лишь Фурье.

Bru (1981; 2013) описал французское математическое сообщество при жизни Пуассона и его многолетнее руководящее положение там, равно как и описал большую часть математических исследований Пуассона.

Как и Лаплас, Пуассон опубликовал ряд мемуаров по теории вероятностей и обобщил их в своей монографии (1837a). Её название, *Исследование вероятности приговоров в уголовных и гражданских делах*, не соответствовало содержанию; лишь подзаголовок добавлял: *Предваряемые общими правилами исчисления вероятностей*. Мы будем описывать и это сочинение, указывая лишь соответствующие страницы, и другие работы Пуассона. Вначале, однако, мы процитируем его утверждение (с. 1) о месте теории вероятностей в математике и опишем содержание *Элементов исчисления вероятностей и социальной арифметики*, сформулированное им в *Программах* (*Programmes* 1837, с. 26). Итак, теория вероятностей стала *одной из основных ветвей математики и по числу и пользе её приложений, и по роду анализа, которому она дала начало*.

Программы упомянули:

**1)** Темы самой теории вероятностей (общие принципы, теорема Бернулли, вероятности будущих событий, выведенные из вероятностей аналогичных предыдущих событий).

**2)** Таблицы смертности, среднюю продолжительность жизни, оспу, вариоляцию и оспопрививание. Здесь же и ожидание.

**3)** Институты, зависящие от вероятностей событий (пожизненные ренты, страхование, займы).

**4)** Средние значения большого числа наблюдений.

Вскоре забытый термин *социальная арифметика* (см. также ниже, в § 9.9) таким образом относился к статистике населения и медицинской статистике; сейчас мы бы, пожалуй, сказали *социальная статистика*.

## 9.1. Субъективная вероятность

Целью *исчисления вероятностей* Пуассон (§ 14, с. 35 – 36) объявил определение отношения благоприятных случаев ко всем возможным случаям в любых сомнительных *вопросах*; а его принципы, добавил он, следует считать *необходимым дополнением логики*. Пуассон полагал вероятность субъективной характеристикой, зависящей от знания, объективным же он признавал шанс (§ 1, с. 30 – 31)[1]. Ещё Лейбниц (§ 3.1.1), а впоследствии De Morgan (1847), затем и Буль (см. Boole 1952), пытались обосновать теорию вероятностей элементами математической логики, см. также Halperin (1988).

Указанное Пуассоном различие между шансом и вероятностью (которое признавал и Курно, см. § 11.3), ныне забыто, хотя сам он старался придерживаться его. Так, он (§ 11, с. 47) показал, что субъективная вероятность извлечения белого шара из урны с неизвестным соотношением белых и черных шаров равна 1/2, что соответствует *полному недоумению*, – и представлениям теории информации. Заметим, что Давидов (1854, с. 66), хорошо знакомый с иностранной литературой, заявил, что

*Смутные идеи о вероятности и неточное различие субъективной и объективной вероятностей, − одно из главных препятствий быстрому развитию практической медицины*.

## 9.2. Два новых понятия

Пуассон (1829, § 1) ввёл функцию распределения дискретной случайной величины в виде

$$F(x) = P(\xi < x),$$

а плотность он определил (там же) как производную от $F(x)$. Позднее Пуассон (1837b, с. 63 и 80) аналогичным образом ввёл функцию распределения для непрерывных случайных величин. Давидов (1885) и Ляпунов (1900/1954, с. 132) обратили внимание на это нововведение, но широкое применение функции распределения получили лишь в XX в.

Также первым Пуассон (§§ 52 − 53, с. 140 – 141) ввёл понятие дискретной случайной величины, хотя и назвал её каким-то временным термином *вещь A* (chose A)[2]. Затем он (§ 97, с. 254) рассмотрел случайную величину, значения которой кратны некоторому $\omega$, принял, что $\omega \to 0$ и тем самым перешёл в духе своего времени к непрерывной величине[3]. Новым по сравнению с Симпсоном, который исследовал случайные ошибки наблюдения

(§ 7.3.1), было эвристическое определение случайной величины и её более широкое понимание (не связанное с теорией ошибок).

### 9.3. Предельная теорема Муавра – Лапласа

Пуассон (1837а, § 73, с. 189) предложил свой собственный вывод этой теоремы. Он исходил из вероятности появления противоположных событий $A$ и $B$ не менее чем $m$ раз (не более чем $n$ раз) в $\mu = m + n$ бернуллиевых испытаниях

$$P = pm\{1 + mq + \frac{m(m+1)}{2!}q^2 + \ldots + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!}q^n\} = \qquad (9.1)$$

$$\int_a^\infty Xdx \div \int_0^\infty Xdx,\ X = \frac{x^n}{(1+x)^{\mu+1}}, \qquad (9.2)$$

где $p$ и $q$ – вероятности появления указанных событий в единичном испытании, $p + q = 1$. Результаты Пуассона, впрочем, сводились к формуле (8.3), см. Шейнин (1978с, с. 253 – 254). Формула (9.1) была известна Монмору (1708/1713, с. 244), см. также Тодхантер (1865, с. 9), а формула (9.2) – Лапласу (1812, гл. 6).

Из формулы (9.1) Пуассон (§ 81, с. 206) получил для малого $q$

$$P \approx e^{-\omega}(1 + \omega + \omega^2/2! + \ldots + \omega^n/n!), \qquad (9.3)$$

где принято $mq \approx$ «$q = \mu$, но не было у него выражения

$$P(\xi = m) = e^{-\omega}\omega^m/m!.$$

#### 9.4. Выборки без возвращения

Пуассон (1837а, § 90, с. 231 – 234) исследовал выборки без возвращения из урны, содержавшей $a$ белых и $b$ черных шаров ($a + b = c$) и применил свои результаты к оценке модели избирательной системы Франции. Пусть выборка состоит из $m$ белых и $n$ черных шаров ($m + n = s$). Её вероятность, как заметил Пуассон, выражается [гипергеометрическим распределением]. Полагая $a$ и $b$ большими по сравнению с выборкой, он определил приближённое значение этой вероятности при условии

$$n > m. \tag{9.4}$$

Пусть теперь проводится серия из $k$ подобных выборок, одна за другой, тогда

$$s_1 + s_2 + ... + s_k = c.$$

Вычислив вероятность выполнения условия (9.4) $j$ раз из $k$, Пуассон заключил, что даже при небольшом преобладании $b$ над $a$ число $j$ оказывается как бы чересчур большим.

Если $k = 459$, т. е. равно числу избирательных округов, то $c \approx$ 200 000 и равно числу избирателей (менее 1% населения!). Пусть, далее, каждый избиратель состоит в одной из двух партий, численности которых относятся друг к другу как 90,5:100 и члены партий случайно распределены по округам. Тогда, заключил Пуассон, оговорившись, правда, что его модель упрощена, вероятность избрания депутата меньшинства весьма мала.

Выборки без возвращения Пуассон (1825 – 1826) исследовал и ранее в связи с одной распространённой карточной игрой. Карты извлекаются одна за другой из шести перетасованных вместе колод до тех пор, пока сумма очков в выборке не окажется в интервале [31; 40]; затем следует подобная же выборка из оставшихся карт и требуется определить вероятность равенства этих сумм. Вот его решение (Шейнин 1978с, с. 290 – 292; Гнеденко и Шейнин 1978, с. 204 − 205).

В урне находятся $x_1$ шариков с номером 1, $x_2$ шариков с номером 2, …, $x_i$ с номером $i$ ($x_1 + x_2 + … + x_i = s$). Какова вероятность извлечения без возврата $a_1, a_2, …, a_i$ этих номеров ($a_1 + a_2 + … + a_i = n$), если

$$a_1 + 2a_2 + … + ia_i = x? \tag{9.5}$$

Не учитывая этого условия, Пуассон получил

$$P = \frac{n!(s-n)!}{s!}\frac{x_1!}{a_1!(x_1-a_1)!}\frac{x_2!}{a_2!(x_2-a_2)!}...\frac{x_i!}{a_i!(x_i-a_i)!} =$$

$$(s + 1)\int_0^1 (1-y)^s Ydy,$$

$$Y = \frac{x_1!}{a_1!(x_1 - a_1)!}\left[\frac{y}{1-y}\right]^{a_1} \frac{x_2!}{a_2!(x_2 - a_2)!}\left[\frac{y}{1-y}\right]^{a_2} \ldots \times$$

$$\frac{x_i!}{a_i!(x_i - a_i)!}\left[\frac{y}{1-y}\right]^{a_i}.$$

При $i = 2$ система полученных вероятностей определяет гипергеометрическое распределение. Для учёта условия (9.5) Пуассон заменил $Y$ суммой его значений, соответствующих таким наборам $\{a_1; a_2; \ldots; a_i\}$, для которых оно выполнено.

Введя производящую функцию

$$(1 + \frac{yt}{1-y})^{x_1}(1 + \frac{yt^2}{1-y})^{x_2} \ldots (1 + \frac{yt^i}{1-y})^{x_i},$$

Пуассон заметил, что искомая вероятность равна коэффициенту при $t$ в

$$(s + 1)\int_0^1 (1 - y + yt)^{x_1}(1 - y + yt^2)^{x_2} \ldots (1 - y + yt^i)^{x_i}\, dy.$$

Далее Пуассон ввёл вторую выборку извлечённых шариков $\{b_1; b_2; \ldots; b_i\}$ и определил вероятность совместного осуществления условия (9.5) и ограничения

$$b_1 + 2b_2 + \ldots + ib_i = z$$

при помощи двумерной производящей функции, см. также § 9.5. Лишь позже, при решении задачи о выборах (см. выше), Пуассон заметил, что результат второй серии извлечений можно (субъективно!) считать независимым от первой, если только эта первая выборка остаётся неизвестной.

Пусть, снова (Пуассон 1837а, § 90, с. 231 – 234), в урне находятся $a$ белых и $b$ черных шаров. Производятся две выборки без возвращения, одна за другой, в результате которых извлечено, соответственно, $g$ и $m$ белых и $h$ и $n$ черных шаров, $g + h = r$. Вероятность результата второй выборки равна

$$P(a; b; m; n) = \Sigma[P(a - g; b - h; m; n)\, P(a; b; g; h)],$$

где в скобках указаны соответствующие аргументы и сумма распространяется на $g$, $h = 0, 1, 2, ...$ ; $g + h = r$.

Правая часть формулы не зависит от $r$, которое поэтому может быть принято равным нулю, что и доказывает утверждение Пуассона [и другого автора (Mondesir 1837)]. Этот эпизод и его дальнейшую историю см. Шейнин (2002c). Здесь, мы лишь упомянем Чупрова. В письме 1921 г. он (Шейнин 1990c/2010, с. 182 – 183) указал:

*Если не располагать априорными данными, то ряд чисел, полученных в порядке извлечения из урны билетов без возвращения, неотличим от ряда, получаемого при обычном порядке обратного опускания* [...] *билета* [...] *в урну* [...]. *Звучит это парадоксом, но* [это] *так*!

См. также Чупров (1923, с. 666 – 667; 1924/1960, с. 209). Первым выборку без возвращения рассмотрел Гюйгенс (§ 3.2.2).

## 9.5. Предельные теоремы для схемы Пуассона

Пусть в испытании $j$ противоположные события $A$ и $B$ происходят с вероятностями $p_j$ и $q_j$, $p_j + q_j = 1$. Какова вероятность, спрашивает Пуассон (1837a, § 94, с. 246), что $A$ произойдёт $m$ раз (и $B$ – $n$ раз) при $s$ испытаниях ($m + n = s$)? Пуассон выписывает производящую функцию случайной величины $m$ (иначе: двумерную производящую функцию $m$ и $n$) в виде

$$X = (up_1 + vq_1)\,(up_2 + vq_2)\,\dots\,(up_s + vq_s),$$

так что искомая вероятность оказывается равной коэффициенту при $u^m v^n$ в разложении $X$. Его дальнейшие выкладки (которые отсутствовали у Лапласа в гл. 9 *Анал. теории*) включали преобразования

$$u = e^{ix},\ v = e^{-ix},\ up_j + vq_j = \cos x + i(p_j - q_j)\sin x = \rho_j \exp(ir_j),$$
$$\rho_j = \{\cos^2 x + [(p_j - q_j)\sin x]^2\}^{1/2},\ r_j = \operatorname{arctg}[(p_j - q_j)\operatorname{tg} x].$$

После дальнейших вычислений Пуассон (§ 96, с. 252 – 253) вывел, исключая случай убывания $p_j$ или $q_j$ с ростом $s$, и без оценки влияния допущенных упрощений, соответствующие локальную и интегральную предельные теоремы для случая большого $s$. Эти теоремы имели сложный вид, и основное значение исследования состояло, видимо, в расширении класса изучаемых случайных величин.

## 9.6. Центральная предельная теорема

Пуассон (§ 92, с. 254) ввёл решетчатую случайную величину, принимающую значения кратные ω на некотором конечном интервале и зависящие от номера испытания. Применяя характеристическую функцию и формулу обращения, он определил вероятность сумме *s* этих значений находиться в определённых пределах, $a\omega \le s \le b\omega$. Далее Пуассон перешёл к сумме непрерывных случайных величин, приняв, что $\omega \to 0$, $a$, $b \to \infty$ при конечных произведениях $a\omega$, $b\omega$. Полагая, что число испытаний велико, Пуассон вывел [ЦПТ] для той же суммы *s* при единственном, притом недостаточно объяснённом условии (§ 101, с. 268)[4] и снова без учёта влияния введённых им упрощений. По контексту представляется, впрочем, что дисперсии слагаемых исследуемой суммы он полагал конечными и ненулевыми. Раннее Пуассон (1824; 1829) доказал несколько вариантов [ЦПТ] при помощи тех же средств и обосновал ей свой ЗБЧ, см. Hald (1998, с. 317 – 327), который учёл все соответствующие рассуждения Пуассона. Указанные доказательства были методически несовершенными, поскольку условия теоремы не были приведены, Хальд же заявил, что этот дефект был в то время обычным. Само доказательство ещё ждёт лучшего описания, потому что по Хальду оказывается, что оно было строгим.

Пуассон (1824, §§ 4 и 6) также ввёл так называемое распределение Коши и установил его [устойчивость] и (1837a, § 99, с. 258) воспользовался разрывным множителем Дирихле, считая его, впрочем, известным. Сам Дирихле ввёл этот множитель в двух статьях 1839 г., см. его *Werke*, Bd. 1, 1899, с. 377 – 410.

Пуассон (1824, §§ 8 – 10) рассмотрел также линейную функцию

$$E = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_n\varepsilon_n$$

дискретных и непрерывных независимых случайных переменных $\varepsilon_i$. Во втором случае он (с. 288) вывел соответствующую ЦПТ и заметил, что переменные, обладающие плотностью

$$\varphi(x) = e^{-2|x|},\ |x| < +\infty,$$

ни при $a_i = 1/(i + 1)$, ни при $1/(2i – 1)$ не подчиняются этой теореме**.** Марков (1899с, с. 42), см. § 15.2-3, упомянул эти особые случаи в своих спорах с Некрасовым по поводу ЦПТ.

Пуассон применил ЦПТ для оценки значимости расхождений между эмпирическими показателями, полученными из различных серий наблюдений. В схеме Бернулли он исследовал расхождения между вероятностями событий (1837а, § 88, с. 224) и между частотами появления события (§ 109, с. 294), а в своей собственной схеме (см. § 9.7) – между средними значениями случайной величины (§ 107, с. 288). Курно (1843, гл. 7 и 8) последовал его примеру.

## 9.7. Закон больших чисел

Вот как Пуассон определил этот закон в преамбуле (1837а, с. 7):

*Вещи любой природы подвержены универсальному закону, который можно назвать* <u>*законом больших чисел*</u>*. Он состоит в том, что, если наблюдать весьма значительное число событий одной и той же природы, зависящие и от постоянных причин, и от причин, беспорядочно изменяющихся то в одном направлении, то в другом, т. е. так, чтобы их изменения не происходили в каком-либо определённом смысле монотонно* (*progressive*)*, то среди этих чисел обнаружатся почти постоянные соотношения*.

Далее Пуассон качественно заметил, что уклонения от его закона убывают по мере возрастания количества наблюдений. Как указал Борткевич (1904, с. 826, прим. 13), вся преамбула в основном содержалась уже в прежнем сочинении (Poisson 1835).

Своё расплывчатое определение Пуассон (с. 8 – 11) иллюстрировал разнообразными интересными примерами, которые, однако, недостаточно разъясняли суть дела. Так (с. 9 – 10), ЗБЧ объясняет устойчивость среднего уровня моря и существование среднего интервала между молекулами. Начиная с 1829 г. сочинения Пуассона содержали большое число иногда связанных с этим законом прямых и косвенных утверждений о молекулярных состояниях вещества, локальных параметрах молекулярных взаимодействий и т.д. (Шейнин 1978с, с. 271, прим. 25), которые, однако, оставались незамеченными.

Далее он (§§ 52, 53, с. 138 – 142) ввёл три положения, характеризующие его закон. Они основывались на стандартной формуле (которую Пуассон не выписал)

$P(B) = \Sigma(A_i)\ P(B/A_i)$.

Фактически он исследовал устойчивость статистических показателей на основе ЦПТ, см. Hald (1998, с. 576 – 582).

Следует признать, что Пуассон весьма сложным образом описал свой закон, и достаточно подробного изложения его рассуждений ещё нет, фактически же он понимал ЗБЧ как общий принцип, а некоторые примеры, как и у Якоба Бернулли (§ 4.2.3), характеризовали случаи, при которых вероятностей вообще либо не существовало, либо они оставались неизвестными.

Неудивительно, что Борткевич (1894 – 1896/1968, с. 68) отметил, что

*Вряд ли существует такая теорема, которая подвергалась бы стольким возражениям, как закон больших чисел.*

Вот также выдержка из его письма Чупрову 1897 г. (Шейнин 1990с/2010, с. 61):

*А то взять* [...] *мой последний трёхчасовой разговор с Марковым по поводу закона малых чисел* [см. § 16.1.2]. *Он* [разговор] *принёс мне одно раздражение. Он* [Марков] *опять требовал изменения заглавия.*

*По этому поводу разговорились о законе больших чисел. Оказывается, что Марков относит это название* (*как и Чебышев*) *к тому случаю, когда известны заранее все вероятности, следующие одна за другой* [...].

*Марков в конце признал, что может быть у Пуассона и есть* <u>*какая-то двойственность*</u>*, но полагал, что следует считаться с тем пониманием термина* <u>*закон больших чисел*</u>*, какое встречается у позднейших писателей.*

Закон Пуассона был признан далеко не сразу. В 1855 г. Бьенеме заявил, что в нём нет ничего нового (§ 11.2), что, видимо, заставило Курно (1843) обойти ЗБЧ молчанием. Мнение Бьенеме сложилось не позже 1842 г. (Heyde & Seneta 1977, с. 46 – 47). Даже много позже Bertrand (1888a, с. XXXII и 94) счёл его малозначительным, нестрогим и неточным. Однако уже Bessel (1838a, особо § 9) осторожно назвал закон Пуассона *принципом* больших чисел, Буняковский (1846, с. 35) упомянул его, а Давидов (1854a; 1857, с. 11) признал его значение. Возможно, однако, что статистики приняли законы больших чисел Бернулли и Пуассона (и Чебышева) лишь в их качественном смысле, см. § 4.2.3.

## 9.8. Теория ошибок и артиллерийская стрельба

В теории ошибок Пуассон предложил своё доказательство [ЦПТ] (§ 9.6) а также непараметрический критерий чётности распределения ошибок наблюдения (1829, § 10). Он (1837b) кроме того приложил теорию вероятностей и теорию ошибок к артиллерийской стрельбе, в основном, правда, с педагогической целью[5]. В качестве главной меры рассеяния Пуассон рекомендовал дисперсию (что соответствовало поздней практике Лапласа, см. § 8.2-6). Одна из его задач (1837b, § 7) состояла в отыскании распределения квадрата расстояния некоторой точки от начала координат по заданным нормальным распределениям её расстояний до осей координат на плоскости. Он тем самым быть может впервые чётко рассматривал плотности распределения как чисто математические объекты.

Пуассон не ссылался на теорию ошибок Гаусса и потому значительно обесценил свой вклад в эту дисциплину. Вот, к примеру, его (1833, с. 361) мнение о заслугах Лежандра:

*Наш собрат был автором метода вычисления кометных орбит*. […] *Именно ему науки наблюдения обязаны правилом вычислений, названным методом наименьших квадратов ошибок. Лаплас показал всё вероятное преимущество этого метода по отношению к точности результатов* …

Наконец, дилетантские рассуждения Пуассона (1837a) об измерениях и наблюдениях почти бесполезны.

В отличие от Пуассона (и других французских математиков, о чём мы упомянули в конце § 8.2-3), Лаплас (1812/1886, с. 353) объективно описал открытие МНКв:

*Лежандр возымел простую идею рассматривать сумму квадратов ошибок наблюдений* [точнее, остаточных свободных членов] *и приводить её к минимуму.* […] *Этот геометр первым опубликовал указанный метод, но надо отдать должное Гауссу, заметив, что за много лет до публикации Лежандра он постоянно пользовался той же идеей и сообщил о ней многим астрономам.*

## 9.9. Статистика

В § 7.2 мы описали развитие статистики в XVIII в. и продолжим эту тему в гл. 11, здесь же опишем соответствующие высказывания Пуассона и некоторых других учёных. Напомним прежде всего (§ 9.6), что Пуассон исследовал значимость эмпирических расхождений. Ссылаясь на свою переписку с ним, Кетле (Quetelet 1869, т. 1, с. 103) засвидетельствовал, что Пуассон насмешливо отзывался о статистиках, которые были склонны подменять *истинные принципы науки своими фантазиями*.

Более определённо Пуассон высказался в нескольких других случаях (дважды – в соавторстве). Так (Libri-Carrucci и др. 1834, с. 535):

*Наиболее тонкие проблемы социальной арифметики могут быть решены лишь при помощи теории вероятностей*.

Через год несколько авторов включая Пуассона (Double et al 1835, с. 174) заявили, что статистика практически является приложением исчисления вероятностей *к бесконечным* [?] *массам* и что (с. 176) в смысле приложения математики медицинские науки *не хуже других физических и естественных наук, юриспруденции, моральных и политических наук и пр*.

Это мнение, однако, оспаривалось. В дискуссии по выступлению Пуассона (1836, с. 380) Пуансо заявил, что приложение исчисления вероятностей к *моральным вещам*, как, например, к вердиктам трибуналов и голосованию, есть *опасная иллюзия* и *ложное приложение математических наук*, см. также § 9.9.1. Он сослался на высказывание Лапласа о трудностях приложения теории вероятностей, но упустил из вида, что в том же *Опыте* (1814) Лаплас специально рассматривал *Приложение исчисления вероятностей к нравственным* [устаревший русский термин] *наукам* и включил в него три соответствующие главы (и изучал судебную статистику!). Так, он (1814/1999, с. 848) призывал приложить

*к политическим и нравственным наукам метод, основанный на наблюдении и исчислении, метод, который служил нам так хорошо в науках естественных.*

К моральной статистике относили изучение явлений, зависящих от воли человека: женитьб, самоубийств и преступлений. С тех пор её область значительно расширилась и включает, например, благотворительность и профессиональную и географическую подвижности населения.

Резко возразил против приложения статистики к медицине Double (1837, с. 362 – 363), заявивший (с. 363), что каждый случай представляется ему как *новая и отдельная проблема*. Впрочем, он ошибочно отождествил статистику с количественным методом (см. § 11.9).

Ранее не вполне определённо высказался по этому же поводу Коши (Cauchy 1821/1897, с. V): единственный метод естественных наук − это поверка наблюдений исчислением, однако математическим наукам не следует *выходить за свои рамки*. Позже он (1845/1896, с. 242), однако, выступил совсем иначе: статистика предоставляет средство *в некотором смысле непогрешимое* для суждения об учениях и институтах и

*может быть следует сожалеть, что это средство очень часто не применяется со всей строгостью* ...

**9.9.1. Судебная статистика.** Пуассон (1837а, с. 1 – 2) полагал, что исследование вероятностей вердиктов и, вообще, решений, принимаемых большинством голосов, являлось одним из важнейших приложений исчисления вероятностей. Свою основную задачу в этой области он (с. 17) видел в исследовании устойчивости процента осуждаемых по отношению ко всем подсудимым и вероятностей судебных ошибок и в сравнении судебной статистики различных стран, равно как (с. 7) в доказательстве применимости математического анализа *к вещам, которые называются моральными*.

Пуассон в основном ограничился исследованием уголовного судопроизводства, причём, вопреки Лапласу, он (с. 4 и § 114, с. 318) ввёл положительную вероятность подсудимому быть виновным ($k$) и не оговорил своего условия независимости судей. Вот одна из его формул (§ 119, с. 333):

$$P_i = kt^m/[kt^m + (1 - k)],\ t = u/(1 - u).$$

Здесь $P_i$ – вероятность виновности осуждённого ($n - i$) голосами против $i$, $u$ – единая для всех судей (присяжных) вероятность правильности голосования, $m = n - 2i$. Пуассон заметил, что правая часть не зависит от $n$. Аналогичную формулу он вывел для непрерывного случайного $u$ введя его неизвестную априорную плотность. Но заметим, что осуждение могло произойти при различных значениях $i$.

Одно из утверждений Пуассона (§ 136, с. 375 – 376) спорно: он заявил, что при усилении преступности относительное число осуждаемых должно было возрастать.

Приложение теории вероятностей к юриспруденции продолжало подвергаться нападкам. Вот самые известные высказывания по этому поводу (Милль 1843/1914, с. 490; Пуанкаре 1896/1999, с. 22):

1. *Неудачные приложения исчисления вероятностей* […]

*сделали* [его] *настоящим позором математики. Достаточно упомянуть о приложении его к установлению достоверности свидетелей и правильности приговоров, выносимых присяжными*.

2. В судах люди *воздействуют друг на друга* и ведут себя как *панургово стадо*.

Тем не менее, соответствующая работа Лапласа и Пуассона (и их предшественника, Кондорсе) несомненно привлекла общественность к проблемам отправления правосудия и показала, чего можно ожидать в идеальном случае независимости судей. Мы вернёмся к Пуанкаре в § 12.2.

**9.9.2. Медицинская статистика.** Мы упоминали эту дисциплину в § 7.2.3. Теперь мы скажем, что Пуассон имеет определённые заслуги в её развитии. Вот свидетельство его бывшего студента, врача Gavarret (1840, с. xiii):

*Лишь после длительных раздумий над лекциями и сочинениями великого геометра мы смогли познать* [...] *трудность систематического применения экспериментального метода в искусстве врачевания*.

В своей книге, которая стала популярной, Гаварре разъяснил нормальную аппроксимацию биномиального распределения и вычисление допустимых расхождений частот появления события в биномиальной схеме с переменными вероятностями, а также (с. 194) подчеркнул важность проверки начальных гипотез (позднейший термин), фактически в естествознании вообще. Впрочем, введение этих гипотез явилось логическим завершением исследований Пуассона значимости эмпирических расхождений.

Пуассон (1837а, с. vi) настаивал на необходимости сбора большого числа наблюдений:

*Медицина не окажется ни наукой, ни искусством, если она не будет основана на многочисленных наблюдениях, на такте и должном опыте врача, который должен судить о схожести случаев и учитывать особые обстоятельства*.

Гаварре последовал за Пуассоном, однако по крайней мере с середины XVIII в. (Bull 1959, с. 227) ценные выводы были получены и в противном случае. И ещё Николай Бернулли (§ 4.3.2) считал возможным основываться на небольших соотношениях вероятностей двух противоположных событий. И вот Libermeister (прим. 1876, с. 935 – 940) решительно возразил Гаварре: практические врачи не могут собирать много наблюдений, а если и смогут, то действительно ли будет нужна

теория вероятностей?
Современная статистика (включая теорию ошибок) не может ограничиваться случаем большого числа наблюдений, и поэтому скорее Либермейстер, а не Гаварре оказался пионером медицинской статистики. Freudenthal & Steiner (1966, с. 181 – 182) ошибочно приписали Гаварре, а не Либермейстеру, переход от безусловной уверенности к разумной степени вероятности. В 1889 г. в Лейпциге вышло собрание его медицинских сочинений, после чего он успел опубликовать ещё несколько медицинских книг. О математико-статистических результатах Либермейстера см. Seneta (1994).

В России в 1850-е годы приложение статистического метода к медицине пропагандировал Давидов, хорошо знакомый с работой Пуассона и Курно (§ 11.3), см. Ондар (1971). Мы упомянем его и в § 11.4-8.

## Примечания

**1.** Пуассон так и не смог придерживаться объявленного им отличия между шансом и вероятностью, и по этой причине мы будем всюду употреблять современный термин.

**2.** Ранее Пуассон (1830, с. 141 и 146) применил ту же букву *A* для обозначения наблюдаемой константы, – *некоторой вещи*. Стало быть, эта буква вряд ли теперь обозначала *aléatoire*, т. е. случайная [вещь].

**3.** Пуассон (§ 103, с. 274) и раньше (1833, с. 637) подкрепил переход от дискретного случая к непрерывному при помощи приёма, который может быть описан дельта-функцией Дирака. Введя плотность $\varphi(x)$, равную нулю всюду, кроме как в конечном числе точек $c_i$, $i = 1, 2, ..., n$, для которых

$$\int_{c_i-\varepsilon}^{c_i+\varepsilon} \varphi(x)dx = g_i,\ \varepsilon \to 0,\ \Sigma g_i = 1,$$

он тем самым применил функцию Дирака типа $\varphi(x) = \Sigma[g_i\delta(x - c_i)]$.
**4.** Пуассон сослался на § 60 и на свой мемуар (1829, § 8), однако на наш взгляд положение осталось неясным. Он (1837а, § 112, с. 312 – 313) повторил формулировку [ЦПТ] для среднего значения случайной величины, но вообще не ввёл никаких условий и даже не ограничил её значений конечным интервалом. **5.** С 1812 г. (и по?) Пуассон был *экзаменатором артиллерии* (Arago 1850/1854, с. 602).

# 10. Гаусс, Гельмерт, Бессель

## 10А. Гаусс

Этот раздел в основном посвящён методу наименьших квадратов[1], но мы (1979) в некоторой степени рассмотрели исследования Гаусса в собственно теории вероятностей. Он был неутомимым сборщиком статистических сведений, в том числе и несущественных, и удачно управлял вдовьей кассой Гёттингенского университета. Его переписка и научное наследие включают изучение смертности младенцев и членов тонтин (закрытых обществ страхования), и он владел формулой обращения для преобразования Фурье функции плотности.

Гаусс также решил первую задачу из области метрической теории чисел. Он рассматривал разложение числа $M$ ($0 < M < 1$) в непрерывную дробь с единичными числителями и определил вероятность $P(n; x)$ того, что, начиная с $(n + 1)$-й подходящей дроби, остаток непрерывной дроби окажется меньше чем $x$. Если все допустимые значения $M$ по крайней мере более или менее равновероятны, то, как он сообщил Лапласу в 1812 г. (*W*-10/1, с. 371 – 372), $P(0; x) = x$ и

$$\lim P(n; x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2},\ n \to \infty.$$

Тем не менее, Гаусс не был вполне удовлетворён своим результатом и попросил Лапласа *взглянуть* на эту задачу; он, Гаусс, уверен, что тот отыщет её *более полное* решение, – допредельное соотношение. Впрочем, фраза из *Математического дневника* Гаусса (там же, с. 552) 1800 г. свидетельствует, что в то время он был доволен своей тогда уже полученной формулой. Stäckel (там же, с. 554 – 556), а затем Кузьмин (1928) доказали формулу Гаусса, последний же вывел и асимптотическое разложение для $P(n; x)$.

Здесь мы также повторим общее мнение Гаусса (*W*-12, с. 201 – 204) о приложениях теории вероятностей, описанное Вебером (W. E. Weber) в одном из его писем 1841 г. Если они основаны лишь на числах, то выводы могут быть весьма ошибочны, следует также принимать в расчёт суть исследуемого явления. Теория вероятностей обеспечивает подход, когда ничего кроме чисел не известно, как, например, при подсчётах пожизненных рент; для юриспруденции она может определить желаемое количество свидетелей и судей (но вряд ли без учёта *сути* судопроизводства).

**10А.1. Метод наименьших квадратов до 1809 г.**

Он косвенным и притом неточным образом применялся с середины XVIII в. (§ 7.3.2), а своеобразный вариант метода, как можно полагать, был известен землемерам с ещё более ранних времён. При графической засечке определяемого пункта *P* с трёх или более известных пунктов на планшете землемера появлялся треугольник (многоугольник) погрешностей. Естественным было назначать внутри него точку *P* на глаз таким образом, чтобы сумма квадратов её расстояний до сторон треугольника (многоугольника) оказывалась минимальной. Мы можем в некоторой степени обосновать это мнение экспериментальным выравниванием ломаной на глаз (Тутубалин 1973, с. 27): кривые, проведённые таким образом, в общем и целом оказались столь же точными, как вычисленные по МНКв.

Эйлера можно считать предшественником Гаусса в эвристическом смысле (§ 7.3.1). Гаусс быть может и не знал об указанном комментарии Эйлера, а список библиотечных книг, которые он читал в свои студенческие годы (к сожалению, неполный), не включает соответствующего тома журнала Петербургской академии наук. В нескольких письмах Гаусс удивлялся, что принцип наименьших квадратов не был открыт до него.

**10А.1.1. Хубер.** Утверждалось (Merian 1830, с. 148 и многие последующие авторы), что несколько раннее 1802 г. швейцарский математик и астроном Huber пришёл к принципу наименьших квадратов, но что, живя в отдалении от научных центров, он так и не сообщил никому о своей находке. Однако, Dutka (1990), упомянув забытую статью (W. Spieß 1939), заключил, что это мнение неверно. Шпис процитировал самого Хубера, который сослался на *лежандровский критерий* (Maßstab) *наименьших квадратов*.

**10А.1.2. Лежандр.** Принцип наименьших квадратов чётко ввёл Лежандр (Legendre 1805, с. 72 – 73):

*Из всех принципов, которые могут быть предложены* [для решения избыточных линейных систем] *нет, как я полагаю, более точного или простого в применении, чем тот, который мы использовали в настоящей работе. Он состоит в том, чтобы привести к минимуму сумму квадратов ошибок* [точнее, остаточных свободных членов].

*Этот метод устанавливает своего рода равновесие между ошибками, которое, поскольку оно не позволяет преобладать крайним* [погрешностям], *подходит для выявления состояния системы, наиболее приближающейся к истине*.

Лежандр также указал, что крайние по абсолютной величине ошибки [снова: остаточные свободные члены] должны быть заключены в возможно более тесные пределы. Он не добавил, что его нововведение не обеспечивало этого условия, которое соответствует принципу минимакса (§ 7.3.2).

**10А.1.3. Эдрейн.** Американский математик Эдрейн (Adrain 1809) обосновал принцип наименьших квадратов и [нормальное распределение][2] одновременно с Гауссом и применил свои результаты к решению нескольких задач, см. ниже (Dutka 1990). Он также указал, что ввиду нехватки места вынужден был отказаться от обсуждения уравнивания маятниковых наблюдений. Отложенную задачу он опубликовал позднее (1818a), обнаружив при этом две ошибки в вычислениях Лапласа (1798 – 1825/1878 – 1882, т. 2, § 42 книги 3). Тогда же, в отдельной заметке, Эдрейн (1818b) сообщил о своём выводе значения большой полуоси земного эллипсоида вращения, которое оказалось достаточно близким к данным Ф. Н. Красовского 1940 г. (соответственно, 6378,629 и 6378,245 *км*).

Работа Эдрейна 1809 г. была впервые упомянута в печати много позже (C. Abbe 1871), а вот его последующие публикации стали известны Гауссу по сообщению его корреспондента Ольберса. В 1819 г. последний уведомил Гаусса, что *один американец*, ссылаясь на свою прежнюю статью, *приписывает себе* открытие МНКв. (Гаусс W/Erg-4, № 2, с. 711). Гаусс, кажется, ничего по этому поводу не ответил; весьма возможно, что споров с Лежандром было для него достаточно.

Вот выводы нормального распределения у Эдрейна.

а) На местности измерены расстояния $a$ и $b$ с погрешностями $x$ и $y$ соответственно, причём

$$x/a = y/b, \tag{10.1}$$

общая же ошибка зафиксирована:

$$x + y = c. \tag{10.2}$$

Введя плотность распределения ошибок φ и молчаливо предполагая их независимыми, Эдрейн воспользовался принципом наибольшего правдоподобия

$$\varphi(x; a)\,\varphi(y; b) = \max,$$

так что, с учётом (10.1) и (10.2),

$$[\varphi'(x; a)/\varphi(x; a)]dx + [\varphi'(y; b)/\varphi(y; b)]dy = 0,$$
$$\varphi'(x; a)/\varphi(x; a) = mx/a \text{ и т. д.}$$

b) Пусть для линейных измерений

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

тогда

$$W = \varphi(x)\,\varphi(y) - \lambda(x^2 + y^2) = \max,\ \varphi'(x)\,\varphi(y) - 2\lambda x = 0,$$
$$\varphi(x)\,\varphi'(y) - 2\lambda y = 0,\ \varphi'(x)/[x\varphi(x)] = \varphi'(y)/[y\varphi(y)] = c \text{ и т. д.}$$

Эдрейн также выписал совместное распределение указанных двух ошибок и указал, что соответствующие линии равных вероятностей являются эллипсами (эллипсами ошибок, как они были позднее названы в теории ошибок).

Условия (10.1) и (10.2) вряд ли соответствовали действительности; так, первое из них характеризует систематические ошибки. Произвольно также и условие во втором выводе. И все-таки Дж. Гершель (1850), Максвелл (1860), Thomson & Tait (1867, с. 314) и Крылов (1950, гл. 8) без всяких ссылок повторили его (Шейнин 1965). Впоследствии условие независимости в этом выводе ослабили Кас (1939) и Линник (1952).

Предпочтительность среднего арифметического для случая одного неизвестного (принцип арифметической средины), который при нескольких неизвестных переходит в принцип наименьших квадратов, Эдрейн доказал теперь уже элементарно.

Наконец, Эдрейн показал как следует уравнивать буссольный ход по МНКв и примечательно, что он при этом отыскивал поправки в непосредственно измеряемые величины, а не в некоторые их функции, которые зависели друг от друга.

**10А.1.4. Гаусс.** Принцип наименьших квадратов он применял с 1794 или 1795 г. (Гаусс 1809a; 1809b, § 186). Во втором случае

Гаусс назвал его *наш принцип*. И позднее Гаусс (1823 b, § 17), не упоминая Лежандра, заметил по поводу МНКв: *способ, давно уже применявшийся нами* … В письме Гауссу 31 мая 1809 г. (Гаусс W-9, с. 380) Лежандр указал, что приоритет в науке устанавливается только по публикациям. Он также заметил, что интеграл в бесконечных пределах от экспоненциальной функции отрицательного квадрата впервые вывел не Лаплас, как указал Гаусс в § 177, а Эйлер.

Все авторские сообщения Гаусса появились в *Göttingische gelehrte Anzeigen*, и вряд ли Лежандр видел сообщение (1809a), впоследствии перепечатанное в *Трудах* Гаусса (W-6, pp. 59 – 60):

*Основные принципы, рассмотренные здесь, которые автор применял уже 14 лет и уже давно сообщил о них своим друзьям-астрономам, приводят к тому самому способу, который несколько лет назад описал Лежандр* […] *в своём труде Nouvelles méthodes* […].

Следовало бы всё-таки повторить сказанное ранее в *Теории движения*, но Гаусс почему-то этого не сделал, и сообщать об этом Лежандру ему было бы неприятно. Да и по поводу указанного выше интеграла он мог бы добавить, как впоследствии, в *Monatlicher Correspondenz*, Bd. 21, p. 280: слишком поздно ему *пришло на ум*, что этот интеграл вычислил Эйлер, и вводить поправку он не захотел, потому что в окончательном виде интеграл выписал Лаплас. Об этом добавлении сообщили редакторы издания трудов Гаусса (1887, с. 207), не указав года его публикации.

Не получив ответа, Лежандр (1820, с. 79 – 80) обвинил Гаусса в присвоении условия МНКв. Гаусс (30 янв. 1812, W-10/1, с. 373) ответил лишь на письмо Лапласа, сообщив о своём применении МНКв задолго до 1805 г. и о том, что не желал публиковать *обрывок*.

Мы весьма подробно описали возможные случаи применения МНКв Гауссом до 1805 г. равно как и сообщения, сделанные им о своём открытии многим коллегам (Шейнин 1999b;1999d). Неожиданно оказалось, что фон Цах, который отказывался подтвердить приоритет Гаусса, хотя будто бы и мог это сделать, вплоть до 1805 г. не знал формулировки принципа наименьших квадратов, но затем (1813, с. 98 прим.) косвенно согласился с утверждениями Гаусса, повторив их без всяких оговорок:

*Прославленный д-р Гаусс владел этим методом с 1795 г. и с выгодой применил его при определении элементов эллиптических*

*орбит четырёх новых* [малых] *планет, что усматривается из его замечательной работы* [*Теории движения*].
К сожалению, не усматривается! Эта выдержка всё же более существенна, чем редакторское признание того же фон Цаха (Dutka 1996, с. 357): оказывается, что в 1809 г. его журнал *Monatliche Correspondenz* опубликовал анонимную рецензию на *Теорию движения*, и в ней (с. 191) повторялось утверждение Гаусса о давнишнем применении МНКв.

Оно не является общепризнанным, см., например, Marsden (1995, с. 185), который, однако, не упомянул противоположного мнения более ранних комментаторов (Brendel 1924; Galle 1924, с. 9) или современников Гаусса[3]. Во всяком случае, Gerardy (1977, с. 19, прим. 16), основываясь на архивных источниках, обнаружил, что Гаусс, который в 1802 – 1807 гг. участвовал в топографических работах (частично для своего собственного удовольствия), видимо применял этот метод не позднее чем с 1803 г. Gerardy, к сожалению, очень нечётко сообщил об этом.

Имеется много других случаев, включая описанный фон Цахом выше, в которых Гаусс вполне мог бы применять МНКв хотя бы для предварительных пробных вычислений или прикидок, тем более, что для него МНКв не был жёсткой процедурой, см. § 10А.5-3. Кроме того, возможные ошибки в исходных данных или неизвестный способ взвешивания наблюдений могли сделать подтверждение невозможным. Наконец, Гаусс вычислял необычно быстро и нередко ошибался (Maennchen 1918/1930, с. 65 и след.).
Мы также доказали, что среди тех, кому Гаусс сообщил о нем, были Бессель и Вольфганг Больяи (отец одного из открывателей неевклидовой геометрии, Яноша Больяи) – и, как мы напомнили, Ольберс. Последний, правда, не ответил на письмо Гаусса 27 июня 1809 г. (W/Erg-4, № 1, с. 44) с просьбой сообщить, помнит ли Ольберс, что узнал о МНКв от него, Гаусса, до 1805 г., но на следующее письмо Гаусса ответил 10 марта 1812 г. (там же, с. 495): помнит и *охотно* подтвердит в печати. Он (Olbers 1816, с. 192 прим.) выполнил своё обещание много позднее, потому что в 1812 – 1815 гг. не опубликовал ничего подходящего (*Catalogue of Scient. Literature*, Royal Society).
В письме 3.12.1831 Шумахеру Гаусс (1860 – 1865, W/Erg-5, № 1, с. 292) указал по поводу сообщения Ольберса: *Задумано было хорошо, но, спроси он меня, я бы сильно возразил*.

Формально принцип наименьших квадратов предложил, конечно, Лежандр, но вот мнение комментаторов (Biermann 1966, с. 18; May 1972, с. 309):

*что запрещено обычному автору, должно быть разрешено гауссам, и во всяком случае мы обязаны уважать его* [Гаусса] *исходные соображения*.

*Гаусс очень заботился о приоритете*. […] *Но для него это означало первым не опубликовать, а отыскать, и ему было достаточно установить даты частными записями, перепиской, скрытыми указаниями в статьях.* […] *Хотел он этого или нет, он тем самым сохранял своё преимущество тайны без потери приоритета в глазах последующих поколений*.

В любом случае Гауссу ничего не стоило бы написать в 1809 г. *наш принцип, который, однако, первым опубликовал Лежандр* … О последствиях его фактического замечания см. § 9.8. Мы только добавим, что Лаплас, хоть и признал приоритет Гаусса, в основном придерживался своего собственного варианта теории ошибок, см. конец § 8.4. Но вот в письме 17 окт. 1824 г. Шумахеру Гаусс (W/Erg-5, № 1, с. 413) указал, что

*С возмущением и печалью* […] *прочёл, что старого Лежандра, украшения своей страны и своей эпохи, лишили пенсии*.

## 10А.2. *Теория движения* (1809b)

В соответствии с требованием издателя это сочинение появилось в свет на латинском языке, немецкий же оригинал утерян; из переписки Гаусса известно, что в процессе перевода он значительно изменил свой текст (письмо Ольберса 27.6.1809, см. Гаусс (W/Erg-4, No. 1, с. 436). Нас будет интересовать лишь небольшая часть книги[4].

1) Метод Бошковича (см. наш § 7.3.2). Пусть *n* уравнений (2.2) с *m* неизвестными ($n > m$) уравниваются по этому методу. Тогда, как заметил Гаусс в § 186, условие (7.13) означало, что в точности *m* остаточных свободных членов окажутся равными нулю. В § 174 он, соответственно, посчитал этот факт нежелательным, хотя в §§ 188 – 189, кажется, согласился с тем, что метод Бошковича может обеспечить первое приближение. Несколько ниже в том же параграфе Гаусс уточнил своё утверждение, приняв во внимание другое условие Бошковича (7.12), но ошибочно приписал его Лапласу. Замечание Гаусса, которое легко доказать, означает, что ему была известна важная теорема линейного программирования.

2) [Нормальное распределение] (§§ 175 – 177). Гаусс (§ 177) принял *как аксиому*, что среднее арифметическое из многих наблюдений окажется наиболее вероятным значением [измеряемой константы], *если не абсолютно точно, то очень близко к этому*. Далее он (§ 175) определил плотность распределения ошибок наблюдения φ (хотя и не предложил для неё никакого термина), полагая её одновершинной и *в большинстве случаев* чётной; таковым было его понимание случайных ошибок. Наконец, для обоснования принципа [наибольшего правдоподобия] Гаусс (§ 176) доказал *фундаментальный принцип* обращённой вероятности (наш § 8.1-1) для случая равных априорных вероятностей гипотез $A_i$, $A_j$, ... Впрочем (Whittaker & Robinson 1924/1949, с. 219), указанная предпосылка подразумевалась принципом арифметической средины.

Итак, если обозначить наблюдения через $x_i$, $i = 1, 2, ..., n$, то, по принципу наибольшего правдоподобия,

$$[\varphi'(x_1 - a)/\varphi(x_1 - a)] + [\varphi'(x_2 - a)/\varphi(x_2 - a)] + ... +$$
$$[\varphi'(x_n - a)/\varphi(x_n - a)] = 0,$$

где $a$ – искомая оценка, совпадающая по предположению со средним арифметическим $x_o$. Если

$$x_i = x_1 - nN,\ i = 2, 3, \ldots, n,$$

то

$$x_1 + (x_2 + x_3 + ... + x_n) = x_1 + (n - 1)x_1 - n\,(n - 1)N,$$
$$N = (x_1 - x_o)/(n - 1),\ x_i - x_o = -N,\ i = 2, 3, \ldots, n,$$

$$\varphi'(x_1 - x_o)/\varphi(x_1 - x_o) = (1 - n)\varphi'(-N)/\varphi(-N) = -(1 - n)\varphi'(N)/\varphi(N),$$
$$\varphi'[N(n - 1)]/\{(1 - n)\varphi[N(n - 1)]\} = -\varphi'(N)/\varphi(N),$$
$$\varphi'(x)/x\varphi(x) = \text{Const},$$

$$\varphi(x) = (h/\sqrt{\pi})\exp(-h^2x^2),\ h > 0. \qquad (10.3)$$

Постоянную $h$ Гаусс (§ 178) назвал мерой точности (*gradus praecisionis*).
Можно полагать, что Гаусс с самого начала не был удовлетворён этим выводом. Его формулировки принципа арифметической

средины и свойств искомой плотности содержали оговорки, а выведенный принцип наименьших квадратов (см. ниже) оказался аксиомой. Да и трудно предположить, чтобы Гауссу понравилось появление универсальной плотности. Позднее же он (1821/1957, с. 143; 1823а/1957, с. 144) назвал своё обоснование МНКв 1809 г. зависящим от *гипотетически* принятого нормального распределения. И вот мнение Бертрана (Bertrand 1888a, с. XXXIV): Гаусс претендовал не на установление истины, а на её поиски. Он (с. 180 – 181) также заметил, что среднее из значений некоторой функции не совпадает со средним значением её аргумента, что, видимо, свидетельствовало против принципа среднего арифметического. Гаусс, однако же, рассматривал непосредственные измерения. Интересно также, что Гаусс (письмо Энке 1831 г., *W*-8, 1900, с. 145 – 146) *не без интереса* ознакомился с попыткой этого астронома обосновать среднее арифметическое детерминированными аналитическими аксиомами.

Подобные усилия повторялись неоднократно. Цох (Zoch 1935) заключил, что, хотя предыдущие авторы не достигли успеха, постулат среднего арифметического всё-таки может быть установлен без привлечения стохастических понятий. Для теории ошибок его результат не был, однако, интересен, но содержательная сторона этих исследований, видимо, послужила началом теории инвариантных статистических гипотез и оценок (Леман 1959, гл. 6). Энке (Encke 1832, с. 74), как оказалось, не был удовлетворён ни одним обоснованием МНКв. См. также § 10А.6-1.

Гаусс (1845/1873, с. 143) оставил менее известное утверждение об арифметическом среднем. Он заметил, что случайные вариации, искажающие наблюдения, в основном компенсируют друг друга, так что среднее становится все более надёжным по мере возрастания числа наблюдений. Это *в общем абсолютно верно* и часто приводило к *прекрасным результатам* в естествознании. Однако, продолжал Гаусс, важным является часто забываемое и трудно проверяемое условие полной независимости неправильных вариаций друг от друга.

3) Принцип наименьших квадратов (§ 179) теперь следовал непосредственно. Впрочем, Гаусс добавил, что, подобно принципу арифметической средины, он *должен считаться за аксиому* [быть может: считаться следствием аксиомы]. Заметим, что вместо истинных ошибок принцип наименьших квадратов

формулируется по отношению к остаточным свободным членам. Гельмерт (Helmert 1872, с. 75) указал на это как-то между прочим и не упомянул Гаусса. Он, очевидно, не знал, что нормальный закон [устойчив], ср. §§ 8.2-6.

4) Точность среднего арифметического. Гаусс, естественно, ограничился случаем нормального распределения. Впоследствии он (§ 10А.4) отошёл от этого ограничения.

5) Точность случайной суммы (рукописное добавление к § 183, не попавшая в немецкий перевод). Пусть

$$x = a + b + c + ...,$$

тогда

$$h_x = 1/[1/h_a^2 + 1/h_b^2 + 1/h_c^2 + ...]^{1/2}.$$

Пояснения Гаусс не привёл; можно полагать, что заданные слагаемые распределены нормально, ибо величину $h$ он определил только для этого случая. Впрочем, он мог вывести эту формулу и в общем случае.

6)Точность [оценок] неизвестных (§ 182; 1811, § 13). Пусть оценки неизвестных определяются из системы нормальных уравнений, которая решается по методу Гаусса последовательных исключений. Тогда, если точность непосредственного наблюдения принята за единицу, точность оценки последнего неизвестного равна корню из её коэффициента в последнем оставшемся "элиминационном" уравнении. См. также наш § 10А.4-5.

## 10А.3. Определение точности наблюдений (1816)

1) Гаусс определяет точность меры точности $h$ в формуле (10.3). Пусть погрешности $m$ [независимых] наблюдений равны α, β, γ, ... Тогда вероятнейшее значение этой величины определится из условия

$$h^m \exp[-h^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + ...)] = \max$$

и потому будет равно

$$h_o = m/[2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots]^{1/2} = 1/\sigma\sqrt{2}.$$

В последнем выражении, которое мы сами ввели, σ – средняя квадратическая ошибка наблюдения.

Гаусс также заметил, что

$$P(h_o - \lambda \le h \le h_o + \lambda) = \theta(\lambda\sqrt{m/h_o}),\ \theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp(-z^2)dz,$$

так что для $P = 1/2$, $\lambda = \rho h_o/\sqrt{m}$, $\rho \approx 0{,}477$ и для распределения (10.3)

$$P(|x| \le \rho\sqrt{h}) = 1/2 \text{ и } r = \rho/h$$

есть вероятная ошибка, которую формально ввел Бессель (1816, с. 141 – 142).

Пусть

$$S_n = |\alpha|^n + |\beta|^n + |\gamma|^n + ...,\ K_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\varphi(x)dx,$$

тогда для больших $m$

$$P(-\lambda \le S_n - mK_n \le \lambda) = \theta\{\lambda/[2m(K_{2n} - K_n^2)]^{1/2}\}, \qquad (10.4)$$

где $mK_n$ – вероятнейшее [среднее] значение $S_n$. Фактически Гаусс имел в виду абсолютные моменты и формулу для $K_n$ следовало бы подправить. Формулу (10.4) доказал Гельмерт (1876), а затем, Липшиц (Lipschitz 1890), однако Крамер (1946, § 28.2) заметил, что она является частным случаем ЦПТ.

Наконец, Гаусс вывел формулу для абсолютных моментов [нормального] закона

$$mK_n = S_{n0} = m\Pi[(n-1)/2]/h^n\sqrt{\pi},\ \Pi(x) = \Gamma(x+1),$$

так что $h$ (а потому и $r$) можно было оценивать при помощи $S_{n0}$, среднего значения $S_n$. Сравнивая, далее, вероятные интервалы для $r$ при различных $n$, Гаусс заключил, что наилучшая оценка достигается при $n = 2$.

В одном из своих писем 1825 г. Гаусс (*W*-8, с. 143) высказался против вероятной ошибки как *зависящей от гипотезы* [от закона распределения]. Тем не менее, он иногда пользовался ей не только в своей переписке (Шейнин 1994а, с. 261), но и в статье (1828b). Так же поступали естествоиспытатели, например, Менделеев (§ 11.9.3) и Ньюком (§ 11.8.4), а Бомфорд (Bomford 1952) *неохотно* перешёл от вероятной ошибки к средней квадратической в издании 1971 г. своей книги (с. 610 – 611). Следует поэтому указать, что уже Л. О. Струве (Struve 1887, последняя ненумерованная страница) предложил отказаться от неё.

2) Обозначим $1/h\sqrt{2} = \alpha$ и пусть $n = 2$. Тогда

$$[m(K_4 - K_2^2)]^{1/2} = \alpha^2\sqrt{2m}$$

и, по формуле (10.4), сумма квадратов $S_2$ имеет нормальное распределение $N[m\alpha^2; \alpha^2\sqrt{2m}]$, ср. Крамер (1946, § 20.2).

## 10А.4. Теория комбинаций (1823b – 1828a)

Более правильный, но не традиционный перевод названия этого мемуара был бы *Теория сочетания* [наблюдений]. Мы рассматриваем его основную часть, в которой Гаусс предложил своё окончательное обоснование МНКв по принципу максимального веса (минимальной дисперсии), и лишь в конце скажем несколько слов о его *Дополнении* (1828а).

1) Случайные погрешности и плотность распределения ошибок. Гаусс (§§ 1 – 3) выделил случайные и систематические погрешности. Он (§ 4) далее повторил определение плотности распределения ошибок и её свойств (см. наш § 10А.2-2), так что (§ 5) среднее значение погрешностей оказывалось равным нулю. В противном случае, добавил Гаусс, оно определяет действие постоянных ошибок.

2) Мера точности. Гаусс (§ 6) ввёл меру точности [дисперсию]

$$m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx,$$

назвав её средней ошибкой, которой следует опасаться (1821/1957, с. 144; 1823b, § 7): *des mittleren zu befürchtenden Fehler, errorum medium metuendum*. Термин в русском переводе, *средняя ожидаемая* ошибка, неудачен. Гаусс специально указал, что интегральная мера точности предпочтительнее локальной, см. его письма Энке 23 авг. 1831 г., *W*-8, 1900, с. 145 – 146, Бесселю 28.2.1839, там же, с. 146 – 147, и Шумахеру 25.11.1844; о последнем письме сообщил Гельмерт в предисловии к сборнику Гаусс (1887).

Кроме того, Гаусс (1823b, § 6) отметил, что квадратичная функция является простейшей [из интегральных мер] и (1821/1957, с. 142) что подобный выбор был *связан ещё с некоторыми другими чрезвычайно важными преимуществами, которых не имеет ни одна другая функция. Впрочем, могла быть принята и любая другая степень с чётными показателями* ... Могла быть принята несмотря на преимущества дисперсии? Бьенеме (Bienaymé 1853/1867, с. 167 – 169) доказал, что формула типа (10.5), см. ниже, не имеет места ни при каких других чётных показателях; чёткое изложение этого доказательства см. Идельсон (1947, с. 269 – 271). Поэтому, продолжал Бьенеме, выбор дисперсии был неизбежен, но мы не уверены, что, как он полагает (с. 169), Гаусс ошибался в этом вопросе.

3) Неравенство типа Бьенеме – Чебышева. Гаусс (§ 9) исследовал вероятность

$$\mu = P(|\xi| \le \lambda m) = \int_{-\lambda m}^{\lambda m} \varphi(x)dx,$$

для [одновершинной] плотности случайных ошибок ξ, обладающих дисперсией $m^2$, и доказал (§ 10), что

$$\lambda \le \mu\sqrt{3} \text{ для } \mu \le 2/3 \text{ и } \lambda \le \frac{2}{3\sqrt{1-\mu}} \text{ для } 2/3 \le \mu \le 1.$$

Крамер (1946, § 15.7 и пример 4 к гл. 15 – 20) доказал эту *замечательную*, по выражению Гаусса, теорему более легко, а Seal (1967/1970, с. 210) заметила, что, поскольку оказалось, что

$$P(|\xi| \le 2m) \ge 0{,}89,$$

Гаусс и захотел отказаться от универсальности нормального закона. Но следует ли забывать его собственные, хотя и косвенные доводы и сомнения?

4) Независимость. Гаусс (§ 18) указал, что, если некоторое наблюдение является общим для двух функций (линейных, как он почему-то добавил лишь в § 19) результатов наблюдений, то

погрешности этих функций не будут независимыми одна от другой и среднее значение их произведения не будет поэтому равно нулю[5]. Без указанного ограничения утверждение Гаусса противоречило бы теореме Стьюдента − Фишера о независимости выборочных среднего и дисперсии при нормальном распределении.

В одном из приведённых примеров Гаусс вычислил дисперсию линейной формы независимых случайных величин. О независимости Гаусс упоминал ещё раньше (1809b, § 175; 1823b, § 15), но без пояснений, а затем (1826/1957, с. 147; 1828a, § 3) охарактеризовал взаимную зависимость величин, *известных из наблюдений,* наличием функциональных зависимостей между ними. Это означало, например, что уравненные углы треугольника, поскольку их сумма должна равняться 180° плюс сфероидический избыток, зависимы друг от друга.

Заметим, что в математической статистике понятие независимости иное. Ортогональное преобразование независимых и нормально распределённых величин приводит как бы к их “уравненным” значениям, а именно к их линейным формам определённого вида, которые тем не менее независимы (лемма Фишера; Крамер (1946, § 29.2)) . Вот подходящее утверждение Пирсона (K. Pearson 1920/1970, с. 187): для Гаусса

*наблюдённые переменные независимы, для нас* [они] [...] *коррелированы. Для него не наблюдённые переменные коррелированы ввиду их известных геометрических соотношений с наблюдаемыми; для нас* [их] *можно считать некоррелированными причинами, соединёнными с коррелированными переменными неизвестными функциональными соотношениями.*

Но в той же статье Пирсон (с. 187) сослался на предшествовавшее мнение Гальтона:

*Корреляция должна быть следствием того, что вариации двух органов были частично обусловлены общими причинами*.

5) Принцип наибольшего веса для [несмещённых] оценок. Гаусс изложил эту тему тяжеловесно, да и вообще гораздо понятнее описание у Гельмерта (Helmert 1872) и Идельсона (1947). Пусть исходные уравнения, без потери общности, имеют вид

$$a_i x + b_i y = G_i = g_i + \varepsilon_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\varepsilon_i$ – погрешность свободного члена $g_i$. Оценки неизвестных могут быть представлены линейными формами, например (если не изменять обозначений) $x = [\alpha G]$ с искомыми коэффициентами $\alpha_i$, причём

$$m_x^2 = [\alpha\alpha]m^2, \qquad (10.5)$$

где $m^2$ – дисперсия наблюдения.

Легко доказать, что $[a\alpha] = 1$, $[b\alpha] = 0$ и условие максимума веса будет

$$W = [\alpha\alpha] - 2Q_{11}[a\alpha] - 2Q_{12}[b\alpha] = \max,$$

где $Q_{11}$ и $Q_{12}$ – неопределённые множители Лагранжа. Аналогичные рассуждения и, в частности, оценка точности, подобная формуле (10.5), возможны и для остальных неизвестных. Оказывается, что оценки неизвестных определяются из нормальных уравнений, а их веса вычисляются по множителям Лагранжа типа $Q_{ii}$, которые, как и остальные множители типа $Q_{ij}$, определяются из тех же нормальных уравнений с частично единичными и частично нулевыми свободными членами. По этой причине веса можно вычислить заранее, используя известные из рекогносцировки приближённые углы триангуляции. Далее (чего Гаусс ещё не знал), множители $Q_{ij}$ связаны с ковариациями; так, $E(xy) = Q_{12}$.

6) Оценка выборочной [дисперсии]. Гаусс (§§ 37 – 38) доказал, что при $n$ наблюдениях и $k$ неизвестных дисперсия и её оценка равны соответственно

$$m^2 = E[vv]/(n-k), \quad m_o^2 = [vv]/(n-k), \qquad (10.6a, b)$$

где $v_i$ – остаточные свободные члены исходных уравнений. Вместо среднего значения приходится довольствоваться самой суммой квадратов $[vv]$. Это доказательство, с тех пор повторенное несколькими авторами, несложно, хотя несколько канительно.

Совместно с принципом наибольшего веса (наименьшей дисперсии) формулы (10.6) приводят к эффективным оценкам, как они теперь называются. Гаусс (1823a/1957, с. 146) заметил, что замена прежнего выражения (§ 8.2-5), в котором знаменатель равнялся $n$, необходима и *для достоинства науки*.

Заметим, что Гаусс подчёркивал, что оценка (10.6) не смещена, но что практически применяется не $m^2$, а смещённая оценка $m$. Во всяком случае, несмещённые оценки существуют не всегда, а смещение допускается в некоторой степени (Sprott 1978, с. 194). Наконец, Czuber (1891, с. 460), обсуждая проблему смещённости с Гельмертом, заключил, что важно не само смещение, а его относительная величина $D\sigma^2/\sigma^2$, а Eddington (1933, с. 280) независимо пришёл к тому же выводу. Гельмерт также доказал, что при нормальном распределении эта относительная ошибка минимальна для оценки (10.6b).

7) Точность оценки выборочной дисперсии. Гаусс (1823b, § 40) прямым вычислением определил границы для $Dm_o^2$ в функции четвёртого момента ошибок и указал, что для [нормального] распределения

$$Dm_o^2 = 2m^4/(n - k). \qquad (10.6c)$$

Каким-то образом он ошибся при вычислении упомянутых границ, см. (10.15); кроме того, его формулы (подправленные нами) должны были включать не $m^2$, а неизвестную величину $E\varepsilon_i^2$ ($\varepsilon_i$ – ошибки наблюдения). Из формулы (10.6c) следует, что $m_o^2$ – состоятельная оценка дисперсии и это же имеет место в общем случае, см. формулы (10.15).

8) Другие вопросы. Мы лишь упомянем, что Гаусс также определил дисперсию линейной функции оценок неизвестных (которые не являются независимыми) и предложил целесообразные схемы перевычисления при добавлении новых данных или изменении веса некоторых из них.

9) Иная схема уравнивания наблюдений. В *Дополнении* (1828a) Гаусс рассмотрел уравнительные вычисления по МНКв в соответствии со схемой условных наблюдений. В § 2.2 мы описали уравнивание косвенных наблюдений, теперь же укажем, что в геодезической практике часто удобно, наряду или вместо уравнений погрешностей типа (2.2), вводить непосредственно измеренные величины и *условные уравнения* (Гаусс ограничился гораздо более распространённым вторым случаем). Рассмотрим (более позднюю) схему цепи триангуляции, состоящую из, скажем, 10 треугольников. В ней измерен каждый угол и длины крайних сторон (базисы), направления (азимуты) которых установлены по астрономическим наблюдениям. Соотношение погрешностей наблюдений таково, что базисы и азимуты можно

считать точными; уравниваются лишь углы. Каждому измеренному углу $q_i$ будет соответствовать уравнение

$$x_i - q_i = v_i, \quad (10.7)$$

в котором первое слагаемое – истинная величина угла, а правая часть – искомая поправка его измерения. Условие замыкания, например, первого треугольника будет иметь вид (отвлекаясь от сфероидического избытка)

$$x_1 + x_2 + x_3 - 180° = 0. \quad (10.8)$$

Очень просто выглядит также азимутальное условие, которое требует, чтобы азимут первого базиса плюс алгебраическая сумма “связующих” углов равнялся азимуту второго базиса. Для перехода от длины первого базиса к длине второго нужна теорема синусов, и базисное условие оказывается тригонометрическим. Однако, используя измеренные величины, это условие можно заменить линейным и таким образом вся группа условий приводится к виду

$$[av] + w_1 = 0, [bv] + w_2 = 0, \text{ и т. д.} \quad (10.9)$$

В эти уравнения, которые должны соблюдаться точно, вместо $x_i$ введены их значения по уравнениям (10.7), а число слагаемых в квадратных скобках равно либо, как в уравнениях типа (10.8), трём, либо зависит от количества треугольников в цепи. Собственно уравнивание состоит в определении условного минимума $[vv]$ с обычным применением множителей Лагранжа. Величины $v_i$ выражаются через эти множители, последние же определяются из уравнений (10.9). Как ни странно, но подобное пояснение сути указанной схемы появилось только у Гельмерта (Helmert 1872, с. 197).

10) Новое прочтение мемуара Гаусс (1823), см. Шейнин (2012а). Гаусс мог вывести формулы (10.6) в самом начале мемуара, после введения дисперсии (§ 10А.4-2), ибо требуемые условия (линейность исходных уравнений и независимость и несмещённость их свободных членов и оценок неизвестных) не зависели от дальнейшего изложения. А поскольку условие МНКв немедленно следует из этих формул, мемуар существенно упрощается. Сотни учебников и руководств излагали МНКв на

основе мемуара Гаусса 1809 г. ввиду его сравнительной простоты, но оказывается, что вполне возможно основываться на окончательном варианте, на мемуаре 1823 г. Само существование этого варианта (Eisenhart 1964, с. 24)

*видимо практически неизвестно почти никому из американцев, применяющих МНКв, за исключением студентов, изучающих повышенный курс математической статистики*.

На сложность этого варианта указал, например, Stewart (1995, с. 222): *Нужно быть очень великодушным, чтобы заключить, что Гаусс действительно что-то доказал* [в §§ 12 и 13]. Можно считать, что Гаусс привёл два независимых вывода условия МНКв, но даже не намекнул на это обстоятельство. Вот снова Стьюарт (там же, с. 235): *Гаусс может быть таким же загадочным для нас, каким он был для своих современников*.
И вот мнение Кронекера (Kronecker 1901, с. 42):
*Способ изложения в Арифметических* [исследованиях 1801 г.], *как и вообще в работах Гаусса, евклидов. Он формулирует и доказывает теоремы, причём тщательно уничтожает все следы хода своих мыслей* […]

Самые выдающиеся естествоиспытатели (Больцман 1896/1909, с. 570) и математики (Чебышев, см. § 14.2-7) плохо представляли себе соответствующие сочинения Гаусса.

### 10А.5. Дополнительные соображения

Обосновав МНКв, Гаусс, все же отступал от формальных правил; один подобный пример см. в начале § 7.3.2. Здесь, мы продолжим эту тему.

1) Количество наблюдений. Во времена Гаусса методика геодезических наблюдений ещё не была отработана (и он сам исключительно плодотворно ей занимался). Он также не мог не понимать, что формальная оценка точности результатов отражает реальность, только если она учитывает “замыкания” треугольников, равно как и базисное и азимутальное условия, т.е. если она проводится после окончания всех полевых работ. Неудивительно, что на каждой станции Гаусс наблюдал до тех пор, пока не убеждался в ненужности дальнейшей работы, см. нашу гл. 7, конец Прим. 10. Так же, ссылаясь на него, поступал его ученик Герлинг (C. L. Gerling), см. Шейнин (1994а, с. 263). В той же статье (с. 266) мы сообщили об аналогичном мнении других авторов начиная с Бейеса.

2) Отбраковка уклоняющихся наблюдений. Эта деликатная

операция не поддаётся формальному исследованию уже потому, что результаты наблюдений искажены систематическими ошибками, а отличить просчёт от “законной” крупной ошибки трудно. Математико-статистические критерии (появившиеся после Гаусса) не получили широкого применения в теории ошибок, сам же Гаусс (письмо Ольберсу 3 мая 1827 г., *W*-8, с. 152 – 153) указал, что при не очень большом числе наблюдений и отсутствии основательных знаний предмета отбраковка *всегда сомнительна*. В 1841 г. он (W-12, с. 201 – 204) заметил, что в приложениях теории вероятностей можно сильно ошибиться, если исходить только из чисел без учёта всех знаний существа дела.

Вот мнение авторов книги, посвящённой изучению отклоняющихся наблюдений в статистике (Bartlett & Lewis 1978, с. 360):

*В конце концов, при изучении отклоняющихся наблюдений основная проблема остаётся той же самой, какой она была для самых первых исследователей: что такое уклоняющееся наблюдение, и как следует поступать с ними*?

3) Вычисления. Не имея даже арифмометра, Гаусс тем не менее проводил серьёзные вычисления. Так, он однажды решил систему из 55 нормальных уравнений (письмо Ольберсу 14 мая 1826 г.; *W*-9, с. 320), см. также Шейнин (1979, с. 53). Иногда он решал нормальные уравнения методом итераций (письмо Герлингу 26 дек. 1823 г.; там же, с. 278 – 281), о чём впервые сообщил сам Герлинг в 1843 г. См. также Forsythe (1951) и Шейнин (1963). Интересно и замечание Гаусса (1809b, § 185), которое он, правда, не сопроводил количественными оценками, о том, что *часто бывает достаточно* вычислять коэффициенты нормальных уравнений приближённо. Это замечание использовал американский астроном Bond (1857), а затем, со ссылкой на него, Ньюком (Newcomb 1897a, с. 31).

Как вычислитель высочайшего класса (Maennchen 1918/1930, с. 3),

*Гаусс часто подходил к своим открытиям при помощи точных и мучительных для ума вычислений.* [...] *Мы находим* [в его работах] *длинные таблицы, чьё составление само по себе целиком заняло бы рабочую жизнь нескольких вычислителей обычного толка.*

Менхен не рассматривал геодезических вычислений Гаусса возможно потому, что в то время математики ещё не интересовались решением систем линейных алгебраических уравнений. Мы заметим, что при составлении одной таблицы смертности Гаусс (*W*-8, с. 155 – 156) каким-то образом вычислил значения функций $b^n$ и $c^n$ для $n$ = 3 и 7(5)97 при lg*b* = 0,039097 и lg*c* = 0,0042225.

И вот вывод Субботина (1956, с. 297) об определении орбит небесных тел, но пригодный и для нашей темы: Лагранж и Лаплас

*Ограничились лишь математической стороной дела, тогда как Гаусс не только тщательно обработал своё решение с точки зрения вычислительной техники, но и учёл все условия работы и все привычки астрономов-вычислителей.*

4) Оценка точности (Шейнин 1994a, с. 265 – 266). В письмах Бесселю в 1821 г. и Герлингу в 1844 и 1847 гг. Гаусс указал, что оценка точности, основанная на небольшом числе наблюдений, ненадёжна. В 1844 г. он объединил наблюдения на нескольких станциях и отнёсся к ним как к единому целому, ср. вычисления Лапласа в § 8.2-7. А в 1847 г. Гаусс заявил, что при отсутствии достаточных наблюдений лучше основываться на общем знании ситуации.

## 10А.6. Дальнейшие сведения о методе наименьших квадратов

1) Несмотря на мнение Гаусса, первое обоснование МНКв стало общепризнанным (Шейнин 1995c, § 3.4), в частности потому, что погрешности наблюдений действительно оказывались примерно нормальными, а его зрелое сочинение (1823b) было слишком абстрактным. Работы Кетле (§ 11.5) и Максвелла (§ 11.8.5) существенно поддержали мысль об универсальности нормального закона. Впрочем, примеры уклонений от него постепенно накапливались и в астрономии, и в других областях естествознания, равно как и в статистике (Шейнин 1995c, § 3.5 и Ньюком, см. § 11.8.4, и снова Кетле). В § 10С описано стремление Бесселя скрыть подобные уклонения.

Даже независимо от указанного несколько авторов выступило против первого обоснования. Наиболее известным из них является Марков (1899a), который сослался на самого Гаусса (на его письмо 1839 г. Бесселю, упомянутое в § 10А.4-2), первым же его предшественником был Айвори (§ 11.9.1).

Иногда и второе обоснование также отвергалось. Бьенеме (Bienaymé 1852, с. 37) заявил, что, в отличие от Лапласа, Гаусс в

1823 г. представил не доказательства, а соображения; конкретно он заметил, что необходимо (для лапласова варианта теории ошибок, практически же не обязательно) большое число наблюдений и что важна, как можно сейчас сказать, совместная эффективность оценок. Она осуществляется при применении МНКв и нормальном распределении ошибок наблюдений в классе несмещённых регулярных оценок[6].

Бертран (1888а, с. 248) высказался в пользу второго обоснования, но (с. 267) указал, что при малых погрешностях чётное распределение может быть приближённо представлено экспоненциальной функцией отрицательного квадрата, т. е. что первое обоснование всё-таки приблизительно верно. См. также отрицательное мнение Пуанкаре в § 12.2-8.

2) Обосновав МНКв в 1823 г. по-другому, Гаусс стал называть получаемые оценки *надежнейшими* (*maxime plausibiles*, или (1821) *sicherste*), а не, как прежде, *вероятнейшими* (*maxime probabile*, *wahrscheinlichste*). Колмогоров (1946), а затем, без ссылки на него, Хальд (Hald 1998, с. 473 – 474) вывели условие МНКв по принципу наименьшей дисперсии на языке многомерной геометрии. Кроме того, Колмогоров (с. 64) посчитал, что формулу (10.6а) следует все-таки считать определением. Заметим, что еще Цингер (1862, § 33) заявил, что в ней уже *скрывается* МНКв. Примерно то же заметил Harter (1977, с. 28).

3) Математики не обращали должного внимания на труды Гаусса по МНКв (§§ 10А4-10 и 14.2-7), да и статистики были плохо знакомы с ними, см. Эпиграф к этой книге. И вот Eisenhart (1978, с. 382):

*Когда в 1890-е годы Карл Пирсон и Юл начали заниматься математической теорией корреляции, они обнаружили, что можно было сразу же применить многое из математического инструментария, разработанного Гауссом* […]. *Его вклад в метод наименьших квадратов включает математику, существенную для статистической теории и её приложений почти ко всем нынешним отраслям науки*.

### 10Б. Гельмерт

В основном именно Гельмерт завершил построение классической гауссовой теории ошибок, а некоторые его результаты оказались интересными и для математической статистики. Schumann (1917, с. 97) справедливо назвал его *мастером низшей и высшей геодезии*. Его руководство (Helmert

1872) оставалось лучшим источником по теории ошибок и уравниванию триангуляции вплоть до 1930-х годов. В его третьем, посмертном издании 1924 г. мы находим несколько строк, подписанных геодезистом (H. Hohenner), который по просьбе издательства сообщил, что книга Гельмерта всё ещё остаётся лучшей в своём роде; его мнение оказалось решающим.

Именно Гельмерт (1886, с. 1 и 86) ввёл в геодезическую практику замену звеньев триангуляции геодезическими линиями, и этот приём, усовершенствованный Ф. Н. Красовским, лёг в основу уравнивания астрономо-геодезической сети Советского Союза (Закатов 1950, § 91). В своём менее известном сочинении Гельмерт (1868) изучал, как добиться необходимой точности геодезической сети при наименьших затратах или достичь её максимально возможной точности при заданных затратах. Некоторые уравнения, возникающие при уравнивании в геодезии, не являются ни линейными, ни даже алгебраическими; они, правда, могут быть приведены к линейным (§ 10А.4-9), и Гельмерт мог бы придти к некоторым элементам линейного программирования, но этого не произошло. Он все же заметил, что выгодно вообще не измерять некоторых углов, ср. § 10А.2-1, но практически приходится от такой мысли отказаться, поскольку требуется контролировать всю работу в целом.

Мы теперь рассмотрим отдельные результаты Гельмерта.

1) Распределение хи-квадрат. Мы (1966b) заметили, что его вывел Аббе (E. Abbe 1863; M. G. Kendall 1971) как распределение суммы квадратов нормально распределённых погрешностей. Он имел в виду предложить критерий для выявления систематических ошибок, а для этого ему, в частности, потребовалось распределение суммы квадратов погрешностей, т. е. той их функции, которая отражала систематические влияния. Именно критерий, а не распределение хи-квадрат, неоднократно описывался в геодезической литературе, Линник же (1958, с. 110 – 113) ввёл видоизменённый критерий Аббе.

Гельмерт (1876b) предложил свой собственный вывод распределения хи-квадрат, опубликовав этот результат ранее (1875a) без обоснования. На Аббе он не сослался ни тогда, ни много позже (см. пункт 2). Он, собственно, продолжал исследование Гаусса 1816 г. (§ 10А.3), рассматривая погрешности наблюдений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n$ и сумму их степеней $\sum\varepsilon_i^n$ для равномерного и нормального распределений, а также для произвольного распределения при $n \to \infty$; в последнем случае он доказал формулу Гаусса (10.4) и специализировал её для указанных распределений, см. § 10А4-1. Распределение хи-квадрат Гельмерт вывел по индукции начиная с $n = 1$ и 2, модернизированный вывод см. Хальд (1952/1960, с. 258 – 261).

2) Много позже Гельмерт (1905) предложил несколько критериев для выявления систематических влияний в серии ошибок, которую он записал в виде

$$v_1\varepsilon_1 + v_2\varepsilon_2 + ... + v_n\varepsilon_n$$

при $v_i = 1$ или $-1$ и $\varepsilon_i > 0$. Он основывался на формуле

$$P(|\xi - E\xi| \le m) \approx 0{,}68, \qquad (10.10)$$

где $m$ – средняя квадратическая ошибка $\xi$ (и тем самым молчаливо ограничился нормальным распределением): если неравенство в левой части формулы не выполнялось, то, как считал Гельмерт, имели место систематические погрешности. При выводе критериев Гельмерт рассматривал $\sum v_i$, $\sum|v_i|$, серии знаков $v_i$ а также и функции самих ошибок $\varepsilon_i$ и в этом последнем случае предложил несколько видоизменений критерия Аббе.

3) Формула Петерса (Peters 1856) для средней абсолютной ошибки. При $n$ наблюдениях и нормальном распределении ошибок $\varepsilon_i$ она имела вид

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{n} |v_i|}{\sqrt{n(n-1)}}, \qquad (10.11)$$

где $v_i$ – уклонения наблюдений от среднего.

Гельмерт (1875b) вывел формулу (10.11) заново, поскольку Петерс молчаливо и ошибочно предположил, что $v_i$ взаимно независимы. Перейдя вначале к ошибкам $\varepsilon_i$, он вычислил соответствующий кратный интеграл, применив для этого разрывный множитель Дирихле. Впрочем, поскольку нормальное распределение устойчиво, мы теперь можем сразу сказать (H. A. David 1957), что формула (10.11) все-таки верна, так как

$$E\sum_{i=1}^{n} |v_i| = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{h\sqrt{®}},$$

где $h$ – мера точности исходного нормального распределения и, как и должно быть, $\theta = 1/h\sqrt{\pi}$. Гельмерт кроме того попытался обобщить формулу Петерса, рассмотрев косвенные наблюдения с $k$ неизвестными ($k > 1$). Соответствующую формулу он не смог вывести, но доказал, что простая замена $(n - 1)$ в формуле (10.10) на $(n - k)$ занижает абсолютную ошибку.

4) Гельмерт (1876b) подсчитал дисперсию оценки (10.11). Основная трудность заключалась в вычислении $E|v_i v_j|$, $i < j$. Преодолев её, Гельмерт получил дисперсию в виде

$$\{\pi/2 + \arcsin[1/(n - 1)] - n + \sqrt{n(n-2)}\}/\pi n h^2.$$

Впоследствии Фишер (Fisher 1920, с. 761) вывел эту формулу независимо.

5) В той же статье Гельмерт исследовал точность формулы Гаусса (10.6b). Для случая непосредственных наблюдений её можно заменить формулой для средней квадратической ошибки

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}.$$

Гельмерт вывел её для нормального распределения по принципу наибольшего правдоподобия, но не обратил внимания на то, что полученная оценка (которая, впрочем, непосредственно следует из (10.6b) и всегда применялась на практике в геодезии), в отличие от формулы Гаусса, смещена.

Обозначим ошибки наблюдений через $\varepsilon_i$ и их среднее через $\varepsilon$, тогда

$$v_i = \varepsilon_i - \varepsilon$$

и *вероятность* реализации системы этих ошибок равна, как указал Гельмерт в процессе своего доказательства,

$$P = n(h/\sqrt{\pi})^n \exp[-h^2([vv] + n\varepsilon^2)]dv_1 dv_2 \dots dv_{n-1} d\varepsilon. \quad (10.12)$$

Эта формула показывает, что при нормальном распределении $[vv]$, – стало быть и дисперсия, – и среднее арифметическое независимы. Гельмерт тем самым доказал важную теорему

Стьюдента – Фишера, хотя и не обратил на неё никакого внимания.

Отметим особый штрих в рассуждении Гельмерта: формулу Гаусса (10.6a) для случая непосредственных наблюдений (и, повторим, нормального распределения) с учетом (10.6c) он записал в виде

$$m_o^2 = \frac{[vv]}{n-1}[1 \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}], \qquad (10.13)$$

т. е. прибавил к дисперсии её среднюю квадратическую ошибку. Использование этой ошибки с двойным знаком стало стандартным в теории ошибок по крайней мере после Гельмерта, и подобную же практику можно видеть и у Гаусса (1816, §§ 6 и 8), хотя и не всегда (там же, § 2). Формула (10.13) указывает и относительную среднюю квадратическую ошибку, см. § 10A.4-6.

Гельмерт кроме того заметил, что при малом $n$ дисперсия $Dm_o^2$ плохо оценивает точность формулы (10.6b) и дополнительно вывел формулу

$$E[m - \frac{[vv]}{\sqrt{n-1}}]^2 = \frac{1}{h^2}[1 - \frac{\sqrt{2}\,\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]\sqrt{n-1}}] \qquad (10.14)$$

в следующем порядке. Исходя из вероятности системы уклонений $v_i$, $i = 1, 2, ..., n - 1$,

$$P = \sqrt{n}(h/\sqrt{\pi})^{n-1}\exp(-h^2[vv])dv_1dv_2 \ldots dv_{n-1},$$

которая, естественно, следует из формулы (10.12), он заметил, что вероятность $P(\varepsilon \le [vv] \le \varepsilon + d\varepsilon)$ равна соответствующему интегралу от её правой части и ввёл новые переменные

$$t_1 = \sqrt{2}(v_1 + 1/2\, v_2 + 1/2\, v_3 + 1/2\, v_4 + \ldots + 1/2\, v_{n-1}),$$
$$t_2 = \sqrt{(3/2)}(v_2 + 1/3\, v_3 + 1/3\, v_4 + \ldots + 1/3\, v_{n-1}),$$
$$t_3 = \sqrt{(4/3)}(v_3 + 1/4\, v_4 + \ldots + 1/4\, v_{n-1}), \ldots,$$
$$t_{n-1} = \sqrt{n/(n-1)}\, v_{n-1}.$$

При этом $[vv] = [tt]$, где первая сумма состоит из $n$ членов, а вторая – из $(n - 1)$ членов и якобиан преобразования равен $\sqrt{n}$. Вывод формулы (10.14) следовал теперь сразу же, поскольку распределение хи-квадрат было известно Гельмерту. Взятые совместно, преобразования от {ε} к {$v$} и от {$v$} к {$t$} называются по его имени.

Краскл (Kruskal 1946) преобразовал формулу (10.12), введя взамен двумерное *распределение Гельмерта* с переменными

$$S = \sqrt{[vv]/n},\ u = x - \mu,$$

где $x$ – среднее арифметическое из $n$ наблюдений, имеющих нормальное распределение $N(\mu;\ \sigma)$ и применил также σ взамен $h$. Он сослался на нескольких авторов, которые различным образом выводили это новое распределение, сам вывел его по индукции и указал, что из него следует распределение Стьюдента (см. Хальд 1998, с. 424).

Наконец, Гельмерт уточнил указанные Гауссом границы оценки (10.6b) и обнаружил, что левая граница должна быть иной. Его результат независимо повторили Колмогоров и др. (1947). Вот, стало быть, окончательные интервалы (достижимость нижней границы доказал Мальцев (1947)) для $(n-k)\mathrm{D}m_0^2$; $s^2 = \mathrm{E}m^2$, $\nu_4$ – четвёртый момент ошибок:

$$[(\nu_4 - s^4) - (k/n)(\nu_4 - 3s^4);\ (\nu_4 - s^4)],\ \nu_4 - 3s^4 \ge 0, \quad (10.15a)$$
$$[(\nu_4 - s^4);\ (\nu_4 - s^4) + (k/n)(3s^4 - \nu_4)],\ \nu_4 - 3s^4 \le 0. \quad (10.15b)$$

Соответствующие интервалы для $\mathrm{D}m_0^2$ имели вид

$$2(v_4 - 2s^4)/(n-k);\ [1/(n-k)](v_4 - s^4) + (k/n)(2s^4 - v_4).$$

## 10С. Бессель

Гаусс и Бессель явились зачинателями нового направления в практической астрономии и геодезии, которое требовало тщательной поверки и юстировки инструментов и исследования надёжности методов наблюдения. Вот мнение Ньюкома (Schmeidler 1984, с. 32 – 33), который упомянул *немецкую школу практической астрономии*, хотя и назвал только Бесселя. Основная идея этой школы состояла в том, что каждый прибор обвинялся

*Во всех возможных недостатках и не оправдывался до тех пор, пока не доказывал себя безупречным во всём. Бессель усовершенствовал приёмы определения возможных* *погрешностей приборов с изобретательностью и точностью геометрического метода.*

Но и Гаусс, и Бессель усовершенствовали и методы наблюдения. О Гауссе см. также Hermann (1976).

Мы неоднократно упоминали Бесселя. Его достижения в астрономии и геодезии общеизвестны; помимо уже указанных назовём лишь определение астрономических констант, первое измерение параллакса звезды, открытие личного уравнения, разработку одного метода уравнивания триангуляции и вывод параметров земного эллипсоида. Он (1838а) также определял плотность распределения погрешности наблюдения, составленной из многих разнородных составляющих, однако строгое решение подобных задач, если быть может исключить один мемуар Коши (§ 11.1), оказалось возможным лишь много позже (§ 14.1-4)[7].

Личное уравнение (или личная ошибка) данного наблюдателя это присущая ему систематическая ошибка в регистрации моментов прохождения звезды через крест нитей астрономического инструмента. Она может быть установлена (но не определена) по наблюдениям двух астрономов, которые приходилось проводить в разное время. Наблюдения поэтому надо было "редуцировать", учитывая при этом поправку часов. Бессель (1823) так и делал, кроме как в одном случае. В результате соответствующие наблюдения оказались бесполезными, однако он этого почему-то не заметил.

Бессель (1838а, §§ 1 и 2) определил плотности распределения двух функций непрерывно и равномерно распределённой случайной величины. Подобные задачи решал ещё Лаплас, но именно Бессель чётко сформулировал их. Тем не менее, он допустил ошибки при вычислении соответствующих дисперсий и вероятных ошибок[8]. Впрочем, в § 2 Бессель указал интересный пример погрешности с антимодальной плотностью распределения.

Изучая наблюдения Брадлея, Бессель (1818) заметил, что крупные ошибки произошли *немного чаще*, чем следовало бы (по нормальному распределению), но что при большем числе наблюдений это расхождение исчезло бы. Но небольшие ошибки должны были встретиться реже (чего Бессель не отметил), а количество наблюдений Брадлея измерялось сотнями. Бессель (1838а, § 11) снова исследовал те же наблюдения, должен был заметить, что они не вполне удовлетворяли нормальному распределению, но сформулировал противоположный вывод. Он таким образом упустил случай первым заметить уклонения высокоточных наблюдений от нормальности. Впоследствии этот факт отмечался неоднократно, и в первую очередь следует здесь назвать Ньюкома (1886). Но вот главное. Сочинение Бесселя (1838а) содержало попытку доказательства ЦПТ, и можно думать, что он не заметил уклонений о нормальности, чтобы *спасти* своё доказательство.

После Гаусса все углы на отдельных станциях триангуляции начали, как правило, наблюдать с одним и тем же весом, что значительно облегчало выполнение комплекса всех вычислительных работ и, что ещё важнее, позволяло считать все наблюдения независимыми друг от друга. Бессель (Шейнин 2001d), однако, полагал возможным отказаться от указанного (иногда тяжёлого) условия, но зато совместно уравнивать станции и сеть триангуляции. Имеются свидетельства того, что фактический отказ от его метода раздражал Бесселя[9].

### Примечания

**1.** Под этим методом, строго говоря, мы понимаем его окончательную разработку Гауссом в 1823 г. До этого времени следует обсуждать лишь принцип наименьших квадратов.

**2.** Эдрейн поместил свою работу в издаваемом им журнале за 1808 г., однако соответствующий номер журнала вышел в свет в 1809 г. (Hogan 1977). В библиотеке Эдрейна находился (с каких пор?) экземпляр мемуара Лежандра (Coolidge 1926), в котором, повторяем, нормального распределения все-таки не было. Термин “нормальное распределение” появился в 1873 г. (Kruskal 1978) и окончательно закрепился в 1894 г. (К. Пирсон).

**3.** Их мнение не должно быть забыто, и вот еще один пример. Энке (Encke 1851, с. 2) полагал, что Гаусс применил МНКв при определении орбиты Цереры, первой найденной малой планеты (Гаусс не комментировал этого высказывания).

В гл. 7, Прим. 19, мы упоминали о недопустимой развязности одного современного автора по отношению к Эйлеру. Ничуть не лучше он (Stigler 1981; 1986) обошёлся с Гауссом. Вот его высказывания (1986). Лежандр *сразу же понял потенциальные возможности* МНКв (с. 57), про Гаусса же этого сказать нельзя (с. 146). Далее (с. 143): лишь Лаплас спас первое гауссово обоснование МНКв от забвения *в накапливаемой куче искусственных* (ad hoc) *построений*; и, наконец (с. 145), Гаусс *выпрашивал у друзей неохотные свидетельства* о том, что он сообщил им о МНКв до 1805 г. Мы (Шейнин 1999b; 1999d) полностью опровергли эти грязные домыслы, которые Стиглер, – первый (и, надеемся, последний), кто посмел оклеветать величайшего учёного, – чуть сдержаннее повторил в своей новой книге (1999), см. также § 10А.1.4. К сожалению, ни один автор нас не поддержал; напротив, первая книга Стиглера была встречена с восторгом, хотя он ещё и упустил древнюю историю, а также Кеплера, Ламберта, Даниила Бернулли, Гельмерта и нескольких других учёных. Хальд (Hald 1998, с. XVI), серьёзнейшее исследование которого достойно всяческого уважения, назвал эту книгу *эпохальной*. Мы не в состоянии понять подобное отношение к истории науки.

**4.** В 1861 г. студент Московского университета Догель выпустил её первый русский перевод, см. *Русская энц.*, т. 5, с. 201 (год издания неизвестен, но т. 1 вышел в 1911 г.). Фамилия переводчика там не указана. Но этот перевод включён в каталог книг Библиотеки АН.

**5.** Уместно добавить, что астрономо-геодезическая сеть СССР строилась так, что её звенья оказывались независимыми друг от друга в смысле Гаусса. Наряду с другими условиями это давало возможность реально оценивать точность всей огромной сети (Закатов 1950, с. 369 – 371). И вообще геодезисты, быть может не ссылаясь на Гаусса, восприняли его мнение. Особо заметим, что Каптейн (Kapteyn 1912), разочаровавшись в возникшей к тому времени теории корреляции и также не вспомнив о Гауссе, предложил количественно оценивать зависимость между сериями или функциями наблюдений исходя из того же понятия независимости, см. Шейнин (1984a, § 9.2.1). Его статья не была, к сожалению, замечена.

**6.** Относительно этого сравнительно редко упоминаемого понятия см. Крамер (1946, § 9.2.1).

**7.** В 1839 г. Гаусс (*W*-8, с. 146 – 147) сообщил Бесселю, что с интересом воспринял изложение его работы (1838a), существо же исследования было ему в принципе знакомо уже много лет.

**8.** Мы (Шейнин 2000b) нашли 33 ошибки в арифметических и простейших алгебраических действиях в сочинениях Бесселя, собранных в его *Abhandlungen* (1876). Не будучи существенными, они указывают на его невнимательность и подрывают веру в надёжность его более сложных вычислений. См. также Шейнин (2016b).

**9.** Гаусс поссорился с Бесселем во время их встречи в 1825 г., но никаких подробностей этого эпизода не сохранилось (Шейнин 2001d, с. 168); уже в 1817 г. Ольберс сообщил последнему, что жалеет об их плохих отношениях (Erman 1852, Bd. 2, с. 69). В 1812 г., в письме Ольберсу, Бессель (там же, т. 1, с. 345) назвал Гаусса *всё же* изобретателем МНКв, но в 1844 г., в письме Гумбольдту (Шейнин 2001d, с. 168), подчеркнул приоритет Лежандра.
Там же (с. 171) мы сообщили, что в 1843 г. в переписке с Герлингом Бессель заявлял о своём приоритете в уравнивании триангуляции по МНКв, Гаусса же он не упоминал.

# 11. Вторая половина XIX века

Здесь мы рассматриваем работы отдельных учёных (§§ 11.1 – 11.6), статистику (§ 11.7) и приложение статистики к различным отраслям естествознания (§ 11.8). Результаты нескольких естествоиспытателей оказалось, однако, желательным описать отдельно (§ 11.9).

## 11.1. О. Л. Коши

Коши опубликовал не менее 10 мемуаров по математической обработке наблюдений и теории вероятностей, восемь из которых (включая упоминаемые ниже работы 1853 г.) перепечатаны в 12-м томе 1-й серии его *Oeuvres complètes* (1900). В частности, он исследовал обработку наблюдений при помощи принципа минимакса (§ 7.3.2) и доказал ту теорему линейного программирования, которая была известна Гауссу (§ 10А.2.1). Он также применял метод средних (§ 7.3.2), и впоследствии Линник (1958, § 14.5) со ссылкой на Л. С. Бартеньеву выяснил, что соответствующие оценки являются несмещёнными и подсчитал их эффективность для случаев одного и двух неизвестного (неизвестных)[1]. Кратко опишем несколько мемуаров.

Коши (1853b) отыскивал чётную плотность распределения ошибок при условии максимальной вероятности для погрешности одного из неизвестных, входящих в исходные уравнения типа (2.2), находиться в заданном интервале. Он получил не саму плотность, а соответствующую характеристическую функцию

$$\varphi(\theta) = \exp(-c\theta^{\mu+1}),\ c,\ \theta > 0,\ \mu \text{ вещественно} \qquad (11.1)$$

и заметил, что случаи μ = 1 и 0 приводят, соответственно, к [нормальному закону] и *распределению Коши*, см. § 9.6. Функция (11.1) является характеристической лишь при 1 < μ ≤ 1, а соответствующие распределения оказываются при этом устойчивыми.

В двух мемуарах Коши (1853c; 1853d) доказывал ЦПТ для линейной функции

$$A = [m\varepsilon] \qquad (11.2)$$

[независимых] погрешностей $\varepsilon_i$, обладающих чётной плотностью на конечном интервале. В обоих случаях он ввёл характеристические функции для погрешностей и для функции (11.2), получил для последней выражение

$$\Phi(\theta) = \exp(-\,s\theta^2),$$

в котором $2s$ оказалось близким к дисперсии функции (11.2) $\sigma^2$, и, окончательно,

$$P(-\,\alpha \le A \le \alpha) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha} \exp(-\,x^2/2\sigma^2)dx.$$

Очень важно, что Коши привёл и оценки погрешностей, возникающих при сделанных им предположениях, и Фрейденталь (Freudenthal 1971, с. 142) заявил, что доказательство Коши является строгим *даже по современным стандартам*. Впрочем, см. § 14.1-4.

Коши уделил немало внимания интерполяции функций и, в связи с этим, МНКв, но ни разу (как и Пуассон) не вспомнил о Гауссе. В одном случае он (1853a, с. 78 – 79) указал, что МНКв обеспечивает вероятнейшие результаты только в соответствии с результатами Лапласа [только если распределение ошибок нормально] и, по контексту, полагал это существенным недостатком метода.

## 11.2. И. Ж. Бьенеме

Мы опишем основные результаты Бьенеме в основном по книге Хейде и Сенеты (Heyde & Seneta 1977, сокращённо ХС). Две рукописи Бьенеме и другие его архивные материалы опубликовали Bru и др. (1997).

1) Предельная теорема (Bienaymé 1838; ХС, с. 98 – 103). Бьенеме *в основном* доказал теорему, которую впоследствии строго обосновал Мизес (Mises 1919; 1964a). Оговорка *в основном* содержится в издании Мизес (1964b, с. 352) и там же, на с. 352 – 355, воспроизведён его результат 1919 г. Пусть произведено $n$ испытаний, в каждом из которых с вероятностью $\theta_i$ появляется событие $A_i$ из числа взаимоисключающих событий и пусть $x_i$ – количество появлений $A_i$ и $\Sigma x_i = n$. Полагая, что $\theta_i$ – случайные переменные, Бьенеме рассмотрел их линейную

функцию в предельном случае $x_i$, $n \to \infty$, $x_i/n = C_i$. Предварительно ему пришлось выводить апостериорное распределение $\theta_i$ при заданных $x_i$ и молчаливо считать, что первые $(m - 1)$ этих вероятностей обладают равномерным априорным распределением. Фактически Бьенеме доказал, что при возрастании числа полиномиальных испытаний предположение о равномерности априорных распределений становится несущественным.

Заметим, что ещё раньше чем Чубер, на которого Мизес ссылался как на своего предшественника, Некрасов (1890), приняв некоторые естественные ограничения, доказал аналогичное предложение для схемы Бернулли.

2) Неравенства Ляпунова (Бьенеме 1840b; ХС, с. 111 – 112). Без доказательства[2] Бьенеме выписал неравенства для абсолютных начальных моментов дискретных случайных величин, которые можно записать в виде

$$(\mathrm{E}|\xi|^m)^{1/m} \le (\mathrm{E}|\xi|^n)^{1/n},\ 0 \le m \le n.$$

Впоследствии Ляпунов (1901a/1954, § 1) установил, что

$$(\mathrm{E}|\xi|^m)^{s-n} < (\mathrm{E}|\xi|^n)^{s-m} < (\mathrm{E}|\xi|^s)^{m-n},\ s > m > n \ge 0$$

и использовал это выражение при доказательстве [ЦПТ].

3) Закон больших чисел. Бьенеме (1839) заметил, что колебания средних статистических показателей обычно оказываются бóльшими нежели следовало ожидать по ЗБЧ Бернулли. Это, по его мнению, было вызвано тем, что некоторые причины, воздействующие на изучаемые события, оставаясь постоянными в пределах данной серии наблюдений, существенно изменяются при переходе к следующей. Мысль Бьенеме впоследствии подхватили Курно, Лексис и другие *континентальные* статистики (§ 16.1), а в теории ошибок она формулируется в терминах систематических погрешностей. Бьенеме, кроме того, почему-то истолковал теорему Бернулли как попытку изучать подобные схемы действия причин.

Последнее соображение Бьенеме повторил через много лет (1855/1876). Там же (с. 202) он ошибочно свёл ЗБЧ Пуассона к случаю переменных вероятностей, среднее значение которых якобы просто заменяет постоянную вероятность у Бернулли, см. также ХС, § 3.3.

4) Неравенство Бьенеме – Чебышева (Бьенеме 1853; ХС, с. 121 – 124; Гнеденко и Шейнин 1978, с. 222 – 225). Так называется знаменитое неравенство

$$P(|\xi - E\xi| < \beta) > 1 - D\xi/\beta^2, \beta > 0. \quad (11.3)$$

По поводу его названия и связанного с ним метода моментов высказывались различные мнения. Марков касался этой темы четыре раза. В 1912 г., во Введении к немецкому изданию своего Руководства, он упомянул *примечательный метод Бьенеме – Чебышева*. В том же году Марков (1912b, с. 218) заявил:

*Утверждение П. А. Некрасова, что идея Бьенеме исчерпана* [трудами Чебышева], *уничтожается указанием на ряд моих статей, содержащих распространение метода Бьенеме* ... [на исследование зависимых случайных величин].

Далее, Марков (1914b, с. 14) добавил, что Бьенеме сформулировал *основные пункты* второго чебышевского доказательства ЗБЧ и что сам Чебышев в 1874 г. назвал это своё доказательство результатом метода моментов Бьенеме. Всё же он посчитал *более правильным* назвать метод моментов по имени и Бьенеме, и Чебышева, а *иногда* лишь по имени Чебышева, поскольку лишь в связи с его работами [особенно по ЦПТ] он *приобрёл значение*. Наконец, Марков (1924, с. 92) заметил, что связывает неравенство (11.3) с Бьенеме и Чебышевым. Первый вывел его, но обставил неравенство *частными предположениями*, второй же впервые чётко сформулировал и доказал его. Бьенеме (1853/1867, с. 171 – 172) рассматривал сумму случайных величин, видимо, по контексту всего мемуара, распределённых по одному и тому же закону, а не произвольную величину ξ, как в формуле (11.3), и это обстоятельство Марков, возможно, и имел в виду. Хейде и Сенета (с. 122 – 123) назвали его доказательство, в отличие от чебышевского (см. наш § 14.1-3), *кратким, несложным и ныне часто повторяемым*. Да, Хальд (1998, с. 510) повторил это доказательство всего в нескольких строках (и избавился от суммы, полагая, что она состоит только из одного члена), и примерно его же, но без ссылки на Бьенеме, можно найти у Гнеденко (1950/1954, с. 187 – 188).

Заметим (Гнеденко и Шейнин 1978, с. 224; Seneta 1998, с. 296), что Бьенеме вряд ли считал своё неравенство значительным результатом. В основном он доказывал, что именно дисперсия является единственно приемлемой мерой точности в теории ошибок и в этой связи сравнивал её с четвертым моментом сумм случайных [и независимых] погрешностей. По этой причине и тем более потому, что Бьенеме не выписал в явном виде ни одного интеграла, мы полагаем, что Чебышев (1874/1948, с. 63) переоценил роль своего предшественника в создании метода моментов. Вот слова Чебышева:

*знаменитый учёный предлагает метод, заслуживающий особенного внимания.* [Он] *состоит в определении предельной величины интеграла* [...] *по величинам интегралов ...*

Подынтегральная функция в первом из упомянутых интегралов была $f(x)$, а его пределы – [0; $a$]; в последующих интегралах – $xf(x)$, $x^2f(x)$, ... и пределы [0; $A$], $A > a$, притом $f(x) > 0$.

5) Восходящие и нисходящие серии (Бьенеме 1874; 1875; ХС, с. 124 – 128). Пусть дано $n$ наблюдений непрерывной случайной величины. Бьенеме указал без доказательства, что количество интервалов между точками экстремумов (почти равное числу экстремумов) распределено примерно нормально с параметрами

Среднее ... $(2n – 1)/3$, дисперсия ... $(16n – 29)/90$. (11.4)

Все это, как он утверждал, было известно ему ещё 15 – 20 лет назад и сообщено *многим*. ХС указывают, что эти результаты были открыты заново; впрочем, они выводят формулы (11.4), первую из них вслед за Бертраном; см. также Moore (1978, с. 659). Несколько рядов наблюдений из числа исследованных Бьенеме не согласовывались с его выводами, и он заключил, что причиной тому были не выявленные систематические погрешности. К критерию Бьенеме мы вернемся в § 11.3.

6) Метод наименьших квадратов (Бьенеме 1852; ХС, с. 66 – 71). Бьенеме справедливо отметил, что наименьшая дисперсия оценок, взятых по отдельности, не столь важна как их минимальный совместный [доверительный] интервал. Будучи сторонником лапласова подхода к МНКв (см. его замечание в § 10А.6-1), он ограничился случаем большого числа наблюдений. Бьенеме кроме того предположил, что закон распределения погрешностей известен и воспользовался его первыми моментами и даже ввёл первые четыре кумулянта и многомерный ряд Грама – Шарлье (Bru 1991, с. 13; Хальд 2002, с. 8 – 9). Применяя принцип наибольшего правдоподобия, введя характеристическую функцию [вектора] ошибок и формулу обращения, он решает свою задачу, ограничив, правда, выбор

[доверительной] области и в процессе решения выведя распределение хи-квадрат. Результаты Бьенеме весьма интересны, но непосредственного значения для теории ошибок они не имели, а его утверждение (с. 68 – 69) о ненадёжности и абсолютного ожидания, и дисперсии как оценок точности было, конечно же, обусловлено принятым им методом наибольшего правдоподобия и ныне забыто.

7) Ветвящийся процесс. В краткой заметке Бьенеме (1845), см. также ХС, с. 117 – 120, сформулировал свойства критичности ветвящегося процесса в связи с той же задачей о вымирании родов, которой впоследствии занялся Гальтон. D. G. Kendall (1975) реконструировал доказательство и перепечатал заметку Бьенеме, а Брю (Bru 1991) воспроизвёл отрывок из сочинения Курно 1847 г., в котором тот элементарным алгебраическим путём решил одну вероятностную задачу и указал, что она равносильна определению вероятности длительности существования мужского потомства семьи, *которым занимается Бьенеме*. Брю полагает весьма вероятным, что Курно перенял своё рассуждение у Бьенеме.

8) Подход к понятию достаточной оценки (Бьенеме 1840a, ХС, с. 108 – 110). В связи с исследованием устойчивости статистических частот (см. также пункт 3) Бьенеме высказал мысли, которые лежат в основе понятия достаточных оценок. Для $m$ и $n$ испытаний по схеме Бернулли при вероятности “успеха” $p$ количества появлений исследуемого события $\xi_i$ в серии $i$ ($i$ = 1, 2) имеют вероятности

$$P(\xi_i = k) = C_s^k p^k (1 - p)^{s-k}$$

при $s = m$ и $s = n$ соответственно.

Далее, как легко подсчитать,

$$P(\xi_1 = r, \xi_2 = a - r | \xi_1 + \xi_2 = a)$$

не зависит от $p$. Бьенеме полагает, что это свойство, которое имеет место при подразделении массива испытаний на серии, может доказывать постоянство законов природы. Впрочем, статистики (Фурье, на которого он сослался; Quetelet 1846, с. 199) более приземлённо считали подобный метод наилучшим средством для выявления переменных причин. Хейде и Сенета дополнительно указали, что Бьенеме должен был понять, что разбивка массива на части не увеличивает информации о неизвестной вероятности *p* (если она постоянна!). Они также заметили, что Бьенеме неверно вычислил дисперсию гипергеометрического распределения и воспользовался вариантом ЦПТ для проверки нулевой гипотезы.

## 11.3. А. О. Курно

Своё основное сочинение Курно (Cournot 1843 [3]) предназначил для широкого круга читателей. Однако, не владея хорошим стилем (и вряд ли стараясь хоть немного улучшить его) и почти отказавшись от формул, он во многом ограничил полезность своего труда. Напомним (конец § 9.7), что Курно обошёл молчанием ЗБЧ. Далее, он явно никогда не занимался точными измерениями (наблюдениями), и его соответствующие рассуждения почти бесполезны; он упустил (хотя должен был в соответствии с контекстом упомянуть) введение изотерм (Гумбольдт, 1817), равно как и исследование оспенных эпидемий (Даниил Бернулли 1766), а его описание тонтин совершенно неверно.

С другой стороны, в его книгах мы находим следующее (ссылаясь на сочинение 1843 г., мы указываем только его параграфы).

1) Разъяснение цели теории вероятностей (1875, с. 181): *создание методов назначения количественных значений вероятностям*. Он тем самым отошёл от точки зрения Лапласа (§ 8.3c), который видел в теории вероятностей средство для выявления законов природы. О соответствующем мнении Чебышева см. § 14.2-1.

2) Определение вероятности события (§ 18) как отношения протяжённости (*étendue*) благоприятных шансов к общей протяжённости всех шансов[4]. В современном определении *протяженность* заменена четким математическим термином *мера*. Подчеркнём, что своё определение Курно распространил и на геометрическую вероятность, которая до него вообще никак не определялась, и таким образом объединил её с классической вероятностью. Курно (§ 113) ввёл также вероятности, не поддающиеся измерению и (§§ 233 и 240.8) назвал их *философскими*. Их можно поставить в соответствие с экспертными оценками, от обработки которых математическая статистика не может отказываться. Впрочем, чуть раньше философские вероятности ввёл Фриз (§ 8.1.5).

3) Введение термина “медиана” (§ 34).

4) Пояснение понятия случайности. Многие древние учёные (гл. 2, прим. 3) понимали её как пересечение независимых цепей детерминированных событий. Курно (§ 40) высказал ту же идею и, в § 43, косвенно связал случайность с неустойчивым равновесием (прямой круговой конус, поставленный на вершину, падает в “случайном” направлении). Это было приближение к точке зрения Пуанкаре (§ 12.2-9). В своих последующих сочинениях он возвращался к этой же теме. Курно (1851, § 33, прим. 38; 1861, § 61, с. 65 – 66), вспомнил о попытке Ламберта исследовать случайность (см. наш § 7.1.3)[5], а затем (1875, с. 177 – 179) попытался применить критерий Бьенеме (§ 11.2-5) к исследованию случайности числа π. Заменив 36 первых цифр разложения π знаками плюс или минус (например, цифры 3, 1, 4, 1 заменяются на – , +, –), он насчитал 21 перемену знаков. Сравнив дробь 21/36 = 0,583 с дробью [(2·36 + 1)/3·36] = 0,667, которая получена из первой из формул (11.3), Курно заключил, что соответствие между ними весьма удовлетворительно (?), но разумно не посмел сделать окончательный вывод.

5) Смесь распределений (§ 81). В качестве такой смеси Курно предложил среднее из плотностей распределений отдельных наблюдений, взвешенное в соответствии с их количествами. Он не уточнил, чем отличны друг от друга частные плотности, но в § 132 указал, что они могут относиться к наблюдениям различных классов, а в § 135 заметил, что законы распределения погрешностей высокоточных наблюдений *немного* отличаются от нормального. К видоизменению нормального закона для нужд теории ошибок мы вернёмся в § 11.8.4.

6) Попытку выявить зависимость между решениями судей или присяжных (1838; 1843, §§ 193 – 196 и 206 – 225). Пусть в простейшем случае (§ 193) вероятности верного суждения двумя судьями равны $s_1$ и $s_2$. Тогда вероятность совпадения их решений будет

$$p = s_1 s_2 + (1 - s_1)(1 - s_2), \qquad (11.5)$$

откуда, при $s_1 = s_2 = s > 1/2$,

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2p-1}},$$

так что *p*, которое можно найти по статистическим данным, должно превышать 1/2. Если же удастся по тем же материалам определить и $s_1$ и $s_2$, а уравнения типа (11.5) не будут удовлетворяться, придётся заключить о наличии зависимости между решениями. Вряд ли рекомендации Курно были использованы практически, но он во всяком случае попытался исследовать зависимость между некоторыми событиями.

7) Критическое отношение к статистике; описание её задач и поля приложений. Курно (§ 103) заявил, что статистика *расцвела пышным цветом и приходится даже остерегаться её слишком поспешных и неправомерных применений* ... Она (§ 105) должна иметь *свою теорию, свои правила и принципы*, её следует применять к физическим, естественным, социальным и политическим явлениям. Её главная задача *проникнуть* [...] *в знание существа вещей* (§ 106), исследовать причины, *управляющие явлениями физического мира или общественной жизни* (§ 120). Теория вероятностей применима к статистике (§ 113), и *принцип Бернулли* является её единственной твёрдой основой (§ 115). Эти высказывания вовсе не были бесспорными, см. § 7.2.1.

Курно (§ 145) кроме того заметил, что теория вероятностей может быть успешно применена в астрономии, а *статистика небесных тел будет когда-нибудь служить образцом для других применений статистического познавания*. Сам он, впрочем, статистически исследовал лишь параметры планетных и кометных орбит, а его высказывание неточно: во-первых, в середине XIX в. статистика начала применяться в ряде отраслей естествознания (§ 11.8); во-вторых, в то время звёздная статистика (а не статистика небесных тел) уже зародилась (Шейнин 1984а, § 6 и далее).

8) Методическое разъяснение уже известных понятий (плотности распределения, §§ 64 – 65; распределения функций случайной величины и двух случайных величин, §§ 73 – 74). Курно также популярно разъяснил как статистика применяется или должна применяться в естествознании и демографии, обсуждал обработку статистических материалов при переменных вероятностях изучаемых событий и т. д.

Взятое в целом, творчество Курно можно считать серьёзным вкладом в теоретическую статистику. Чупров (1905/1960, с. 60) назвал его *гениальным французским математиком, философом и экономистом*. Позднее он (1909/1959, с. 30) заявил, что Курно был одним из *оригинальнейших и глубочайших мыслителей XIX в., не оценённого современниками, но все выше поднимающегося в оценке потомства*. Наконец, Чупров (1925a/1926, с. 227) назвал его *истинным основоположником современной философии статистики*. Всё это, возможно, преувеличено, и во всяком случае мы не согласны с тем, что Курно предложил *действительное доказательство* ЗБЧ (1905/1960, с. 60) и притом *в канонической форме* (1909/1959, с. 166). До 1910 г., когда Чупров начал переписываться с Марковым, он оставался довольно далеко от математической статистики. Он не заметил, что Курно даже не сформулировал ЗБЧ, а его *лемму* (названа так Чупровым), – чрезвычайно редкие события не происходят, см. Курно (1843, § 43), – Чупров истолковал как *не происходят часто* и не заметил, что она вовсе не была новой; в §§ 3.1.2, 3.2.2 и 4.2.2 мы упоминали подобное положение в связи с моральной достоверностью и в § 7.1.2 указали, что её высказал Даламбер.

## 11.4. В. Я. Буняковский

Европейские математики пытались изложить теорию вероятностей проще, чем это сделал Лаплас. Лакруа (Lacroix 1816) осуществил эту задачу, однако математический уровень его книги был невысок. Кроме него следует, разумеется, назвать Курно (§ 11.3), чья книга, кстати, была переведена на немецкий язык (в 1849 г.), и Моргана (De Morgan 1845). В России ту же задачу выполнил Буняковский, с 1864 г. и до своей смерти в 1889 г., вице-президент петербургской Академии наук, своим руководством (1846), – первым и притом весьма серьёзным отечественным сочинением автора, *русского воспитанника французской математической школы* (П. Б. Струве 1918, с. 1318). Мы обсудим основные вопросы, рассмотренные Буняковским и в указанном источнике, и в других его сочинениях. Почти полный список его сочинений указан в *Материалах* (1917).

1) Теория вероятностей. Она, по мнению автора (1846, с. 1), относилась к прикладной математике, и это соответствовало её тогдашнему состоянию. Там же Буняковский заявил, что

*анализ вероятностей подвергает рассмотрению и численной оценке явления,* [...] *которые даже по нашему неведению не подлежат никаким предположениям.*

Это ошибочное утверждение осталось, однако, голословным: никаких подобных попыток он и не предпринимал; мало того, он сам отказался от своих слов (с. 364 и 1866а, с. 24).

2) Моральное ожидание (§ 7.1.1). Независимо от Лапласа Буняковский (с. 103 – 122) доказал утверждение Д. Бернулли о целесообразности отправки груза на нескольких судах, а впоследствии (1880) рассмотрел случай неравных вероятностей потери каждого из двух судов. Он (1866а, с. 154) упомянул моральное ожидание и в связи с желательностью отдельного статистического изучения производительного населения и детей и заключил, что

*тот не математик, кто не вникает в смысл, свойственный числам, над которыми он производит какие-либо вычисления.*

Тем не менее, советские статистики не доверяли математикам (наша гл. 16, Прим. 7). Попытку Остроградского обобщить понятие морального ожидания (§ 8.1-9) Буняковский не комментировал.

3) Геометрические вероятности (§ 7.1.4). Буняковский (с. 137 – 143) обобщил задачу Бюффона, рассмотрев падение иглы на систему конгруэнтных равносторонних треугольников. Его геометрические рассуждения были, однако, весьма сложными, а окончательный результат, как заявил Марков (Руководство, 1924, с. 186), оказался ошибочным. Сам Марков решал ещё более общую задачу, но его собственный чертёж был не менее сложным, а его решение никто, кажется, не проверял.

Буняковский исследовал подобные задачи ещё раньше (1837) и тогда же заметил, что их решение, совместно, как сейчас можно сказать, с методом Монте Карло, позволяет определять значения специальных трансцендентных функций. Лаплас упоминал тут только число $\pi$.

4) “Числовые” вероятности. Буняковский (1836; 1846, с. 132 – 137) решил элементарную задачу о вероятности квадратному уравнению с коэффициентами, *наудачу* принимающими различные целочисленные значения, иметь вещественные корни. Гораздо интереснее аналогичные, но более поздние задачи, например, о сократимости дроби (Чебышев, см. § 14.2-8) или относящиеся к множеству вещественных чисел.

5) Случайное блуждание. Буняковский (1846, с. 143 – 147) вычислил вероятность, что ладья из квадрата *A* шахматной доски достигнет квадрата *B* [который может совпадать с *A*] в точности за *x* ходов, если её движение “равномерно” случайно. Случайное

блуждание (в данной задаче обобщённое), кажется, встречалось до Буняковского только в косвенном виде, при изучении серии азартных игр. Впрочем, сформулированный пример элементарен: ладья может находиться только в двух состояниях (может достичь *B* либо в один, либо в два хода; из второго случая удобно, однако, выделить вариант $A \equiv B$). Буняковский составил и решил систему из трёх соответствующих конечно-разностных уравнений для количества случаев, при которых достигается цель. Оказалось, что средняя (из трёх вариантов) вероятность равна 1/64, т. е. не зависит от *x*. Он не пояснил этого результата, но справедливо указал, что задачу можно было решить элементарно, непосредственным подсчётом. Заметим, что первые *n* ходов ($n \geq 1$), если они неудачны, ничего не меняют; этим и можно обосновать полученный результат.

6) Статистический контроль качества продукции. Буняковский (1846, Прибавление; 1850) предложил оценивать вероятные потери отряда войск в сражении по потерям в его выбранной заранее части. Вряд ли это исследование (которое можно пояснить схемой расслоенной выборки) имело смысл, но он (1846, с. 468 – 469) также указал, что его результаты могут облегчить приёмку *весьма большого числа каких-либо вещей или припасов*, из которых проверяется лишь некоторая часть. Статистический контроль качества продукции в те времена ещё не был известен, хотя уже Гюйгенс (§ 3.2.2) решил соответствующую урновую задачу. Решение Буняковского представляется недостаточно удачным уже потому, что он воспользовался бейесовским подходом, приняв равные априорные вероятности всех возможных потерь.

T. Simpson (1740, Задача 6) и Öttinger (1843, с. 231) рассматривали подобную же задачу. Вот Симпсон:

*Имеется заданное число каждого сорта вещей* […], *а именно a первого сорта, b второго и т. д., случайно собранных воедино. Случайно должно быть отобрано заданное число* [вещей], *и требуется определить вероятность, что будет выбрано в точности заданное число вещей каждого сорта*.

Остроградский (1848/1961) занялся тем же вопросом возможно вслед за Буняковским[6]. На с. 215 он заявил, что *имеющиеся решения* [этой задачи] *не вполне точны и не вполне согласуются с основами анализа случайных явлений*. Остроградский не раскрыл своей мысли, а его собственная основная формула (с. 228) оказалась весьма сложной и не была никем проверена.

7) История теории вероятностей. Буняковский был одним из первых после Монтукла (Montucla 1802), Лапласа и Lubbock et al (1830), обратившихся к этой теме, и ему вполне можно простить несколько допущенных им фактических ошибок. В своих популярных статьях Буняковский выказывал интерес и к истории математики, и возможно, что и Марков, и Бобынин в какой-то степени следовали за ним.

8) Статистика населения. Буняковский (с. 173 – 213) описал различные способы составления таблиц смертности, исследовал статистические последствия ослабления или уничтожения какой-либо причины смертности (ср. § 7.2.3), вычислял среднюю и ожидаемую сроки существования браков и товариществ и решил несколько других задач вслед за Лапласом.

Статистикой населения Буняковский усиленно занимался и впоследствии. Он составил таблицы смертности и распределения православного населения России по возрастам (1866a; 1866b; 1874) и оценил количество призывников на десять лет вперёд (1875b). Сведений о точности этой оценки, кажется, нет, а по поводу упомянутых таблиц мнения разошлись. Борткевич (1889; 1898b) резко критиковал их, Давидов же, который в 1886 г. опубликовал собственное исследование смертности в России, был высокого мнения о работе Буняковского, хотя и обнаружил в ней серьёзную методическую ошибку (Ондар 1971). Наконец, Новосельский (1916, с. 54 – 55) назвал метод Буняковского составления таблиц смертности (которые всё же явились *громадным шагом вперёд*) несовершенным, но указал, что исходные данные Буняковского были неточны и неполны (что он и сам неоднократно отмечал):

*Новая эра в изучении русской смертности начинается с* […] *Буняковского* […] (1866). *Работы Буняковского* […] *представляют крупное и выдающееся явление не только в нашей крайне бедной демографической литературе, но и в богатой литературе иностранной*. […] *Благодаря ясности, глубине и тонкости анализа сочинения В. Я. Буняковского вполне сохранили своё значение и для настоящего времени*. Таблицы Буняковского, *являясь громадным шагом вперёд, благодаря неточности основных материалов, отсутствию* […] *целого ряда необходимых данных и недостатка самого метода построения таблиц не представляют достаточно правильной картины русской смертности*.

О методе Буняковского составления таблиц смертности см. *Словарь* (1985).

Особо заметим, что в 1848 г. Буняковский опубликовал обширную и важную по теме газетную статью о холеробоязни, но не отнёсся к ней достаточно серьёзно; её перепечатку мы включили в препринт нашей статьи (1991b) о Буняковском. Много позже Енько (1889) предложил первую математическую модель эпидемии (кори), которая сегодня положительно расценивается (Ондар 1973; Dietz 1988; Gani 2001), и можно пожалеть, что Буняковский не заинтересовался подобными проблемами.

9) Урновая задача (1875a), связанная с разложением чисел на части: в урне находятся $n$ пронумерованных по порядку шаров. Из неё вынуто сразу $m$ шаров ($m < n$) и требуется определить вероятность, что сумма их номеров равна $s$. Задача, которую Лаплас (§ 8.1-2) решал иначе, свелась к определению коэффициента при $t^m x^s$ в разложении

$$(1 + tx)\,(1 + tx^2)\,...\,(1 + tx^n).$$

Для небольших значений $m$ Буняковский решил эту задачу при помощи сложного уравнения в конечных частных разностях и предложил формулу для перехода от $m$ к ($m$ + 1). См. также Laurent (1873), который сослался на Эйлера (1748, гл. 16).

10) Приближённое вероятностное суммирование и самосчёты. Буняковский (1867) решил несколько задач на приближённое суммирование большого числа слагаемых. Полученную основную формулу он применил для суммирования значений функций (например, квадратных и кубичных корней при последовательных натуральных значениях аргумента), или же атмосферного давления в течение полугода. Цели суммирования Буняковский не указал, но для атмосферного давления она ясна: для вывода его среднего значения.

О самосчётах, которые имели целью усовершенствовать обычные счёты, Буняковский сообщил в 1867 г. на заседании физико-математического отделения Академии, а позже опубликовал мемуар о них (1876), и в нём описал применение самосчётов для подсчёта средних значений метеорологических элементов. Прудников (1954, с. 81) предположил, что Чебышев пришёл к мысли об устройстве арифмометра под влиянием этого мемуара.

11) Из других тем, помимо сотрудничества в составлении толковых словарей русского языка, назовём решение задачи из теории случайных размещений (1871), которая, однако, вряд ли имела практическое значение, языкознание, ЗБЧ, обработку наблюдений и изучение свидетельств, выборов и судебных решений. В своём ходатайстве об отлучении от Русской православной церкви Марков (§ 15.3) сослался на Буняковского в связи с последней указанной темой. Самоё определённое высказывание последнего (1866b), на которое Марков, однако, не сослался, означало, что истины, *познаваемые путём откровения*, не подлежат вероятностной проверке.

В популярной статье Буняковский (1847) сослался на свою прежнюю неопубликованную (и утерянную) работу по языкознанию и разъяснил цели статистического изучения этой науки. Knauer (1955) описал ранние исследования подобного рода.

В течение нескольких десятилетий руководство Буняковского (1846) оказывало сильное влияние на преподавание теории вероятностей в России; по существу, несмотря на работы предшествующих авторов, именно с него началось подлинное изучение этой дисциплины за пределами западной Европы. Недаром Марков (1914b, с. 14) назвал руководство *прекрасным трудом*, а Стеклов (1924, с. 177) полагал, что оно *по своему времени полный и выдающийся трактат*. Наконец, Васильев (1921, с. 36):

*Это обстоятельное и ясно написанное сочинение − одно из лучших в математической литературе Европы по теории вероятностей, много способствовало распространению между русскими математиками интереса к этой науке и тому значению, которое преподавание теории вероятностей получило в русских университетах сравнительно с университетами других стран*.

Но мы обязаны добавить, что Буняковский, можно считать, не заметил исследований Чебышева. После 1846 г. он покинул теорию вероятностей, полностью переключившись на статистику.

## 11.5. А. Кетле

В начале своей научной карьеры Кетле посетил Париж, где встречался с ведущими французскими учёными. Некоторые авторы указали, что он был во многом обязан Лапласу, мы же полагаем, что источником вдохновения послужил для него

Фурье, редактор многотомных *Исследований* (1821 – 1829).

Кетле неустанно обрабатывал статистические материалы и пытался стандартизировать статистику в международном масштабе. Примечательно его замечание (1846, с. 364):

*Когда речь идёт о двух различных странах, то представляется, что им приятно сделать невозможным всякое сближение* [статистических данных].

Он был соавтором первого статистического справочника (Quetelet & Heuschling 1865) о населении Европы (включая Россию) и США с критическим исследованием исходных данных. В 1853 г. он (1974, с. 56 – 57) был председателем Конференции по принятию единообразной системы метеорологических наблюдений на море. Он также собирал и обрабатывал метеорологические наблюдения[7] и описывал тенденцию сохранения погоды при помощи элементов теории серий.

В том же 1853-м году он организовал первый Международный статистический конгресс. К. Пирсон (1914 – 1930, т. 2, с. 420) указал на заслуги Кетле в *организации официальной статистики в Бельгии и* [...] *объединении международной статистики*. Наконец, примерно в 1831 – 1833 гг. Кетле успешно предложил создать в Лондоне (Королевское, как оно ныне называется) статистическое общество (Mouat 1885, с. 15). Вообще же его многолетняя деятельность видимо привела к усилению преподавания теории вероятностей в Бельгии (Mansion 1904, с. 3).

Сочинения Кетле (1869; 1871) содержат многие десятки страниц с измерениями частей человеческого тела, пульса, дыхания, сравнением веса и роста с возрастом и т. п. Они распространили применение нормального закона на эту область. По совету Гумбольдта (Кетле 1870) он ввёл термин *антропометрия* и тем самым ограничил смысл антропологии. На него повлиял Беббедж (Babbage 1857), упорный собиратель биологических данных, сам же он произвёл впечатление на Гальтона (Galton 1869, с. 26), который назвал его *величайшим авторитетом в статистике населения и социальной статистике*. При обсуждении этого сочинения Гальтона Пирсон (1914 – 1930, т. 2, с. 89) заметил, что

*Здесь мы имеем первое обращение Гальтона к статистическому методу и сам текст показывает, что* [английский перевод сочинения Кетле (1846)] *послужил ему для первого знакомства с* [...] *нормальной кривой.*

В те дни предварительный анализ статистических материалов был исключительно важен ввиду существенных систематических влияний, подлогов и неполноты данных. Кетле понял, что статистические документы обеспечивали лишь вероятные сведения и что, в принципе, *вся значимость* статистических вычислений состояла в оценке их правдивости (Quetelet & Heuschling 1865, с. LXV).

Кетле (1846) оставил рекомендации по составлению вопросников и предварительной проверке данных; заявил (с. 278), что выделение слишком большого числа групп является *научным шарлатанством* и (с. 293), что было понятно в то время, высказался против выборочного метода. Это его сочинение содержало много разумных утверждений. В 1850 г., видимо также имея в виду его перевод на английский язык, Дарвин (1887/1897, т. 1, с. 341) заметил:

*Как справедливо замечание* [...] *Кетле* [...] *что никто не знает, каков будет результат отказа от лечения, если считать это стандартом для сравнения с гомеопатией и прочими подобными вещами*.

Интересно, что Кетле ни разу не упомянул Дарвина и даже заявил (1846, с. 259), что *растения и животные остались такими, какими они были, когда вышли из рук Создателя*. Эта точка зрения частично объясняет, почему статистическое изучение эволюции видов началось сравнительно поздно (в Биометрической школе). Заметим, что видный немецкий статистик Кнапп (1872b), обсуждая идеи Дарвина, не упомянул случайности и ничего не сказал о статистическом изучении биологических проблем.

Продолжая традиции политических арифметиков (§ 3.1.4), Кетле обсуждал почтовые (1869, т. 1, с. 173 и 422) и железнодорожные тарифы (1846, с. 353) и рекомендовал изучать изменения, вызванные телеграфом и железными дорогами (1869, т. 1, с. 419). Его специальным исследованием (1836, т. 2, с. 313; впервые намеченное в 1832 г.) было количественное описание различия в вероятностях осуждения подсудимых в зависимости от их личности (пола, возраста, образования) и Юл (Yule 1900/1971, с. 30 – 32) в общем положительно отозвался об этой работе как о первой попытке выразить зависимость (association) некоторого признака от ряда других.

Известно, что Кетле (1832a, с. 4; 1832b, с. 1; 1848b, с. 38) ввёл *среднего человека* с его (1848a, с. 91 – 92) средними наклонностями к преступлению (например, 1832b, с. 17; 1836, т. 2, с. 171) и женитьбе (1848a, с. 77; 1848b, с. 38), т. е., фактически, с соответствующими вероятностями, и утверждал, что [относительное] количество преступлений устойчиво (1829, с. 28 и 35 и много других источников). Несмотря на допущенные им погрешности (см. ниже), он таким образом оказался отцом моральной статистики.

Средний человек, как полагал Кетле, обладал средними физическими и моральными качествами, был типом нации и даже всего человечества. Против этого понятия были выдвинуты разумные возражения, к которым мы добавим, что Кетле не уточнил понятия *средний*. Иногда он имел в виду среднее арифметическое, в других же случаях (1848a, с. 45) медиану, а ЗБЧ в форме Пуассона он (1846, с. 216) упомянул лишь в связи со средним ростом. Курно (1843, § 143) заметил, что средний человек физиологически невозможен (средние размеры различных частей тела несовместимы друг с другом), а Бертран (1888a, с. XLIII) высмеял это понятие:

*В тело среднего человека бельгийский автор вложил среднюю душу.* [Средний человек] *лишён страстей и пороков* [это неверно, см. ниже], *он ни безумен, ни мудр, ни невежда, ни учёный* [...], *зауряден во всем. После того, как он съедает в течение 38 лет средний паек здорового солдата, ему положено умереть не от старости, а от средней болезни, которую обнаруживает в нем статистика.*

И все же средний человек полезен и сейчас, по крайней мере в качестве среднего производителя и потребителя, а Фреше (Fréchet (1949) заменил его близким к нему *типичным* человеком.

Кетле (1848a, с. 82; 1869, т. 2, с. 327) указал, что действительная наклонность к преступлению у данного человека может сильно отличаться от видимой средней и (1848a, с. 91 – 92) отнёс эти средние уклонения к среднему человеку. И все же он, видимо, недостаточно подчеркнул свою мысль, так что после его смерти известный статистик (Rümelin 1867, с. 25) стал категорически отрицать у себя какую бы то ни было склонность к преступлению. Вот мнение Чупрова (1909/1959, с. 23):

*Их* [*не в меру разумения рьяных поклонников*] *наивное преклонение перед <u>статистическим законом</u>, фетишизм их отношения к устойчивым статистическим числам, их абсурдное учение о равенстве всех перед лицом стремящихся вылиться в цифры средних <u>наклонностей</u> к преступлению, к самоубийству, к* *браку, бесспорно вызывали на протест. Но* […] *протест принял мало научные формы.*

Утверждение Кетле (1836, т. 1, с. 10) о постоянстве числа преступлений он подкрепил мыслью об их социальных корнях:

*Всякий социальный строй предполагает определённое количество и определённый порядок преступлений, которые вытекают из его организации как необходимое следствие.*

Однако, он не обосновал этого положения статистическими данными. Более того, постоянство количества преступлений не имело места (Rehnisch 1876): Кетле невнимательно изучил судебную статистику. Он, далее, не сказал чётко, что это постоянство невозможно при изменении социальных условий. Но во всяком случае Кетле имеет бесспорные заслуги в зарождении моральной статистики.

Особо остановимся на законах распределений. Кетле (1848а, с. 80; 1869, т. 2, с. 304 и 347) заметил, что кривые средних наклонностей к преступлению и женитьбе в зависимости от возраста были крайне асимметричны, и он (1846, с. 168 и 412 – 424) также знал, что асимметричные плотности встречаются в метеорологии. И все же Кетле (1853) вернулся к обычным представлениям и заявил, что подобные распределения происходят ввиду *специальных причин* и аномалий. Более того: он (1848а, с. viii) ввёл какой-то таинственный *закон случайных причин*, характеризуемый возможно асимметричными кривыми (1853, с. 57)! Короче говоря, он выказал тут (и в других случаях, см. выше) свой общий подход, который Кнапп (1872а, с. 124) объяснил его *духом, богатым идеями, но неметодическим и потому нефилософским*.

Тем не менее Кетле оказался центральной фигурой статистики середины XIX в. и Фрейденталь (1966, с. 7) правильно заключил, что до него существовали статистические бюро и статистики, но не было статистической науки.

## 11.6. Ф. Гальтон

Двоюродный брат Дарвина, он начал под его влиянием изучать *Наследственность таланта* (1869) и, между прочим, ввёл термин *евгеника*. В письме 1861 г. Дарвин (1903, с. 181) положительно отозвался об этой книге. Он же (1876, с. 15) обратился к Гальтону с просьбой обработать его исследование преимущества перекрёстного опыления растений перед произвольным опылением. Расположив рост тех и других сеянцев в порядке возрастания, Гальтон сравнил соответствующие числа (т.е. порядковые статистики) друг с другом и заметил, что знаки полученных разностей совпадали почти во всех случаях. Заметим (§ 11.8.1), что Зейдель (Seidel 1865) расположил годы 1856 – 1864 в порядке убывания a) смертности от брюшного тифа и b) среднегодового уровня подпочвенных вод. Соответствие между полученными рядами он оценивал только на глаз (и назвал его поразительным). Как и Гальтон позднее, он таким образом применял ранговую корреляцию.

Гальтон (1863) придумал целесообразную систему условных обозначений для метеорологических карт, что позволило ему открыть не известные ранее антициклоны. С точки зрения статистики можно сказать, что он добился этого разумным исследованием исходных данных. Упомянем ещё несколько его достижений. Гальтон (K. Pearson 1914 – 1930, т. 2, гл. 12) изобрёл *составные* фотографии типичного преступника; больного туберкулёзом; человека определённой национальности. На одну и ту же плёнку он снимал несколько человек, давая каждый раз намного более короткую, нежели полагалось, выдержку. Во всяком случае, это нововведение было гораздо более обоснованно, чем средний человек Кетле.

Гальтон (1892) оказался также основным автором дактилоскопии. Ввиду своей надёжности она не потребовала статистического анализа и заменила предыдущую систему судебной идентификации, предложенную Альфонсом Бертильоном (1893) и бывшую в употреблении с 1890-х годов до начала XX в. Одним из её элементов была антропометрия. Другое изобретение Гальтона (1877) – прибор для наглядной демонстрации появления нормального распределения как предельного для биномиального закона (Stigler 1986, c. 275 – 281). Дробинки, насыпанные в прибор, падали вниз на несколько рядов вертикальных стержней и с равной вероятностью отбрасывались ими либо влево, либо вправо, а затем достигали основания прибора. Там дробь образовывала горку, профиль которой повторял нормальную кривую. Более того: при делении прибора на несколько вертикальных отсеков такая же нормальная кривая появлялась в каждом из них (и таким образом подтверждала устойчивость нормального закона).

Но основной заслугой Гальтона было введение в статистику понятий регрессии и корреляции. Разработка теории корреляции явилась одной из задач возникшей в Англии биометрической школы, и близкие отношения, существовавшие между Гальтоном и Пирсоном, оказались немаловажной причиной её успехов. Напомним (§§ 2.1.1 и 2.1.3), что рассуждения в духе качественной корреляции не были чужды древним учёным (и соответствовали качественному характеру древней науки). В новое время, в 1870-е годы, несколько ученых (C. Meldrum, в 1872 и 1875 гг.; J. N. Lockyer, в 1873 г.; и H. F. Blandford, в 1880 г.), см. Шейнин (1984a, с. 160), обратили внимание на зависимость элементов земного магнетизма и метеорологических явлений от солнечной активности, но не сказали ни слова о разработке соответствующей количественной теории. Даже Зейдель, который в 1865 – 1866 гг. (см. выше и § 11.8.1) количественно изучил зависимость между двумя, а затем тремя факторами, не намекнул на желательность обобщения своих построений. Заслуга Гальтона, таким образом, действительно велика. Повторим, наконец (Прим. 5 к гл. 10), что в 1912 г. Каптейн предложил "астрономический" вариант коэффициента корреляции.

## 11.7. Статистика

Мы описываем здесь события второй половины XIX в. Родственный материал см. §§ 7.2 и 11.4.

Многие десятилетия государствоведение сохраняло свои позиции. Во Франции Деламбр (Delambre 1819, с. LXVII) доказывал, что статистика лишь изредка занималась дискуссиями или высказывала предположения и не стремилась совершенствовать теории и что политическую арифметику следует *отличать* от неё. Статистику он понимал как собрание геодезических, метеорологических и медицинских данных, минералогические описания и даже выставки предметов искусства. Впрочем, мы полагаем, что две последние позиции были вскоре исключены из подобных рассуждений.

Созданное Лондонское статистическое общество объявило, что статистика не обсуждает причин и не рассуждает о возможных влияниях (Anonymous 1839, с. 1). Они, правда, отрицали, что *статист отбрасывает все выводы, а статистика состоит лишь из множества цифр* и утверждали, что *все выводы должны делаться на основе хорошо подтверждённых данных и допускать проверку математическими доказательствами*. Все это было таким образом неоднозначно; на деле Общество стремилось придерживаться своего первого утверждения, но тщетно. Во всяком случае, Woolhouse (1873, с. 39) засвидетельствовал, что *Многие статьи* [...] *по необходимости пренебрегали этими абсурдными ограничениями*. Действительно, ещё Gatterer (1775, с. 15) заявил, что статистика обязана объяснять нынешнее состояние государства исходя из его предшествующих состояний. И в самом заглавии книги Dufau (1840) статистика была названа *Теорией изучения законов, в соответствии с которыми развивались социальные события*.

В течение XIX в. значение статистики значительно возросло. В своё время Граунт (1662/1939, с. 79) ещё не был уверен, что она нужна кому-либо кроме *государя и его главных министров,* и вот классические исследования соотношения полов у новорождённых творцами теории вероятностей не находили практического применения. Но в середине XIX в. стало важно предвидеть, как те или иные преобразования повлияют на общество, и Кетле (§ 11.5) неоднократно подчёркивал эту цель, а на рубеже XIX – XX вв. в различных странах начали проводиться переписи населения, которые давали ответы на все расширявшийся круг вопросов. Попробуем, однако, сравнить тогдашнее положение с современностью[8].

1) Общественное мнение ещё не изучалось и качество массового производства ещё не контролировалось статистическими методами (ср. § 11.4-6).

2) Выборочный метод считался сомнительным[9]. Курно (1843) умолчал о нем, а основанный на нем подсчёт населения Франции (Лаплас, § 8.1-5) вряд ли принимался в расчёт, Кетле же (§ 11.5) возражал против него. Борткевич (1904, с. 825) и Чубер (Czuber 1921, с. 13) упоминали в этой связи *предположительные подсчёты* (Konjektural-Berechnung). А Parisot (1810) тем же термином обозначил теорию вероятностей в целом. Неудивительно, что Чупрову (1912) пришлось настойчиво защищать выборочный метод, несмотря на то, что объем собираемых статистических материалов неумолимо возрастал. Уже в начале века *появились легионы числовых статистических данных и статистических таблиц, наполненных числами* (Lueder 1812, с. 9). Тенденция накапливать подчас ненужные или ненадёжные данные проявилась и в различных отраслях естествознания (§ 11.8). Впрочем, Декарт (Descartes 1637/2012, p. 63) заметил, что необходимость в наблюдениях (в естествознании?) возрастает с познаниями.

3) Теория корреляции начала разрабатываться в конце XIX в.

(§§ 11.6 и 16.2), но даже Кауфман (1922, с. 152) заявил, что *так называемый метод корреляции* [...] *существенного ничего не прибавляет к результатам элементарного анализа*. В посмертном издании книги появившиеся соавторы всё изменили и (с. 214) назвали теорию корреляции *одной из самых важных и удивительных отделов современной статистики*. См. также § 15.1-4.

4) Дисперсия начала использоваться вне теории ошибок лишь в XX в., а Борткевич (1894 – 1896/1968, с. 126) заявил, что исследование точности является второстепенной задачей, роскошью и что гораздо важнее статистическое чутье, ср. мнение Гаусса (§ 10А.5-1). Подобная точка зрения была, видимо, вызвана наличием крупных систематических искажений в исходных данных.

5) Необходимо не просто чутье, а предварительное исследование данных (которое получило права гражданства лишь в последние десятилетия и которое все-таки не отменяет последующей оценки надёжности результатов). Блестящие примеры такого исследования имели место намного раньше и к ним мы относим введение разного рода изолиний. В 1701 г. Галлей провёл изолинии магнитного склонения на карте Северной Атлантики, см. также § 11.8.3.

6) Эконометрика возникла лишь в 1930-е годы.

**Перечислим теперь тогдашние трудности (реальные и мнимые) приложения теории вероятностей к статистике.**

7) Отсутствие “равновозможных случаев”, существование которых необходимо для понимания вероятности в классическом смысле. На эту причину статистики ссылались неоднократно, см. также § 4.2.3. Лексис (Lexis, доклад 1874 г., опубл. 1903, с. 241 – 242; 1886, с. 436 – 437; 1913, с. 2091) также ссылался на равновозможность. Во втором случае, в статье, посвящённой приложению теории вероятностей к статистике, он даже добавил, что введение равновозможности приводит к субъективности теории вероятностей. В других случаях Лексис, однако, рассуждал иначе, и цельной точки зрения у него не было. Так, статистика главным образом основана на теории вероятностей (1877, с. 5); если статистическая вероятность стремится к теоретической, равновозможные случаи можно постулировать (там же, с. 17); и *схема* теории вероятностей – высшая научная форма, в которой может выражаться статистика (в том же докладе 1874 г., см. выше, с. 241).

8) Нарушение постоянства вероятности исследуемого события и/или независимости испытаний. Повторим (§ 4.2-3), что до Лексиса статистики признавали одну лишь схему Бернулли; так, Кауфман (1922, с. 103 – 104) заявил, что теория вероятностей применима лишь к этим схемам. Он упомянул нескольких авторов, в том числе Маркова и Юла, которые, как он утверждал, придерживались того же мнения, но не привёл точных ссылок. Мы склонны думать, что вопрос был всё-таки в том, чтобы определять, являются ли статистические испытания бернуллиевыми или нет[10], Кауфман же безнадёжно отстал от времени.

9) Абстрактность [ещё не аксиоматизированной] теории вероятностей. История математики свидетельствует, что чем абстрактней становилась эта наука, тем шире оказывался круг её приложений. Статистики, однако, не ожидали помощи от теории вероятностей. Блок (Block 1878/1886, с. 134) считал, что она слишком абстрактна и не должна применяться *слишком часто*, а Кнапп (Knapp 1872a, с. 115) назвал её *тяжёлой* и вряд ли полезной за пределами азартных игр и страхового дела. Там же он (с. 116 – 117) добавил разумное замечание: *Недостаточно положить разноцветные шарики в лапласовы урны, чтобы вытряхнуть из них научную статистику*. Более определённо высказался Чупров (1922/1960, с. 416):

*Математиков, играющих в статистику, могут победить лишь статистики, вооружённые математикой*.

Но статистики не были *вооружены* и не доверяли математике. G. von Mayr заявил, что математические формулы не нужны и в частной беседе сообщил Борткевичу, что не выносит математику (Борткевич и Чупров 2005, Письмо 109, 1911 г.). Исследование оспенных эпидемий Даниилом Бернулли не упомянул даже Курно (§ 11.3) и, как частично сказано в § 11.5, статистики не разобрались в сочинениях Кетле. Студенты-статистики и не изучали математику! Сами математики, если и не *играли* в статистику, не всегда представляли её себе, см. § 9.9.2.

Wittstein (1867) высказал идею о создании математической статистики (но сам этот термин ввёл Knies (1850)). Он сравнил положение в статистике с *детством* астрономии и подчеркнул, что эта наука (и особенно статистика населения) нуждается в Тихо Браге и Кеплере, чтобы выявлять закономерности, исходя из надёжных наблюдений. Статистики, как он заметил, не представляют себе сути теории вероятностей и никогда не оценивают точности получаемых результатов.

## 11.8. Статистика и естествознание

В XIX в. статистический метод вызвал к жизни ряд дисциплин, и мы рассмотрим, что именно имело место в нескольких отраслях естествознания. Противники этого метода относили средние результаты к отдельным лицам (§ 11.5). Так, Comte (1830 – 1842, т. 3/1893, № 40, с. 329): приложение статистики к медицине является *полным и непосредственным вырождением медицинского искусства*. Но появился так называемый *количественный метод*, обычно приписываемый французскому врачу Луи (Louis 1825), который вычислял частости симптомов различных заболеваний, чтобы облегчить диагностику. Он и его сторонники стремились заменять качественные описания непосредственно собираемыми статистическими данными, ср. утверждение Петти в § 3.1.4. Он (с. xvii – xviii) даже утверждал, что при заданных наблюдениях каждый врач должен придти к одному и тому же выводу.

Bouillaud (1836, с. 186) вставил много выдержек из *Опыта* Лапласа (1814) в свою книгу. Он весьма благоприятно отозвался о количественном методе, но назвал его *дополнением* к другим методам (с. 190 – 191). Исчисление вероятностей, которое автор счёл *приближенным*, почти всегда является единственным средством для обобщения получаемых результатов (с. 186 – 187), а медицина останется своего рода азартной игрой, если не будет целиком основываться на вероятностях (с. 189), хотя необходим и учёт личности пациентов (с. 193). Медицинская статистика находится ещё в колыбели, но уже применяется с некоторым успехом, и её ожидает значительное развитие (с. 186 – 187).

Но вот Даламбер (1759/1821, с. 163) высказался иначе (см. также Прим. 7 в гл. 6):

*Систематическая медицина представляется мне* […] *подлинным бедствием человечества. Наблюдения, многочисленные и подробные, разумно соответствующие друг другу, − вот к чему* […] *должны свестись рассуждения в медицине*.

Гаварре (Gavarret 1840, с. x) не уклонился от этой темы (§ 9.9.2) и разумно заметил, что количественный метод сам по себе не является научным и не основан на *общей философии*. Он, однако, прослеживался уже в XVIII в. (см. ниже и § 7.2.3), а наше описание (§§ 11.8.1 – 11.8.4) показывает, что он продолжал существовать и много позже. Кроме того, количественный метод ошибочно приписывали теории вероятностей (D'Amador 1837, с. 12), а выдающийся врач и известный статистик Гай (Guy 1852, с. 803) отождествлял количественный и статистический методы, чтобы отделить последний от государствоведения. Там же Гай (с. 801 – 802) утверждал, что медицина и статистика связаны:

*Нет такой науки, которая раньше или позже не уразумела бы безусловную необходимость в обращении к числам*. […] *Нет также никаких особых причин для физиологии и медицины заявлять о своей исключительности. Напротив, они* […] *могут надеяться извлечь наибольшую пользу от применения чисел*. […] *Наука без статистики относится к истинной науке как традиция к истории*.

По существу начало количественного метода можно связать с Анхерсеном, см. § 7.2.1. Напомним также (§ 3.1.4), что уже Лейбниц рекомендовал составлять государственные таблицы, а Greenwood (1936, с. 139), пожалуй, слишком хорошо отозвался об этом методе:

*При широком применении, а не просто одобрении метода Луи некоторые душераздирающие терапевтические разочарования в истории туберкулёза и рака за последние 50 лет не имели бы места*.

Что касается эмпиризма в собственно статистике, то мы упомянем фундаментальное исследование Фурье (Fourier 1821 – 1829), состоящее почти исключительно из статистических таблиц со сведениями по демографии, промышленности, торговле, сельскому хозяйству и метеорологии. Эмпиризм, вначале свойственный и биометрической школе (§ 16.2), правда, недостаточен даже для составления таблиц и, кроме того, обилие материалов приводило к ложному мнению о том, что масса неоднородных данных лучше немногих надёжных наблюдений (§ 11.8.1).

**11.8.1. Медицина.** В статье 1835 г. было указано, что статистика может применяться в медицине (§ 9.9). Первой среди медицинских дисциплин, в которую проникла статистика, оказалась хирургия: уже в 1839 г. появилось не очень, правда, убедительное статистическое исследование результатов ампутаций конечностей. После внедрения анестезии выяснилось, что она может сопровождаться тяжёлыми последствиями, и результаты ампутаций с её применением и без неё начали сравнивать статистически.

Первое такое исследование (J. Y. Simpson 1848, с. 102) было, однако, неудачным: его автор почему-то решил, что самые надёжные результаты он получит при использовании данных по нескольким английским больницам за 1794 – 1839 гг.:

*Данные, которые я привёл* [...], *встретили возражения, поскольку они были собраны из слишком большого числа различных больниц и из слишком многих источников. Но* [...] *я полагаю, что все наши самые лучшие статистические эксперты посчитают, что именно это обстоятельство делает собранные данные более, а не менее надёжными.*

Следует, однако, добавить, что Симпсон (там же, с. 93) заявил, что только статистическое исследование способно оценить опасность ампутаций. Он (1869 – 1870/1871) также ввёл термин *госпитализм*. Сравнивая смертность от ампутаций в различных больницах, Симпсон заметил, что она возрастает с количеством коек, фактически же (с. 399) с ухудшением вентиляции и нехваткой воздуха. Подобное обоснование выводов не ограничивалось медициной: монотонное возрастание вероятности осуждения подсудимых в зависимости от их личности было отражено в специальной таблице Кетле (ср. § 11.5). О пагубном влиянии плохого воздуха на больничных пациентов было известно *отцам* (духовным лицам) Регенсбурга (город в Баварии) шестьсот лет назад (Virchow 1868 – 1869/1879, т. 2, с. 21).

Почти одновременно появилось исследование Пирогова, который ввёл анестезию в полевую хирургию и сравнивал смертность при консервативном и оперативном методах лечения раненых. Много позже он (1864/1865 – 1866/1961, с. 403 – 404) назвал своё время переходным:

*Начала прежней школы, господствовавшие ещё в первые десятилетия нашего века, потрясены статистикой, – это она сделала, но новых начал, на которых бы можно было основать наши действия, она ещё не постановила.*

Пирогов (1849, с. 6) разумно полагал, что приложение статистики в хирургии

*совершенно согласно с* [её] *духом, потому что болезни, входящие в область этой науки, несравненно менее зависят от индивидуальных влияний и видоизменений.*

Он, однако, неоднократно указывал, что медицинская статистика ненадёжна. Так (1864/1865 – 1866/1961, с. 20),

*При малейшем недосмотре, неточности и произволе* [на статистические данные] *можно гораздо меньше положиться, чем на те данные, которые основаны на одном общем впечатлении, остающемся у нас после простого, но трезвого наблюдения случаев.*

... [В 1849 г.] *я* [...] *не знал ещё всех ложных путей, на которые иногда ведёт цифра* ...

Позже он (1879/1960, с. 315) выделил одну из причин ненадёжности данных в военной хирургии (основателем которой он и был): весьма разнообразные обстоятельства разделяют их *на слишком мелкие и одна с другой слишком несходные группы*, что не позволяет заключать о желательности той или иной ампутации. По существу он ратовал за внимательный учёт всех обстоятельств и применение лишь элементарных статистических приёмов, что соответствовало его времени и особенно зарождающейся военной хирургии.

Пирогов был убеждён в существовании закономерностей массовых явлений. Так, процент смертности при любой *повальной* болезни и *значительных* операциях устойчив (1850 – 1855/1961, с. 382), а война это *травматическая эпидемия* (1879/1960, с. 220). Последнее, видимо, означало, что заболеваемость и смертность от ранений в военных условиях подчиняются статистическим законам. Далее (1854/1960, с. 204), искусство врачей [а не малограмотных лекарей] лишь едва заметно влияет на общие итоги лечения. И вот его соответствующее мнение (1871/1960, с. 439):

*Для масс в терапии и хирургии, – без хорошей администрации, – и в мирное время мало проку; а в таких катастрофах, как война, и подавно.*

Заметим, наконец, возможно верное высказывание Пирогова (1864/1865 – 1866/1961, с. 20): без ещё не существующего учения об индивидуальности невозможен *истинный прогресс врачебной статистики*.

Пирогов участвовал в Крымской войне, в которой, кстати, проявила себя сестра милосердия Флоренс Найтингейл, оставившая след в истории статистики, ср. высказывание Пирсона в § 3.2.3. Она бы полностью согласилась с предпоследней из приведённых нами выше выдержек.

В XIX в. в рамках медицины появились и такие новые дисциплины, как эпидемиология и общественная гигиена (предшественница экологии). Вариоляцию оспы мы обсуждали в § 7.2.3, а о существенном результате Енько упоминали в конце

§ 11.4. В 1866 г. Фарр (Brownlee 1915) в методическом смысле опередил Енько, и заметку о его исследовании эпизоотии Броунли смог опубликовать в медицинском журнале. Фарр также указал, что изучал эпидемии холеры 1849 г. и дифтерии 1857 – 1859 гг.

Вот его рассуждение. Обозначив число заболеваний за 4 недели через *s*, он заметил, что третьи разности функции ln*s* были постоянны, так что

$$s = C\exp\{\delta t[t + m]^2 + n]\}, C > 0, \delta < 0.$$

Эту формулу привёл Броунли; Фарр, конечно же, не смог бы вставить её в своё письмо в газету. Вычисленные значения *s* не согласовывались с фактическим данными, но во всяком случае Фарр верно предсказал быстрое убывание эпидемии.
Но начало эпидемиологии положил, пожалуй, английский врач Сноу (Snow 1855). Он сравнил смертность от холеры у двух групп жителей Лондона, потреблявших очищенную и неочищенную питьевую воду. Без всяких математических приёмов он выяснил, что очистка воды снижает смертность в восемь раз и тем самым обнаружил источник распространения холеры и доказал существенную применимость первого этапа статистического метода (§ 1.3). Несколько раньше Budd (1849, pp. 5 – 6) заметил, что основным источником распространения холеры является питьевая вода *в заражённых местах*.
Петтенкофер (Pettenkofer 1886 – 1887) опубликовал громадный статистический материал о холере, но так и не смог его обработать. Он (1865, с. 329) подчеркнул, что эпидемия холеры не может возникнуть в данный момент без существующего местного *предрасположения* к ней и придал особое значение уровню подпочвенных вод. Его точка зрения не противоречит современным представлениям о пороговых уровнях. Вместе с тем Петтенкофер не верил в тогдашние бактериологические исследования и возражал Сноу. Об оценке его точки зрения см. Winslow (1943/1967, с. 335).

Зейдель (Seidel 1865; 1866) исследовал зависимость месячной заболеваемости брюшным тифом от уровня грунтовых вод, а затем, одновременно, и от количества осадков. Оказалось, что знаки уклонений этих показателей от их среднегодовых значений совпадали вдвое чаще, чем не совпадали, и Зейдель количественно (правда, лишь косвенно и с потерей информации) оценил значимость исследуемых им связей, см. также § 11.6. Основатели теории корреляции ни разу, однако, не сослались на него; впервые его упомянул Weiling (1975).

Ещё Лейбниц (§ 3.1.4) рекомендовал собирать и применять сведения по широкому кругу вопросов, которые, как мы сейчас добавим, относились и к общественной гигиене. Кондорсе (Condorcet 1795/1988, с. 316 и 320) описал задачи *социальной математики* (политической арифметики) и упомянул изучение влияния температуры, климата, свойств почвы, пищи и общих привычек населения на соотношение полов, рождаемость, смертность и количество женитьб. Намного позже М. Леви (M. Lévy 1844) попытался рассмотреть влияние атмосферы, воды и климата, равно как и подходящей одежды и надлежащего питания на человека.

С момента своего зарождения в середине XIX в. общественная гигиена (да и статистика населения с самого начала) статистически изучала большое число проблем, особенно тех, которые возникли в связи с Индустриальной революцией в Англии и привели к громадной смертности детского населения; так, в Ливерпуле лишь 2/3 детей из среднего класса доживали до пяти лет (Chadwick 1842/1965, с. 228). Фарр (Farr прим. 1857/1885, с. 148) заявил, что *ежегодная смертность населения, превышающая 17 на 1000, неестественна* и вызвана в основном антисанитарными условиями жизни. Петтенкофер (1873) подсчитал убытки населения Мюнхена от брюшного тифа, а в России его ученик Эрисман (1887) опубликовал сочинение по санитарной статистике.

На рубеже XIX − XX вв. вместо вариоляции началось применение оспопрививания по Дженнеру, результаты которой оказались блестящими. Вначале, однако, возникали конкретные вопросы, поскольку оценка различных вариантов новой процедуры оказалась серьёзной задачей, да и вариоляция не была ещё оставлена. См. также § 7.2.3.

**11.8.2. Биология.** В XVIII в. начались попытки связать появление листьев, цветов и плодов у данного вида растений с суммами средних суточных температур (Réaumur 1738), а Кетле (Quetelet 1846, с. 242) предложил с этой же целью использовать суммы квадратов температур, но не смог количественно сравнить своё предложение со старым законом. Также в XIX в. появились обширные статистические данные о жизни растений (DeCandolle 1832), а Беббедж (Babbage 1857) составил статистический вопросник о классе млекопитающих, в России же (Бэр 1860 – 1875) было проведено серьёзное статистическое исследование рыболовства.

В начале века Гумбольдт (Humboldt & Bonpland 1815 – 1825, 1815; Humboldt 1816) создал географию растений, основанную на сборе и оценивании статистических данных. Различными статистическими проблемами пришлось заниматься Дарвину, например, при сравнении перекрёстного опыления растений с самоопылением (§ 11.6), изучении жизни земляных червей (§ 13-2) и наследственностью уродства у человека (1868/1885, т. 1, с. 449). Последнюю задачу по просьбе Дарвина решил Стокс, видимо применив распределение Пуассона**.** Статистические таблицы и сводки данных, в том числе и собственных, встречаются во многих сочинениях Дарвина.

Являясь основным автором гипотезы происхождения видов, Дарвин пользовался такими понятиями как вариации, изменчивость, не определив ни одного из них, а рассуждая о случайности, он понимал это понятие неоднозначно, – как незнание причин (1859/1958, с. 128), ср. Лаплас (§ 8.3), и, в 1881 г., как отсутствие цели (1903, с. 395), ср. Аристотель (§ 2.1.1). Примечательно также, что Дарвин (1859/1958, с. 77) фактически описал случайность как действие сложных причин, ср. Пуанкаре (§ 12.2-9):

*Подбросьте горсточку перьев, и каждое из них упадет на землю в соответствии с определёнными законами. Но насколько просто определить, куда каждое упадёт по сравнению с проблемами эволюции видов.*

Стохастическая сущность гипотезы эволюции была ясна и её сторонникам, и противникам, однако Больцман (§ 11.8.5) являлся исключением.

Постараемся формализовать эволюцию видов по Дарвину. Введём $n$-мерную систему координат (возможно с $n = \infty$), – параметров тела особей данного вида, изучаемых отдельно для каждого пола, – и соответствующее евклидово пространство с обычным определением расстояния между его точками. В момент $t_m$ каждая особь оказывается некоторой точкой пространства, а в момент $t_{m+1}$ то же будет иметь место для особей следующего поколения, которые, однако, займут в результате “вертикальной” вариации несколько иное положение. Введём ещё точку (или подпространство) $V$, соответствующую оптимальным условиям существования вида, и тогда его эволюция представится дискретным случайным процессом приближения особей к точке *V* (которая, впрочем, перемещается в пространстве в связи с изменениями во внешнем мире), а множество особей данного поколения образует соответствующее сечение процесса. Для определённости нужны вероятности, характеризующие процесс (и даже оценки влияния повадок, инстинкта и пр.), а их-то и нет.

Основные математические доводы против этой гипотезы были основаны на том, что “равномерно” случайные вариации (ср. § 7.1.3 в связи с трудностями обобщения понятия случайности) либо не могут привести к целенаправленной эволюции, либо потребуют громадного времени. Лишь работа Менделя (1866; 1866 – 1873), о которой вспомнили только в начале XX в., а затем и изучение роли мутаций позволили ответить на эту критику. Возражений и проблем осталось более чем достаточно, однако вся биология после Дарвина преобразилась, а кроме того его труды привели к возникновению Биометрической школы (§ 16.2).

С математической точки зрения у Менделя не было ничего, кроме простейшего рассмотрения биномиального распределения. Явившись началом нового направления в биологии, – генетики, – оно тем самым доставило пример фундаментального результата, достигнутого элементарными средствами. Мендель, правда, основывался на своих опытах, которые послужили предметом многочисленных дискуссий по поводу его исходных данных, а также о его субъективной и объективной честности, и в них, например, приняли участие Фишер (1936) и Ван дер Варден (Waerden van der 1968). Со временем все сомнения, кажется, рассеялись, тем более, что вся биография Менделя и его метеорологические наблюдения и исследования безусловно свидетельствуют в его пользу. Считается, что Мендель родился в немецко-чешской семье. По нашим данным он был немцем, а потомки его родственников были в 1945 – 1946 гг. изгнаны из тогдашней Чехословакии[11].

**11.8.3. Метеорология.** Материал, относящийся к XVIII в., см. в § 7.2.4.

Гумбольдт (1818, с. 190) считал, что

*для отыскания законов природы* [в метеорологии] *мы должны определить среднее состояние атмосферы и постоянные типы её вариаций и только затем исследовать причины местных пертурбаций.*

Он (1845 – 1862, т. 1, с. 18 и 72; т. 3, с. 288) вообще обусловил исследование естественных явлений изучением средних состояний. В последнем случае он упомянул *единственный* [в естествознании] *решающий метод средних чисел*, который (1845, т. 1, с. 82) *указывает нам постоянство в изменениях*.

Сам Гумбольдт (1817, с. 466) ввёл изотермы и климатические зоны (известные древним учёным, которые определяли температуру лишь качественно) и тем самым выделил климатологию из метеорологии и обратил внимание на местные искажения температуры[12]. Много позже он (1845 – 1862, т. 4, с. 59) сообщил, что перенял идею контурных линий у Галлея (§ 3.1.4), – и тем самым повторил прекрасный пример предварительного исследования данных. Гумбольдт (1817, с. 532) также рекомендовал ввести контурные линии для зимних и летних температур, но его определение климата (1831, с. 404) почему-то не было непосредственно связано со средними состояниями. Последующие учёные, впрочем, начали формулировать эту связь всё более отчетливо (Körber 1959, с. 296). Чупров (1922a/1960, с. 151), к примеру, отождествил климат с системой определённых средних значений.

Гумбольдт (1843, т. 1, с. 83) ещё до 1845 г. высказался о средних величинах, но о переходе к изучению распределений не упомянул:

*Точные науки достигают успеха только по мере рассмотрения физических явлений в целом и постепенного отказа от придания чрезмерного значения и точкам максимума, расположенным отдельно от уровня фактов, и крайним температурам нескольких дней года*.

Köppen (1874, с. 3) полагал, что *введение арифметической средины в метеорологию было важнейшим шагом*, но что этого ещё мало. О необходимости дальнейшего шага много раньше заявил Dove (1837, с. 122), который выступил против *господства* средних значений. В основном следуя за Гумбольдтом, он (1839, с. 285) сформулировал цели метеорологии как

*определение средних значений* [температур], *вывод законов их периодических изменений и указание правил для* [вычисления их] *неправильных изменений*.

Не меньшее значение он придавал пространственному распределению температуры, а позднее он (1850, с. 198) ввёл месячные изотермы.

Более чётко о требуемом изменении заявил Buys Ballot (1850, с. 629): изучение отклонений от средних значений (состояний) является второй стадией в развитии метеорологии. Он (1847, с. 108) заметил, что подобный процесс происходит в астрономии: началось изучение отклонений планетных орбит от эллиптической формы. И то же, как он добавил, имеет место во всех науках, не допускающих экспериментирования. Он мог бы упомянуть постепенное уточнение фигуры Земли.

В XVIII в. и, видимо, в начале XIX в. было принято выводить среднемесячное и даже среднегодовое значение температуры воздуха из её двух крайних значений (Cotte 1788b, с. 9), так что введение среднеарифметического действительно явилось значительным успехом.

Наблюдения множились и публиковались без пользы для большинства читателей научных журналов. Против этой практики выступил, например, Био (Biot 1855, с. 1179 – 1180), а позднее Менделеев (1876/1946, с. 267) более определённо заметил, что господствующей *собирательной* школе метеорологов нужны *одни числа и числа.* Затем он (1885/1952, с. 527), однако, оптимистически заключил, что зарождается новая метеорология, которая начала на основе статистических материалов *понемногу обладать*, *синтезировать*, *предсказывать*.

Lamont (1867, с. 247) заявил, что неправильные изменения атмосферы во времени не случайны *в смысле исчисления вероятностей* и (с. 245) рекомендовал взамен обычного свой собственный метод изучения одновременных наблюдений в нескольких местах. Кетле (1849 – 1857, т. 1, гл. 4, с. 53) заметил, что разности подобных наблюдений соответствовали случайным погрешностям, но не развил своей мысли. Много раньше Ламонт (прим. 1839, с. 263) указал, что атмосферное давление и температура воздуха весьма переменчивы, а потому трудно выводить надёжные средние значения. Без доказательства он добавил, что одновременные наблюдения в течение года равнозначны 30 годам обычных наблюдений.

Ламарк, самый крупный биолог своего времени, много занимался физикой, химией и метеорологией. Его заслуги в последней области длительное время не признавались (Muncke (1837) не упомянул его), но теперь комментаторы отмечают его *пионерскую работу* по изучению погоды (Shaw & Austin 1942, с. 130). Мы (1984b, § 6) цитировали некоторые из важных утверждений Ламарка. Он повторно применял термин *статистическая метеорология* (например, 1800 – 1811, т. 4, с. 1), цель которой состояла в изучении климата (там же, т. 11, с. 9 – 10), или, в другом месте (там же, т. 4, с. 153 – 154), в изучении климата, правильностей в изменениях погоды и влияния различных метеорологических явлений на животных, растения и почву.

Кетле (Quetelet 1846, с. 275) решительно заявил, что метеорология чужда статистике: в отличие от *физика* статистик прежде всего желает выяснить всё, влияющее на человека и улучшающее его благосостояние. Кроме метеорологии он перечислил и другие *чуждые* науки (физическую географию, минералогию, ботанику). Его мысль верна лишь в том, что статистическая метеорология, звёздная статистика и т. д. принадлежат соответствующим наукам.

Изучение плотностей распределения метеорологических элементов началось в середине века. Кетле, например, знал, что они асимметричны (§ 11.5). Один автор (Meyer 1891, с. 32), сославшись на этот факт, заявил, что теория ошибок не применима к метеорологии. Математическая статистика, однако, не отказывается от обработки асимметричных рядов наблюдений, и уже К. Пирсон (1898) использовал статистический материал Мейера для иллюстрации своей теории асимметричных кривых. Кетле (1852; 1853, с. 68; 1849 – 1857/1857, № 5, с. 29 и 83) неоднократно упоминал длительные периоды хорошей или плохой погоды. Он (1852; 1857) исследовал это явление, применяя элементарные стохастические рассуждения, и заключил, что вероятности погоды сохраняться (или изменяться) со дня на день не были независимы. Кёппен (Шейнин 1984b, с. 80) более тщательно исследовал эту тему. Но одним из первых, заметивших зависимость погоды от её предшествующего состояния, был Ламарк (1800 – 1811), см., например, т. 5, с. 5 и 8 и т. 11, с. 143. В т. 11, с. 122 он сформулировал афоризм: *Всеобщее состояние атмосферы* […] *зависит не только от множества причин, которые склонны действовать, но и от влияния предшествующего состояния*.

Наконец, Кетле собирал и систематизировал наблюдения метеорологических элементов, см. Прим. 7, и Кёппен (1875, с. 256) заметил, что наблюдения с начала 1840-х годов *по всей сети станций* в Бельгии оказались *самыми продолжительными* [в Европе] и исключительно ценными.

**11.8.4. Астрономия.** Уже Д. Бернулли (§ 7.1.1), а затем Лаплас (§ 8.1-2) стохастически исследовали правильности в Солнечной системе. По существу они рассматривали планеты как элементы единой совокупности, и этот подход выпукло проявился при изучении астероидов. Ньюком (Newcomb 1861a и позже) неоднократно сравнивал теоретические (вычисленные на основе равномерного распределения) и действительные параметры их орбит, хотя и не смог ещё количественно оценить свои результаты. Пуанкаре (§ 12.2-5) пытался стохастически оценить общее число малых планет.

Особый интерес представляют рассуждения Ньюкома (1862) о распределении астероидов, которое было, видимо, основано на позднее опубликованном и ещё более интересном утверждении (1881). Первое из этих исследований трудно понять, в основном из-за небрежного изложения, но представляется, что Ньюком интуитивно пришёл к следующему положению: большое число независимо движущихся точек ($B_1 + b_1t$), ($B_2 + b_2t$), ... где $t$ – время, а остальные величины постоянны, окажутся почти равномерно распределёнными по окружности.

В 1881 г. Ньюком заметил, что первые страницы логарифмических таблиц изнашиваются быстрее остальных, и исследовал вероятность первым значащим цифрам эмпирических величин быть равными $n_1$, $n_2$, ... Без всякого доказательства он указал, что если числа $s_1$, $s_2$, ..., $s_n$ выбраны *случайно*, то положительные дробные части разностей ($s_1 - s_2$), ($s_2 - s_3$), ... будут при $n \to \infty$ стремиться к равномерному распределению по окружности и что эмпирические величины, которым эти разности соответствуют, будут иметь равновероятные мантиссы логарифмов. Рассуждение Ньюкома эвристически напоминает знаменитую теорему Г. Вейля, в соответствии с которой члены последовательности $\{nx\}$, где $x$ иррационально, $n$ = 1, 2, ... , а фигурные скобки означают, что целые части чисел отбрасываются, равномерно распределены на единичном интервале. Заметим ещё, что с точки зрения теории информации утверждение Ньюкома означает, что каждая эмпирическая величина обеспечивает одну и ту же информацию. Несколько авторов независимо друг от друга доказали утверждение Ньюкома, которое один из них (Raimi 1976, с 536) посчитал *вдохновлённой догадкой* и заметил, что оно не универсально.

В середине века была установлена примерная периодичность числа солнечных пятен, что потребовало обработки их наблюдения примерно за сто лет. По Ньюкому (1901), который принял во внимание наблюдения с 1610 г., период (как, впрочем, примерно и считалось раньше) оказался равным $T$ = 11,13 лет; в настоящее время полагают, что строгая периодичность отсутствует, но что приближённо $T$ = 11 лет. Во всяком случае, можно считать, что количества пятен образуют временной ряд, т.е. объект, ныне изучаемый теорией вероятностей. Но заметим, что вычисления Ньюкома не были безупречными. Период он определял по отдельности для четырёх фаз, – для максимумов, минимумов и обеих полусумм этих экстремумов. Не приняв во внимание возможные зависимости периодичности, он вывел среднее из этих фаз.

Известно, что колебания широт вызваны движением полюса около некоторой точки, в основном по кривой, близкой к окружности, с периодом 1,2 года. Ньюком (1892) проверял выдвинутую в то время гипотезу о том, что эти колебания периодичны с периодом 1,17 года и предположил, что полюс движется равномерно по окружности. Некоторые его вычисления сомнительны (и недостаточно подробны, что, к сожалению, характерно и для многих иных его работ), однако его вывод (гипотеза не опровергалась) оказался верным.

Ещё в 1767 г. Мичелл (§ 7.1.6) определял вероятность близкого взаимного положения двух звёзд из нескольких тысяч, случайно (т. е. равномерно) распределённых по небесной сфере. Применив распределение Пуассона, Ньюком (1859 – 1861, т. 2, с. 137 – 138) вычислил вероятность того, что некоторая градусная площадка будет содержать *s* звёзд из *N*, *случайно* распределённых на небесной сфере, и много позже Фишер (Хальд 1998, с. 73 – 74) также обратил внимание на эту задачу. Ньюком (1904a) кроме того, рассуждал о субъективном отличии случайного распределения от равномерного. Вот соответствующее мнение Буля (Boole 1851/1952, с. 256):

*Случайное распределение, т. е. распределение, соответствующее закону или методу, о последствиях которого мы должны быть в полном неведении. Таким образом, положение звезды в одной или другой точке неба окажется для нас равновероятным. Всякое иное распределение мы позволим себе назвать указующим*.

Итак, задача Мичелла привела к общим рассуждениям. Наконец, Ньюком (1861b) решил родственную задачу, определив вероятность расстояния между полюсами двух больших кругов, случайно расположенных на сфере. Исходя из иных начальных соображений, Лаплас (1812/1886, с. 261) и Курно (1843, § 148) ранее рассматривали ту же задачу, причём решения оказались различными во всех трёх случаях (Шейнин 1984a, с. 166 – 167).

В. Я. Струве (1827, с. xxxvii – xxxix) вычислил вероятность двум или трём звёздам находиться вблизи друг друга, однако Bertrand (1888, с. 170 – 171) заметил, что взаимное расположение звёзд можно характеризовать по-разному, а на с. 4 – 7 заключил, что задачу Мичелла нельзя решить.

Примерно в 1784 г. У. Гершель начал подсчитывать количества звёзд в различных участках неба. Он полагал, что его телескоп проникает до границ Млечного Пути и имел в виду определить его очертания. На одном отрезке Млечного пути он (1784/1912, с. 158) сосчитал количества звёзд в шести участках, выбранных *случайно*, и принял среднее в качестве оценки для всего отрезка. Много позже он (1817) ввёл модель равномерного пространственного распределения звёзд, зафиксировав границы их расстояний для каждой величины, но расположение звёзд внутри установленных границ оставалось у него случайным, ср. утверждение Пуанкаре в § 2.2.4. Пытаясь оценить точность своей модели, Гершель подсчитал её соответствие с действительным количеством звёзд каждой из семи первых величин. Его критерием была сумма расхождений "действительность" минус "модель", и для взятых совместно первых четырёх величин она оказалась небольшой, хотя отдельные расхождения были велики. Заметим, что аналогичной суммой (правда, абсолютных уклонений) руководствовался Бошкович при уравнивании наблюдений (§ 7.3.2) и что сам Гершель (1805) применял тот же критерий и раньше, при исследовании направления движения Солнца по собственным движениям звёзд (гл. 7, прим. 17).

Он (1817/1912, с. 579) также указал, что

*звезда, выбранная наудачу* [...] *из* [14 тысяч звёзд первых семи величин], *вряд ли будет намного отличаться по своим размерам от их среднего размера*.

Гершель ещё не знал, что размеры звёзд чудовищно отличаются друг от друга и что, стало быть, их средний размер не имел смысла, но и вообще вероятностные высказывания при отсутствии данных крайне опасны. Количественная проверка по неравенству Бьенеме – Чебышева выявила бы его ошибку. Но во всяком случае оказалось, что звёзды, ещё раньше чем астероиды, начали считаться элементами единой совокупности (в данном случае – ошибочно).

Настоящим началом звёздной статистики можно полагать середину XIX в., когда стали изучаться собственные движения сотен звёзд (до открытия эффекта Доплера в 1842 г. – только в направлениях, перпендикулярных визирным лучам) и соответствующие средние для звёзд данной величины. Последние, однако, оказались почти бесполезными, поскольку величины звёзд зависят от их расстояний.

Начиная с Гершеля, астрономы считали, что собственные движения звёзд случайны, хотя случайность понималась иногда по-разному. Ньюком (1902a) принял, что проекции движения звёзд на произвольную ось распределены нормально и определил распределения самих движений и их проекций на произвольную плоскость. Оба закона оказались связанными с распределением хи-квадрат.

Общее статистическое изучение звёздных ансамблей стало считаться важнее, чем точное определение параметров той или иной звезды (Hill & Elkin 1884, с. 191):

*Ждущие ответа громадные космические вопросы состоят не столько в том, каков точный параллакс той или иной звезды, а Каковы средние параллаксы звёзд первой, второй, третьей и четвертой величин соответственно по сравнению со звёздами меньших величин.* [И] *какая связь существует между параллаксом звезды и величиной и направлением её собственного движения, или же можно доказать, что никакой связи или соотношения не существует*.

Каптейн (1906b; 1909) описал вероятностную картину звёздного мира при помощи законов распределения (случайных) параллаксов и пекулярных движений звёзд. Он же (1906a) выступил инициатором исследования звёздной системы по схеме, как можно сказать, расслоенной выборки. Вот выдержка из письма, которое он получил в 1904 г. по этому поводу от одного из своих коллег (Edward Pickering) и опубликовал на с. 67:

*Так же, как и при составлении карты с горизонталями, мы можем измерить высоты вершин квадратов со сторонами в сто метров, но мы ещё должны измерить высоту высшей точки каждого холма, дна каждого озера* [...] *и других характерных точек.*

Ньюком (1902b, с. 302 и 303) верно оценил усилия Каптейна:

*Недавно начало развиваться то, что мы можем считать новой ветвью астрономической науки.* [...] *Это то, что мы сейчас называем наукой звёздной статистики. Можно сказать, что статистика звёзд ведёт свое начало от гершелевских черпков неба* .[...] *Результаты Каптейна означают, что мы можем описывать вселенную как единый объект* ...

В статистике выборочный метод начал признаваться примерно в то же время, хотя и не без сопротивления (You Poh Seng 1951); его самым активным сторонником был Киаер, см. также § 11.7-2.

Составление каталогов и ежегодников также, конечно, носило статистический характер и иногда имело место и противопоставление этого направления теоретическим построениям. Proctor (1872) составил карту 324 тыс. звёзд, чтобы обходиться без всякой теории о строении звёздного мира, но развитие астрономии доказало ошибочность его взглядов.

Вычисление и уравнивание наблюдений, их разумное сопоставление всегда были важными в астрономии, и в первую очередь мы обязаны снова упомянуть Ньюкома. Он обработал более 62 тысяч наблюдений Солнца и планет (см., например, Benjamin 1910) и существенно исправил принятые до него значения астрономических констант. Для этого ему пришлось исследовать и сравнивать наблюдения, выполненные на главных обсерваториях мира, притом, пожалуй, без всяких вычислительных средств, кроме таблиц логарифмов. К тому же, он опубликовал соответствующие теоретические исследования. Естественно, что вечная проблема уклоняющихся наблюдений заботила его. Вначале он относился к ним с большим сомнением, затем, однако (1895, с. 186), стал терпимее. Если ряд наблюдений нельзя было характеризовать нормальным распределением, Ньюком предпочитал назначать меньший вес *дальним* результатам (1896, с. 43), либо, при асимметричных рядах, выбирать медиану вместо среднего арифметического. На Курно (§ 11.3-3) он, впрочем, не сослался и в двух одновременно вышедших мемуарах (1897a; 1897b) назвал медиану двумя (!) другими, ныне забытыми терминами.

Менделеев (§ 11.8.3) был против объединения различных сводок наблюдений, Ньюкому, однако, приходилось это делать неоднократно, и он (1872) при этом назначал веса отдельным астрономическим каталогам в зависимости от их систематических погрешностей (вряд ли обходясь без субъективных соображений), а на заключительной стадии повторял это объединение с весами, соответствующими теперь уже случайным ошибкам.

Поняв, что те астрономические наблюдения, которые приходилось производить в неблагоприятных условиях, не могут быть описаны нормальным распределением, Ньюком (1886) предложил для них (и, ошибочно, вообще для всех наблюдений в астрономии) обобщённый закон, – смесь нормальных законов с различными мерами точности, появляющимися с соответствующими вероятностями. Таким образом, мера точности превратилась в дискретную случайную величину, а параметры рекомендованной плотности распределения приходилось выбирать субъективно. Ньюком заметил, что его предложение приводило к выбору взвешенной арифметической средины с весами, убывающими к краям вариационного ряда. Он, кроме того, ввёл некоторые упрощения, и впоследствии (Hulme & Symms 1939, p. 644) было выяснено, что это приводило к выбору искомой оценки по принципу наибольшего правдоподобия. Вряд ли Ньюком представлял себе, что его смесь нормальных распределений не была нормальной (Eddington 1933, с. 277). Закон Ньюкома был в свою очередь обобщён (Lehmann-Filhés 1887; Огородников 1928; 1929a; 1929b), см. Шейнин (1995c, с. 179 – 182), но представляется, что эти нововведения не имели практического значения.

Как и Менделеев (§ 11.8.3), Ньюком (1897b, с. 165) полагал, что расхождение между двумя эмпирическими величинами существенно, если оно превышает сумму соответствующих вероятных ошибок, и похоже, что этот жёсткий критерий был общепринят в естествознании. И вот соответствующее высказывание Маркова из малодоступного источника (Шейнин 1990b, с. 453 – 454):

*Правило Ф. А. Бредихина, что для признания реальности величины вычисленной требуется, чтобы она по крайней мере в два раза превосходила свою вероятную погрешность, мне очень нравится. Я не знаю только, кто установил такое правило и признают ли его все опытные вычислители.*

Иными словами, разность между нулём и “реальной” ненулевой величиной должна превышать удвоенную вероятную ошибку последней, что совпадало с мнением Менделеева и Ньюкома. И всё-таки Ньюком несколько раз указывал, что выведенная им величина $a$ имела среднюю квадратическую ошибку $b$ даже при весьма значительном превышении последней над первой, вплоть до случая $a = 0{,}05$ и $b = 0{,}92$ (1901, с. 9)! Dorsey & Eisenhart (1969, с. 50) рекомендовали другое правило, в котором вероятные ошибки относились к единичным измерениям.

Неоднократно применяя МНКв, Ньюком иногда отступал от жёстких правил; один такой пример см. в § 10А.5-3. В другом случае он (1895, с. 52) посчитал, что малыми коэффициентами в системе нормальных уравнений можно пренебрегать, но не указал никакого количественного правила. Ньюком представлял себе, что зависимость между нормальными уравнениями может происходить ввиду накопления погрешностей вычислений при переходе к ним от исходных уравнений, и разумно решил, что в таких случаях следовало вычислять с вдвое бóльшим числом значащих цифр. Именно так он (1867) поступил при исследовании вычислений казанского астронома Ковальского, который заметил, что из выведенных им четырёх нормальных уравнений лишь два независимы. Сейчас известно, что плохо обусловленные исходные уравнения лучше решать без составления нормальных уравнений, – например, методом последовательных приближений. Отметим ещё особое вычисление (1874, с. 167). Имея 89 уравнений погрешностей с пятью неизвестными, Ньюком составил и решил нормальные уравнения, но затем, вычислив остаточные свободные члены первых, он всё-таки решил их заново каким-то иным способом (представив лишь результаты обоих решений). Можно полагать, что Ньюком имел в виду по возможности исключить систематические погрешности, но как?

В теоретическом плане он (1895, с. 82; 1897b, с. 161) ошибался, хотя и ссылался ранее на второе гауссово обоснование МНКв, полагая, что этот метод неотделим от нормального распределения. Укажем ещё на его неудачное рассуждение (Newcomb & Holden 1874, с. 270 – 271), аналогичное которому мы, впрочем, укажем в § 11.8.5: для систематической ошибки $s$ и случайных ошибок $r_1$ и $r_2$ он специально доказывал, и притом лишь для нормального распределения, рассматривая соответствующий двумерный интеграл, что

$$E[(s + r_1)(s + r_2)] = s^2.$$

Можно заключить, что Ньюком поневоле в основном оставался в рамках классической теории ошибок и простых вероятностных схем, однако сохранившаяся часть его переписки с Пирсоном 1903 – 1907 гг. (Шейнин 2002b, § 7.1) свидетельствует о его желании овладеть зарождавшейся математической статистикой. Вот выдержка из его письма 1903 г. английскому учёному:

*Вы – единственный из ныне живущих авторов, чьи труды я почти всегда читаю, если только имею время и могу их достать, и с кем я провожу во время чтения воображаемые беседы.*

Упомянем в заключение статистическую работу Ньюкома (1904b), в которой он исследовал классическую задачу о соотношении полов новорождённых (см. §§ 3.4 и 4.4). Он предположил, что существуют три вида семей численностью, скажем, *m*, *n* и *n*, рождения мальчиков в которых имеют вероятности *p*, (*p* + *α*) и (*p* – α), и особо интересовался соотношением полов близнецов. Пол зародыша, по его мнению, определялся лишь после того, как в результате ряда последовательных причин он становился все более вероятным в том или ином смысле.

**11.8.5. Физика.** Кинетическая теория газов возникла в середине XIX в. в результате проникновения статистического метода в физику. Truesdell (1975) исследовал её раннюю историю. Так (с. 28), длину среднего свободного пробега молекулы в 1843 г. ввёл Уотерстон, но его работа не была опубликована. Не исследована соответствующая сторона творчества Пуассона, но можно указать, что он (1837a, с. 10) ввёл средний интервал между молекулами.

Клаузиус (Clausius 1849) опубликовал, видимо, первый физический мемуар (но не рассматривал молекулярной гипотезы), содержащий идеи и методы теории вероятностей. Он же (1857) ввёл понятие о средней скорости молекул и (1858) определил закон распределения длины их свободного пробега, см. ниже. Клаузиус (1889 – 1891, с. 71) специально доказывал, что для скорости молекулы ξ имеет место равенство $E(\xi/E\xi) = 1$, и это можно объяснить тем, что после Лапласа теория вероятностей оказалась в незавидном положении (ср. § 8.4-1).

Ограничиваясь рассмотрением средней скорости молекул, Клаузиус (1857/1867, с. 238 и 248) всё же утверждал, что их скорости весьма различны. Даже Бошкович (1758, § 481) заметил нечто подобное, хотя, возможно, полагал, что разности между этими скоростями невелики: *Точки* [атомы] *частицы* [света, как в § 477, или любого тела, как в § 478] движутся *совместно, практически с одной и той же скоростью, которая определяется суммой* [средней] *из неравенств, относящихся ко всем его точкам*.

Единую среднюю скорость молекул Клаузиус определял так, чтобы полная кинетическая энергия газа равнялась её действительному значению. Позднее он (1862/1867, т. 3, с. 320) заявил, что скорости молекул отличаются друг от друга случайно.

Вот его рассуждение (1858/1867, с. 268) о длине свободного пробега молекул. Обозначим через *a* вероятность единичного пробега, тогда

$$W = a^x = (e^{-x})^{\alpha},\ \alpha > 0$$

окажется вероятностью длины пробега, равной *x*, причём α определяется по молекулярным константам вещества. Аналогичные соображения встречаются и в других сочинениях Клаузиуса (1862/1867, § 29; 1889 – 1891, с. 70 – 71 и 119). Он (1889 – 1891, с. 70 – 71) вычислил также средний свободный пробег молекулы, исходя от случайного пробега ξ.

Пусть

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m$$

при произвольном *m*. Тогда в соответствии с предположениями Клаузиуса, $\xi_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, не будет зависеть от суммы предыдущих величин ξ, и, как можно теперь сказать, характеристическая функция для $\xi_k$ будет равна произведению этих функций для указанных предыдущих величин. Все эти функции совпадают и функция распределения для ξ, $F(x)$, безгранично делима.

Нововведения Клаузиуса интересны, но он не попытался построить кинетическую теорию на стохастической основе.

Максвелл (1860) установил свой знаменитый закон распределения скоростей одноатомных молекул. Он молчаливо предполагал, что компоненты скорости независимы, но эта предпосылка была в дальнейшем ослаблена (§ 10А.1.3). Он счёл, что искомое распределение устанавливается в результате громадного числа столкновений громадного числа частиц. О других высказываниях Максвелла, косвенно или прямо относящихся к случайности, см. ниже.

Затем Максвелл заявил, что среднее число частиц, обладающих скоростями в интервале $[v; v + dv]$, будет пропорционально

$$f(x) = \frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}} v^2 \exp(-v^2/\alpha^2)dv.$$

Это можно обосновать, представив вероятность таких скоростей в виде

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_v^{v+dv} t^2 \exp(-t^2/\alpha^2)dt.$$

Подразумевается, что составляющие скорости одинаково распределены.

Вот одно из интересных высказываний Максвелла (1873а/1890, с. 374):

*Здесь мы встречаемся с новым типом регулярности, а именно регулярности средних, на которую вполне можно положиться для всех практических целей, но которая не может претендовать на абсолютную точность, характерную для абстрактной динамики*.

Черновые варианты использованного источника (Максвелл 1990 – 2002, 1995, с. 922 – 933) включают ранее неопубликованное и очень интересное утверждение (с. 930): отказ от *строгого динамического метода* и принятие взамен статистического метода *является шагом, который нельзя философски переоценить*. И вот определение (не вполне формальное, притом *составное*) статистического метода, эвристически напоминающее формулу Колмогорова и Прохорова (§ 1.2): он состоит (Максвелл 1871/1890, с. 253) в *оценке среднего состояния группы атомов,* в изучении *вероятного числа тел в каждой* [изучаемой] *группе* (1877, с. 242).

Максвелл фактически упоминал случайность (если не хаотичность). Так (1859/1890, т. 1, с. 295 – 296),

*В динамике существует весьма общая и очень важная проблема.* […] *Отыскав частное решение уравнений движения любой материальной системы, определить, вызовет ли небольшое возмущение движения, указанное решением, небольшую периодическую вариацию или расстройство движения.*

Это высказывание содержалось в рукописи 1856 г. (1990 – 2002, 1990, с. 445). Позже Максвелл (1873с, с. 13) заметил, что в некоторых случаях *небольшая начальная вариация может привести к громадному изменению,* а в докладе 1873 г. (Campbell & Garnett 1882/1969, с. 440) объяснил, что в таких случаях состояние системы неустойчиво и предсказание невозможно. Там же (с. 442) он привёл соответствующий пример: неустойчивость рефракции луча в двуосном кристалле и дальновидно заявил (с. 444), что физики будут изучать *сингулярности и неустойчивости*.

И в рукописи того же 1873 г. (там же, с. 360) Максвелл заметил, что

*Форма и размеры планетных орбит* […] *не определяются какими-либо законами природы, а зависят от существующего расположения материи. То же имеет место в отношении размера Земли*.

Впрочем (§ 8.4-8), эксцентриситеты планетных орбит не зависят от расположения материи.

И вот мнение Максвелла (1875/1890, с. 436) о случайности в микромире:

*Особенность теплового движения состоит в том, что оно совершенно беспорядочно.* […] *Ни направление, ни величина скорости молекулы в данное время не могут быть выражены в зависимости от её нынешнего положения и момента*.

Он (1879/1890, с. 715 и 721) и позже Больцман (1887, с. 264; 1895 – 1899, т. 2, с. 144) ввели фиктивные физические системы и смогли рассуждать о вероятности нахождения системы в некоторой фазе. Фактически они оба использовали генеральную статистическую совокупность. На молекулярном уровне Больцман (1868/1909, с. 50; 1895 – 1899, т. 1, с. 50) применял два определения апостериорной вероятности, фазовое и временно́е, заявил, что они равносильны (§ 13-2) и тем самым высказал эргодическую гипотезу. При изучении многоатомных газов он (1871) определил вероятность их состояний произведением вида $fd\omega$, где $f$ было некоторой переменной во времени функцией координат и скоростей отдельных молекул, а $d\omega$ – произведением дифференциалов этих параметров. При исследовании случайных процессов функции вида $f$ определяют распределение системы случайных величин в соответствующий момент времени.

С 1871 г. Больцман начал связывать доказательство второго закона термодинамики с вероятностными соображениями, однако указал (1886/1905, с. 28), что XIX в. будет веком *механического миропонимания, веком Дарвина* и (1904а/1905, с. 368) что гипотеза эволюции объяснима в механических терминах. Аналогично он (1904b, с. 136), полагал, что электричество и теплоту быть может удастся описать механически. Объективной случайности Больцман не признавал, что могло служить обоснованием его точки зрения. Рубановский (1934, с. 6) заметил, что его *механическое миропонимание* одержало *пиррову победу* над случайностью, но идеологически полностью отступило. Добавим, что Hertz (1894, Введение) заметил, что

*Физики единодушны в том, что задача физики состоит в том, чтобы свести явления природы к простым законам механики.*
Но вот признание Больцмана (1904/1905, с. 603) :

*Второй* [фундаментальный закон термодинамики] *основан лишь на вероятности, как в 1870-е годы указал Гиббс*.

Больцман (1872/1909, с. 317; 1895/1909, с. 540) был высокого мнения о теории вероятностей:

1. *Не полностью доказанную теорему, справедливость которой сомнительна, не следует смешивать с полностью доказанными предложениями теории вероятностей. Подобно результатам любого иного исчисления, она выводит необходимые следствия из некоторых предположений.*

2. *Теория вероятностей так же точна, как любая другая математическая теория*, если, однако, принято *понятие о равных вероятностях, которое не может быть определено, исходя из других основополагающих понятий*.
Оговорка, видимо, как-то касалась *классического* определения вероятности.

Но о нормальном распределении ошибок наблюдения он (1896/1909, с. 570) ошибочно заявил, что оно следует из чётности этого распределения.

Хинчин (1943, с. 7) отрицательно отозвался о классиках кинетической теории:

*Довольно расплывчатые и как бы робкие вероятностные рассуждения* […] *ещё не претендуют на роль основной базы, фигурируя наряду и приблизительно на равном положении с чисто механическими рассмотрениями.* […] *Делаются ещё довольно далёко идущие предположения относительно строения и законов взаимодействия частиц*. […] *Понятия теории вероятностей являются* […] *лишёнными отчётливости, обременены тяжёлыми смешениями и благодаря этому очень часто дискредитируют математические рассуждения*. […] *Предельные теоремы теории вероятностей* […] *ещё не находят себе применения. Математический уровень всех этих исследований чрезвычайно низок, и важнейшие задачи, которые ставят математике эта новая область,* […] *ещё не видны сколько-нибудь отчётливо*.

Это написано с позиции статистической механики середины XX в. И всё-таки предельные закономерности (к примеру, при выводе закона Максвелла) использовались, а введение генеральной статистической совокупности и эргодической гипотезы Хинчин не заметил. Наконец, многословие Больцмана могло сказаться на его мнении. Вот письмо Максвелла 1873 г. (Knott 1911, с. 114):

*Я не мог понять Больцмана. Он не мог понять меня ввиду моей краткости, а его длинноты равным образом являются для меня камнями преткновения.*

Больцман (1868/1909, с. 49) в свою очередь заявил, что ему было трудно понять Максвелла (1867) ввиду *исключительной краткости* изложения.

В конце своей жизни Максвелл (1879/1890, с. 715 и 721) ввёл определение вероятности некоторого состояния системы материальных частиц:

*Я нашёл удобным вместо рассмотрения одной системы* […] *частиц, рассматривать большое число аналогичных систем*. […] *При статистическом изучении движения мы ограничиваем наше внимание количеством этих систем, находящихся в данный момент в такой фазе, что определяющие его переменные заключены в заданные границы.*

*Больцман* (1868, § 3) *определяет вероятность системы находиться в некоторой фазе* […] *как отношение всего времени её нахождения в этой фазе к полному времени движения.*

Можно сказать, что Больцман применял два определения вероятности не включая классическое; второе см. Больцман (1895, т. 1, с. 50), но иногда (1878/1909, с. 252) не уточнял свой выбор. Возможно, что он (1872/1909, с. 317) полагал, что эти апостериорные определения равносильны.

По отношению к отдельным молекулам Больцман вводил временнУю среднюю вероятность, и утверждал, что она эквивалентна *обычной* фазовой средней. При изучении многоатомных газов он (1871) определял вероятность его состояния произведением *fdw*, где *f* было некоторой переменной во времени функцией координат и скоростей отдельных молекул, но также и распределением состояний движения между ними, а *dw* − произведением дифференциалов этих параметров. В случае случайных процессов подобные функции определяют распределение системы случайных переменных в заданный момент.

Zermelo (1900, с. 318), а позднее Langevin (1913/1914, с. 3) независимо подчеркнули требование вводить *верное* [!] *и чёткое определение вероятности* (Ланжевен). Заметим, что, как и Максвелл, Больцман (1887/1909, с. 264; 1899, т. 2, с. 144) применял понятия фиктивной физической системы и бесконечной генеральной совокупности, в принципе же Максвелл и Больцман заложили основы классической статистической физики, завершённой Гиббсом.

### 11.9. Естествоиспытатели

**11.9.1. Дж. Айвори.** В письме Ольберсу 1827 г. Гаусс (*W/Erg*-4, № 2, с. 475 – 476) назвал Айвори *тонким* математиком, но указал, что *дух* МНКв оказался для него чуждым. В 1825 – 1830 гг. Айвори опубликовал 11 статей в одном и том же журнале [последняя из них – Ivory (1830)], посвящённых выводу сжатия земного эллипсоида вращения по маятниковым наблюдениям. Его основные работы к тому же относились к теории фигуры Земли (изучение притяжения тяжёлой точки эллипсоидом). В соответствии с теоремой Клеро это сжатие определяется по двум наблюдениям ускорения силы тяжести в различных широтах, однако неизбежные погрешности и местные неправильности фигуры Земли заставляют использовать избыточные измерения.

Оказалось, что Айвори не только не овладел духом МНКв, он просто не был знаком с этим методом, бездоказательно назвав его недостаточно хорошим. На словах Айвори отказался от него, фактически же воспользовался им, быть может и не поняв этого сразу. Так, исходя из уравнений типа (2.1) с $a_i = 1$, он (1826b, с. 244 – 245) заявил, что условие $\sum v_i = 0$, в отличие от требования МНКв $[av] = [bv] = \dots = 0$, является целесообразным. Он не заметил, что в его случае *целесообразное* условие совпадало с требованием $[av] = 0$.

Далее, имея в своём распоряжении 5 – 7 наблюдений, из которых только одно было проведено в экваториальной зоне, он (1826a, с. 9) скомбинировал это последнее с каждым из остальных (чтобы в каждом случае добиться значительной разности широт) и вывел сжатие из полученных пар. Экваториальное наблюдение получило несуразно большой вес, а его погрешность исказила все пары одинаковым образом. Гаусс посчитал подобный метод обработки наблюдений совершенно неверным. Впрочем, суждение об указанном методе зависит от неизвестного порядка систематических ошибок

Лишь впоследствии Айвори заметил, что местные аномалии силы тяжести могут значительно повлиять на окончательный результат и отказался от большой части (вплоть до 31%) собранных наблюдений (1826b, с. 242), и даже усомнился в возможности вывода единого сжатия. Местные искажения (см. также § 11.8.3, где упомянуты искажения температуры) действительно крайне неприятны, но Айвори старался избавиться от них слишком радикально. Наконец, оценивая точность своих результатов, он не пользовался дисперсией. Перед уравниванием маятниковых наблюдений можно заменить все станции, расположенные примерно на одной и той же широте, единой фиктивной станцией (чего Айвори не сделал).

Мы обязаны добавить, однако, что в конце концов его результат оказался достаточно близким к сжатию эллипсоида Красовского 1940 г. Именно, по Красовскому (Закатов 1950, с. 364), $e$ = 0,00335, по Айвори, от 0,00333 до 0,00338. Кроме того, он (1825, с. 7), не ссылаясь, правда, на Гаусса, заявил, что МНКв должен основываться на принципе наибольшего веса. Заметим ещё, что Айвори пытался решить одновременно две задачи: выяснить, совместимы ли наблюдения с эллипсоидальной формой Земли и уравнять их. Первая задача лучше всего решается по принципу минимакса (§ 7.3.2), а не по МНКв.

**11.9.2. Г. Т. Фехнер.** Он (Fechner 1860) был основателем психофизики и поэтому оказался одним из первых, кто ввёл, хотя и не на главном направлении, статистический метод в физику. И он (1860, т. 1, с. 8; 1877, с. 213) определил эту новую дисциплину как *точное учение о функциональном соответствии или взаимозависимости тела и души*. Но вот современное определение (*New Enc. Brit.*, 15-е изд., т. 9, 1997, с. 766):

*Психофизика это исследование количественных отношений между психологическими и физическими событиями, или, более конкретно, между ощущениями и вызывающими их стимулами*. Книгу 1860 г. в этом источнике назвали классической.

Фехнер (1855; 1864) упустил возможность комментировать возникающую кинетическую теорию газов. Более того, он (1874b, с. 7 и 9; 1897, с. 15) относился к физике как к (практической) астрономии, указывая, что обе эти отрасли естествознания занимаются симметричными распределениями и истинными значениями искомых констант.

Его математический арсенал и подход к задачам были грубыми, и почти всё, достигнутое им, пришлось повторить на гораздо более высоком уровне. Ebbinghaus (1908, с. 11) назвал Фехнера *философом, изобилующим фантазиями*, но также *очень строгим физиком*, который *создал психофизику как новую ветвь познания*.

Его первое утверждение, возможно, относилось к не научным сочинениям Фехнера, которые он подписывал *Доктор Мизес*!

Сам Фехнер (1877, с. 215) ярко оценил свою работу (и указал на своих противников):

*Вавилонская башня не была достроена, потому что строители не смогли объяснить друг другу, как построить её. Моя психофизическая структура, вероятно, устоит, потому что работники не представляют себе, как её можно снести*.

Будучи соавтором логарифмического закона Вебера – Фехнера, который связывает стимулы (возбуждения) с ощущениями, он расширил область его приложения и в этой связи немало экспериментировал (1860; 1887). Фехнеру пришлось заниматься и методикой экспериментирования, и от него ведёт начало нынешний статистический метод парных сравнений (H. A. David 1963).

В теории ошибок Фехнер упоминал Гаусса, но пытался, иногда неудачно, вводить свои собственные новшества, либо повторять не известные ему прежние результаты. Так, исходя из элементарных, но, видимо, нестрогих соображений, он (1874a, с. 74) предложил формулу для оценки точности, совпавшую с формулой Петерса (10.11), но пригодную для всех распределений. Основываясь на формулах Гаусса (§ 10А.3), он также сравнивал два конкурирующих соотношения, связывающих величины звёзд с их яркостью, решал системы переопределённых уравнений по методу попарных сочетаний (§ 7.3.2) и безосновательно и, видимо, ошибочно заметил (1887, с. 217), что этот метод асимптотически сближается с МНКв.

Основным новшеством Фехнера был, однако, коллектив, – фактически, множество наблюдённых значений случайной величины. Он (1897) предложил изучать коллективы при помощи нескольких средних, их взаимного расположения и уклонений (и абсолютных и нормированных) наблюдений от них. Фехнер уделил главное внимание асимметричным коллективам и даже стремился отыскать универсальное асимметричное распределение для погрешностей в естествознании (ср. § 11.5). Он особо выделил двойной нормальный закон (два различных нормальных закона, характеризующие меньшие и бо́льшие по величине наблюдения и переходящие друг в друга в точке максимума вероятности, т.е. в моде) и двойной логнормальный закон. Фехнер также пытался не очень успешно отделить реальную асимметрию от кажущейся, вызванной недостаточным числом наблюдений.

Наконец, Фехнер (1897, с. 365 – 366) исследовал зависимость в ходе суточных температур, сравнивая его с расположением счастливых (нумерованных) билетов солидной немецкой лотереи. При изучении её результатов он сумел получить интересную формулу, относящуюся к восходящим и нисходящим сериям (ср. § 11.2-5). Более того, Фехнер даже ввёл меру зависимости, изменяющуюся от 0 до 1, но не фиксирующую “отрицательных” зависимостей. Его сочинение было опубликовано только посмертно, после появления гальтоновской теории корреляции.

Мизес (1928/1972, с. 26 и 99) высоко оценил усилия Фехнера по изучению коллективов и заявил (с. 99), что *конструкции* [Фехнера] *побудили по крайней мере меня* [его] *принять новую* [частотную] *точку зрения*. Приведём еще две выдержки (K. Pearson 1905, с. 189; Freud 1925/1963, с. 86):

*Все ведущие статистики от Пуассона до Кетле, Гальтона, Эджуорта и Фехнера* […] *понимали, что до того, как мы сможем продвинуть нашу теорию вариаций* [в биологии], *асимметрию нужно будет как-то описать.*

*Я был всегда открыт идеям Фехнера и по многим важным пунктам следовал за этим мыслителем.*

**11.9.3. Д. И. Менделеев.** С 1893 по 1907 гг. Менделеев был учёным хранителем Главной палаты мер и весов, и обработкой наблюдений он занимался и как химик, и как метролог. Вообще же он был исключительно разносторонним учёным, изучал и статистику населения и промышленности и возможности статистики считал безграничными (1888/т. 11, с. 54):

*Грубую прозу статистики они* [поэты] *когда-нибудь облекут в стихи, потому что цифрами открывается сила, власть, людские слабости, пути истории и много других* […] *сторон мира*.

При обработке прямых наблюдений Менделеев (1895/1950, т. 22, с. 159) рекомендовал среднее арифметическое, а не медиану, даже если
*относительное достоинство определений или совершенно неизвестно или ничем ясно не определяется.* Он (1872а/1947, т. 16, с. 101) обращал особое внимание на доброкачественность измерений, возражал против объединения наблюдений, *полученных при разных условиях, при разных методах и лицах,* рекомендовал *результат, добытый по точным методам и привычными лицами* и (1895/т. 22, с. 159) категорически отрицал

какое-либо применение сомнительных наблюдений. Неудивительно, что Менделеев предпочитал принцип *лучше меньше, да лучше*. Вот его рассуждение (1872b, т. 6, с. 144, см. также 1875b, т. 6, с. 256) об уточнении закона Бойля − Мариотта: *Я предпочитаю сделать немногие, но точные и повторенные определения при нескольких значительно разнящихся давлениях, чтобы по возможности не прибегать к способу наименьших квадратов*. […] *Умножение числа наблюдений при разнообразных давлениях, близких друг к другу, представляет не только много затруднения для исследования, но и увеличивает погрешности вывода*.

*Разнящиеся* давления исключали экстраполяцию, и, видимо, как-то осредняли систематические погрешности.

Менделеев (1887/1934, т. 3, с. 209) полагал, что ряды наблюдений должны быть *стройными*, т.е. что их медиана должна совпадать со средним арифметическим, или (второе определение) что полусумма средних арифметических из крайних третей ряда должна совпадать со средним из средней трети. В первом случае он ошибочно добавил, что распределение окажется [нормальным].

Менделеев не ссылался на второе гауссово обоснование МНКв и допустил несколько теоретических ошибок в своих рассуждениях, однако определённым образом нормированное уклонение среднего арифметического от медианы признается в качестве меры асимметрии распределения (Yule & Kendall 1937, с. 161). В качестве основной меры точности Менделеев принимал вероятную ошибку (притом иногда допускал ошибки), а допустимым расхождением между двумя средними он полагал сумму их вероятных ошибок (§ 11.8.4).

## Примечания

**1.** В отечественной литературе метод средних стали называть методом Коши (Идельсон 1947, с. 14; Линник, см. выше).

**2.** Он опубликовал немало чересчур кратких заметок, в которых сообщал о своих результатах недостаточно подробно и подчас, как в данном случае, без доказательств.

**3.** Русский перевод, который выполнил ученик Чупрова, Н. С. Четвериков, к сожалению, искажён большим количеством опечаток и иногда использует неверную терминологию (даже *разница* вместо *разность*). Все наши ссылки на это сочинение сверены с оригиналом.

**4.** Курно опубликовал в предисловии письмо Пуассона 1836 г., в котором тот указал, что они единодушно понимают шанс и вероятность соответственно в объективном и субъективном смысле, однако на деле он не всегда придерживался этого различия, см. его §§ 12 и 240/3. См. также наш § 9.1.

**5.** До Курно её никто, кажется, не вспоминал, да и после него о ней упомянул лишь Чупров (1909/1959, с. 188).

**6.** Остроградский зачитал свою работу в 1846 г., но существующие материалы свидетельствуют, что он уже тогда мог быть знаком с руководством Буняковского, и именно его Остроградский по всей видимости и критиковал (см. ниже). Теорией вероятностей Остроградский почти не занимался, но (1858) провёл расчёты, связанные с работой эмеритальной кассы (т.е. общества взаимного страхования). В § 8.1-9 мы упоминали его попытку обобщить понятие морального ожидания. См. о нем Гнеденко (1951) и Seneta (2001a).

**7.** В письме № 1367 1841 г. Фарадей (Faraday 1996, т. 3) писал Кетле по этому поводу:

*Вы достойный образец активности и мощи для всех работников науки, и если я не могу служить таким же примером как Вы, я по крайней мере ценю его*.

**8.** Задачи современной статистики можно осознать по справочнику ООН *Handbook of social indicators*, 1989. W. F. M. De Vries (2001), который описал это издание, перечислил несколько сот показателей, распределённых в 13 групп. Несколько статей о новейших целях статистики в *информационном обществе* собрано в *International Statistical Review*, т. 71, № 1, 2003.

**9.** Элементы выборочного метода применялись в Англии с XII в. при проверке партий новых монет (Stigler 1977), см. также *De Moneta* 1956), а Птуха (1961) описал их использование в России с XVII в. В начале XVIII в. маршал Вобан выборочно оценил сельскохозяйственную продукцию Франции, хотя, видимо, неудачно (Moreau de Jonnès 1847, pp. 53 – 54).

**10.** Следует упомянуть Либермейстера (при.. 1876), который в медицинском контексте исследовал возможность отличить равенство от неравенства вероятностей успеха в двух небольших рядах бернуллиевых испытаний. Исходя из формулы Лапласа, основанной на реализации равномерного априорного распределения, и предполагая, что указанные вероятности совпадают, он рассмотрел вероятности больших уклонений (при гипергеометрическом распределении). Его основная формула, видимо, не была замечена, см. Seneta (1994).

**11.** Частное сообщение (2003 г.) проф. Вальтера Манна, внука племянника Менделя, Алоиса Шиндлера, и типографский текст рукописи последнего (его доклада 1902 г.).

**12.** Ещё раньше проблема учёта местных аномалий возникла при обработке маятниковых наблюдений, при помощи которых определялось сжатие земного эллипсоида (§ 11.9.1).

# 12. Бертран и Пуанкаре

Переходя к Бертрану, мы нарушаем хронологию изложения, но не её логику: работы Чебышева не заинтересовали его. Это замечание относится и к Пуанкаре, который не ссылался и на последователей Чебышева, – Маркова и Ляпунова.

## 12.1. Бертран

В 1855 г. Бертран перевёл на французский язык работы Гаусса по МНКв[1], но теорией вероятностей он начал заниматься по существу лишь в 1887 – 1888 гг., опубликовав сразу 25 заметок, а также и своё основное, торопливое и неряшливое сочинение (1888a), написанное, однако, превосходным стилем. Мы рассмотрим основные результаты этой книги, но сразу же укажем, что в ней нет систематического описания её предмета.

1) "Равномерная" случайность. На нескольких примерах Бертран доказал, что выражение *случайно*, пусть даже "равномерно" случайно, недостаточно определённо. Так, он заметил, что задачу Мичелла (§ 7.1.6) следовало обобщить: примечательным, т.е. не случайным, должно считать не только малое расстояние между звёздами, но и другие особенности их взаимного расположения. Но классической стала задача Бертрана (с. 4) о случайной хорде данного круга. Какова вероятность $p$, спрашивал Бертран, что хорда, случайно проведённая в данном круге, окажется короче стороны вписанного в него правильного треугольника? Он перечислил три возможных ответа:

a) Один конец хорды фиксирован; $p = 1/3$.

b) Фиксировано направление хорды; $p = 1/2$.

c) Центр хорды с равной вероятностью находится в любой точке круга; $p = 1/4$.

Примечательно высказывание Darboux (1902/1912, с. 50):

*В соответствии с соображениями, которые представляются равно правдоподобными, он* [Бертран] *вывел два значения искомой вероятности, 1/2 и 1/3. Он исследовал эту проблему и отыскал её решение, но предоставил читателям найти его*.
Не упомянув третьего решения, Дарбу, видимо, последовал за Пуанкаре, см. § 13.2-4, а его последняя фраза сомнительна. Мы возвращаемся к этой задаче в следующей главе.

2) Статистическая вероятность и бейесовский подход. При подбрасывании монеты одна сторона выпала $m$ = 500 391 раз, другая, $n$ = 499 609 раз (с. 276). Статистическая вероятность

первого события, $p$ = 0,500391, ненадёжна, ни одна из её значащих цифр не заслуживает доверия. После этого поразительного замечания Бертран сравнил вероятности двух гипотез, а именно $p_1$ = 0,500391 и $p_2$ = 0,499 609. Однако, вместо того, чтобы вычислить

$$[p_1^m p_2^n] \div [p_2^m p_1^n],$$

он обратился к теореме Муавра – Лапласа и ограничился указанием на то, что первая вероятность оказалась в 3,4 раза выше второй. Так что же должен был заключить читатель?

*Принцип* Бейеса Бертран (с. 161) *осудил*, кажется, только потому, что при наличии одного испытания вероятность повторения события оказывалась слишком высокой (ср. задачу Прайса о восходе Солнца в § 6.1). Этот вывод чересчур поспешен, и читатель снова в недоумении: что же можно предложить взамен? Заметим, что Бертран (с. 151) ошибочно считал, что теорема Муавра – Лапласа точно описывает обратную схему, – оценку теоретической вероятности по статистическим данным, см. § 6.2.

3) Статистика населения. Бертран обратил внимание на существование зависимости между испытаниями (или их сериями) и на изменение вероятностей изучаемых событий. Он ссылался только на Дормуа и не привёл никаких конкретных примеров, хотя и заметил (с. 312), что при изучении полового состава новорождённых Лаплас и Пуассон без обоснования принимали, что вероятность рождения мальчика постоянна во времени и в пространстве. Борткевич (§ 16.1.1) считал Дормуа намного менее значимым нежели Лексис.

4) Математическая обработка наблюдений. Этой теме Бертран уделил большое внимание, однако его рассуждения оказались дилетантскими и во многом ошибочными. Если раньше, переводя Гаусса (см. выше), он и понял суть МНКв, то теперь, более чем через 30 лет, от его знаний мало что осталось. Так, Бертран (с. 281 – 282) доказывал, что выборочная дисперсия (10.6b) может быть заменена другой оценкой точности, обладающей меньшей дисперсией. Он, однако, не заметил, что его оценка, в противоположность гауссовой, смещена. Более того: Бертран мог бы избавить себя от вычисления дисперсии оценки (10.6b): его пример относился к нормальному распределению, для которого Гаусс привёл готовую формулу (10.6c).

Вместе с тем Бертран сформулировал несколько дельных замечаний. Он с оговоркой высказался в пользу второго гауссова обоснования МНКв (§ 10А.6). Он также привёл довод против среднего арифметического, которое лежало в основе первого гауссова обоснования (см. § 10А.2-2).

5) Несколько интересных задач помимо описанной в пункте 1. Мы остановимся на задачах об урне со случайным составом шаров; о выборке без возвращения; о баллотировке; и о разорении игрока.

a) Белые и черные шары имели равные вероятности попасть в урну, а всего в ней *N* шаров. В выборке с возвращением оказалось *m* белых и *n* черных шаров, и требуется определить вероятнейший состав урны (с. 152 – 153). Бертран определял максимальное значение произведения вероятностей выборки и гипотезы о составе урны.

b) Урна содержит *sp* белых и *sq* черных шаров, $p + q = 1$. Какова вероятность, что после *n* тиражей без возвращения будут извлечены $(np - k)$ белых шаров (с. 94)? Бертран решил эту задачу при помощи [гипергеометрического распределения], получив для случая больших *s* и *n* изящный результат

$$P = \frac{\sqrt{s/(s-n)}}{\sqrt{2\pi pqn}}\exp\left(-\frac{k^2 s}{2pqn(s-n)}\right).$$

Эту формулу он ранее привёл без вывода (1887b), заметив, что переменная вероятность извлечения шаров того и другого цвета служила *как бы регулятором*.

c) За кандидатов *A* и *B* было подано, соответственно, *m* и *n* голосов, $m > n$, и каждый голос регистрировался немедленно. Какова вероятность, что *A* неизменно опережал *B* (с. 18)? Бертран повторил несложный вывод André (1887), получив

$$P = (m - n)/(m + n), \qquad (12.1)$$

см. также Феллер (1950/1964, с. 81). Он (Bertrand 1887a), собственно, вывел формулу (12.1) первым при помощи уравнения в конечных частных разностях. Мы упоминаем эту задачу, поскольку она нашла многие применения (Феллер, там же). Takácz (1982) проследил ее историю вплоть до Муавра (§ 5.1-5) и указал, что она была обобщена и включила случай $m \geq \mu n$ для целых положительных значений μ и что он сам в 1960 г. ещё более обобщил её.

d) Из нескольких задач на разорение игрока, которые рассмотрел Бертран, мы выбрали одну (с. 122 – 123). Игрок *A* имеет *m* фишек, его противник обладает бесконечным капиталом, а вероятность его выигрыша в каждой партии равна *p*. Какова вероятность разорения игрока *A* в точности после *n* партий ($n > m$)? Бертран смог решить эту задачу, используя формулу (12.1). Вероятность игроку *A* выиграть $(n – m)/2$ раза и проиграть $(n + m)/2$ раза вычисляется весьма просто, но она ещё должна быть умножена на вероятность того, что за это время игрок *A* никогда не будет иметь более *m* фишек, т.е. на $m/n$.

В краткой главе Бертран отрицал почти всё, достигнутое Кондорсе в *моральных приложениях* теории вероятностей, но не сослался ни на Лапласа, ни на Пуассона.

В двух заметках Бертран (1888b; 1888c) близко подошёл к доказательству того, что в выборке из нормальной совокупности среднее и дисперсия независимы. Heyde & Seneta (1977, с. 67 прим.) указали на это, но только в связи со второй из указанных заметок; см. §§ 8.2-5 и 10Б-5 о предшествующих результатах Лапласа и Гельмерта.

Взятое в целом, сочинение Бертрана поражает своим часто необоснованным и неконструктивным критическим отношением к теории вероятностей и обработке наблюдений. Далее, он (с. 325 – 326) ошибочно заявил, что Курно предполагал, что судьи выносят приговоры независимо друг от друга, см. § 11.3-6. Надо, впрочем, добавить, что Бертран оказал сильное (мы бы сказали: слишком сильное) влияние на Пуанкаре и, быть может вопреки духу его книги, на возрождение интереса к теории вероятностей во Франции, см. Bru & Jongmans (2001).

## 12.2. Пуанкаре

В теории вероятностей Пуанкаре известен по своему руководству (1896); мы будем ссылаться на его расширенное издание 1912 г., а в Библиографии укажем и его малоизвестный русский перевод. Сразу заметим, что Пуанкаре не упоминал не только русских математиков, но даже Лапласа и Пуассона и что изложение материала в нем несовершенно. По этому поводу высказался Борткевич (Борткевич и Чупров 2005, Письмо 19 1897 г.):

*Поражает через меру почтительное отношение к Бертрану.*

*Следов специального знакомства с литературой теорий вероятности* (!) *незаметно. Курс написан так, как будто* [ни] *Лапласа и* [ни] *Пуассона, в особенности последнего не было на свете*.

Ожидание случайной величины Пуанкаре (§ 24, с. 62) по примеру Бертрана называл вероятным значением, меру точности нормального закона обозначал то через *h*, то через $\sqrt{h}$ и применял небрежные выражения типа *z заключено между z и z + dz* (§ 178, с. 252). Несколько раз Пуанкаре пользовался формулой

$$\lim \frac{\int \varphi(x)\, \Phi^n(x)\, dx}{\int \psi(x)\, \Phi^n(x)\, dx} = \frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)},\ n \to \infty, \qquad (12.2)$$

где $\Phi(x)$ было ограниченной положительной функцией, $x_o$ – точкой её единственного максимума и пределы интегрирования могли быть бесконечными (хотя только ввиду формального применения бейесовского подхода). Доказательство формулы (12.2) он (§ 115, с. 178) лишь наметил, и возможно, что некоторые ограничения должны быть добавлены. Надлежащий контекст для неё см. Erdélyi (1956, с. 56 – 57). Рассмотрим теперь отдельные темы, в основном из руководства Пуанкаре.

1) Теория вероятностей. Пуанкаре (1902/1923, с. 217) заявил, что *все науки* являются лишь *неосознанным приложением* исчисления вероятностей, что теория ошибок и кинетическая теория основаны на ЗБЧ и *исчисление вероятностей очевидно погубит их* (*les entrainerait évidemment dans sa ruine*). Поэтому, заключил он, теория вероятностей имеет лишь практическое значение[2]. Другое странное высказывание (1896, § 10, с. 34), видимо, означало, что математик не может понять, почему сбываются предсказания о цифрах смертности.

Пуанкаре кроме того безоговорочно осудил приложение теории вероятностей к судопроизводству и обобщил утверждение Милля, назвав позором её приложение к *моральным наукам* вообще, и объявив соответствующие результаты Кондорсе и Лапласа бессмысленными. См. по этому поводу наш § 9.9.1 и Шейнин (1991а, с. 167), где приведена выдержка из письма Пуанкаре (видимо, 1899 г.), написанного в связи с пресловутым делом Дрейфуса. В этом письме он возражал против стохастического исследования почерка.

Интерес к приложению теории вероятностей к судопроизводству возродился. Heyde & Seneta (1977, с. 34) указали несколько соответствующих источников, опубликованных до 1975 г., к которым мы добавим Zabell (1988a), Gastwirth (2000) и Dawid (2005). Последний подчеркнул особую важность истолкования косвенных сведений, носящих вероятностный характер, см. также § 4.1.2.

2) Пуанкаре (1892a) опубликовал трактат по термодинамике, который подвергся критике (Tait 1892) за отказ от упоминания о статистическом характере этой дисциплины. В последующей дискуссии Пуанкаре (1892b) заявил, что не удовлетворён статистическим обоснованием термодинамики, поскольку желает оставаться *полностью в стороне от всех молекулярных гипотез, какими бы изобретательными они ни были*; в частности, он поэтому умолчал о кинетической теории газов.

Вскоре Пуанкаре (1894/1954, с. 246) указал на свои сомнения: он не был уверен в том, что эта теория может объяснить все известные факты. В последующей популярной брошюре он (1905/1970, с. 210 и 251) смягчил свою точку зрения: физические законы приобретут *совершенно новую окраску* и дифференциальные уравнения окажутся статистическими законами; законы же, как будет доказано, несовершенны и временны.

3) Геометрическая вероятность. О предыдущей истории этого понятия см. § 7.1.6, а о его развитии см. гл. 13. Здесь мы только укажем, что Пуанкаре разъяснил парадоксальную задачу Бертрана (§ 12.1-1).

4) Биномиальное распределение (§§ 37 − 40, с. 79 – 84). Пусть количество появлений события в $m$ бернуллиевых испытаниях с вероятностью “успеха” $p$ равно α. Пуанкаре окольным и сложным путём вывел (в современных обозначениях) $E(\alpha - mp)^2$ и $E|\alpha - mp|$. В первом случае он, конечно же, мог вычислять $E\alpha^2$, во втором он получил

$$E|\alpha - mp| \approx 2mpq\, C_m^{mp}\, p^{mp} q^{mq},\ q = 1 - p.$$

5) Бейесовский подход: подсчёт полного числа астероидов. Пуанкаре (§§ 103 − 106, с. 163 – 168) предположил, что из общего числа астероидов $N$ известно только $M$ и что в течение года наблюдалось $n$ астероидов, из которых $m$ было известно ранее. Введя постоянную вероятность $p = n/N$ наблюдения малой планеты за год и пользуясь бейесовским подходом, он получил

$EN \approx n/p.$

Этот элементарный ответ не удовлетворил Пуанкаре, и он принял, что вероятность *p* неизвестна. Снова воспользовавшись бейесовским подходом и допустив, что *p* с равной вероятностью принимает все значения в интервале [0; 1], он вывел взамен

$EN \approx (M/m)n.$

Этот результат можно было выписать сразу; кроме того, можно было обратиться к задаче Лапласа о подсчёте населения Франции по выборочным данным (§ 8.1-5). Интересно, однако, что Пуанкаре полагал неизвестное количество астероидов случайной величиной.

6) Не упоминая Гаусса (1816, § 5), Пуанкаре (§§ 133 − 134, с. 192 – 194) вывел моменты нормального распределения

$$\varphi(y) = \sqrt{h/\pi}\,\exp(-hy^2), \qquad (12.3)$$

получив

$$Ey^{2p} = \frac{(2p)!}{h^p p!\, 2^{2p}} \qquad (12.4)$$

и доказал, исходя из формулы (12.2), что плотность, чьи моменты совпадают с соответствующими моментами нормального закона, нормальна. Ранее это предложение доказал Чебышев (1887a), см. также Бернштейн (1945/1964, с. 420). Марков (см. ниже) не стал комментировать вывод Пуанкаре.

Пуанкаре (§§ 135 − 140, с. 195 – 201) применил своё исследование к теории ошибок. Вначале он приближённо вычислил $E\bar{y}^{2p}$ для среднего $\bar{y}$ из большого числа наблюдений *n*, для которых $Ey_i = 0$ и $Ey_i^2$ = Const, приравнял эти моменты к моментам (12.4) и таким образом выразил *h* через $Ey_i^2$. Это было ошибкой: будучи средней, $\bar{y}$ обладала мерой точности *nh* а не *h.* Пуанкаре (§ 135, с. 195) также заметил, что Гаусс вычислил $Ey_i^2$; на самом деле, Гаусс (1823b, § 15) рассматривал среднее значение $\sum y_i^2/n$.

Основным здесь и на с. 201 – 206, §§ 140 − 143, где Пуанкаре рассматривал средние значения $(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)^{2p}$ с совпадающими и не совпадающими распределениями слагаемых при $Ey_i = 0$, было нестрогое доказательство ЦПТ: для ошибок *почти* одного и того же порядка, составляющих *ничтожную* часть полной ошибки, последняя *почти* следует закону Гаусса (§ 144, с. 206).

Для доказательства нормальности суммы ошибок Пуанкаре (§ 144, с. 206 – 208, только в издании 1912 г.) ввёл характеристические функции, не подпадающие под их современное определение. И все же он смог применить формулы Фурье для перехода от них к плотностям и обратно. Эти функции имели вид

$$f(\alpha) = \sum p_x e^{\tilde{}x},\ f(\alpha) = \int \varphi(x)e^{\alpha x}dx \qquad (12.5)$$

и Пуанкаре заметил, что

$$f(\alpha) = 1 + \alpha Ex/1! + \alpha^2 Ex^2/2! + \ldots \qquad (12.6)$$

Марков (1898/1951, с. 269) сослался на это исследование (Пуанкаре 1896, §§ 128 − 143, с. 169 – 186 = 1912, с. 189 – 206), но не комментировал его. Повторим, что там, на с. 173/194, Пуанкаре применил свою формулу (12.2).

7) Однородные [цепи Маркова]. Пуанкаре привёл интересные примеры, которые можно истолковать на языке этих цепей.

а) Он (§ 42, с. 150) предположил, что все астероиды вращаются по одной и той же круговой орбите, эклиптике, и объяснял, почему они равномерно распределены вдоль неё. Пусть долготы некоторой малой планеты $l = at + b$, где $a$ и $b$ случайны, а $t$ – время и $\varphi(a\,;b)$ – непрерывная двумерная плотность $a$ и $b$. Исходя из ожидания

$$Ee^{iml} = \iint\varphi(a;b)e^{im(at+b)}dadb$$

(которое является соответствующей характеристической функцией в современном смысле!), Пуанкаре не очень понятно доказывал своё утверждение, напоминающее знаменитую теорему Г. Вейля, см. начало § 11.8.4. Положение планеты в пространстве известно лишь с некоторой погрешностью и число всех возможных размещений астероидов на эклиптике можно считать поэтому конечным, а вероятности изменений этих размещений во временнóм интервале [$t$; $t$ + 1] не зависят от $t$. Равномерное размещение астероидов поэтому допустимо обосновать эргодическим свойством однородных цепей Маркова с конечным числом возможных состояний.

b) Рулетка. Круг разбит на большое число конгруэнтных секторов, попеременно красных и черных. Шарик вращается по окружности круга и после большого числа оборотов останавливается в одном из секторов. Опыт показывает, что вероятности “красного” и “чёрного” совпадают, и Пуанкаре (§ 92, с. 148) попытался обосновать этот факт. Пусть шарик проходит до остановки расстояние $s$ ($2\pi < s < A$), обладающее плотностью $\varphi(x)$, непрерывной на интервале [$2\pi$; $A$] и имеющей на нем ограниченную производную. Тогда, как доказывал Пуанкаре, разность между указанными вероятностями стремится к нулю с длиной дуги сектора (или, что то же, – с безграничным возрастанием $s$). Он основывался на методе произвольных функций (Хинчин 1961, с. 88 – 89; von Plato 1983), сущность которого сам и наметил. Пуанкаре также указал, что вращение шарика неустойчиво: небольшое изменение начальных условий приводит к существенному изменению пройдённого им пути (и, возможно, к изменению “красного” на “чёрное” или обратно).

c) Тасование колоды карт (§ 225, с. 301). Весьма сложным путём, применяя гиперкомплексные числа, Пуанкаре доказал, что в пределе, после долгих тасовок, все возможные расположения карт в колоде равновероятны. См. конец § 8.1-6.

8) Математическая обработка наблюдений. В посмертно опубликованной сводке своего творчества Пуанкаре (1921/1983, с. 343) указал, что теория ошибок *естественно являлась моей* [его] *основной целью* в теории вероятностей, и это утверждение отражало тогдашнее положение последней. В своём руководстве он (с. 169 – 173) вывел нормальное распределение ошибок наблюдений в основном по Гауссу, затем повторил вывод, предположив вслед за Бертраном, что со средним арифметическим совпадает не вероятнейшее, а среднее значение искомой оценки [параметра сдвига]. Далее, он (§ 125, с. 186 – 187) заметил, что при малых по абсолютной величине погрешностях $x_1, x_2, ..., x_n$ равенство значения некоторой функции $f(z)$ среднему из $f(x_i)$ приводит оценку $z$ истинного значения измеряемой константы к среднему арифметическому. Тем самым, как ему казалось, он подкрепил постулат Гаусса[3]. Наконец, Пуанкаре (§ 126, с. 188) указал, что [дисперсия] среднего

арифметического стремится к нулю с ростом числа наблюдений и сослался на Гаусса, который, однако, не рассматривал подобный случай. *Отсюда, однако, ничего не следует*, так как и другие линейные средние обладают тем же свойством (Марков 1899а/1951, с. 250, со ссылкой на ошибку Маиевского). Пуанкаре сам дважды доказывал [состоятельность] среднего арифметического (§§ 136 − 140, 150, с. 196 – 201 и 217). Во втором случае он исходил из характеристической функции вида (12.5) и (12.6), перейдя от неё к характеристической функции среднего арифметического и заметив, что при невозможности представления этой функции в виде (12.6) состоятельность может не иметь места (он рассмотрел в качестве примера распределение Коши). Видимо на основе всех указанных соображений о среднем арифметическом Пуанкаре (§ 127, с. 188) назвал отказ Гаусса от своего первого обоснования МНКв *довольно странным*, подкрепив это высказывание тем, что [параметр сдвига] не должен выбираться вне зависимости от соответствующего распределения. Это соображение противоречило зрелым мыслям Гаусса, который разумно не считал распределения известными.

Пуанкаре (§ 150, с. 217 – 218) также утверждал, что при $n \to \infty$ достичь абсолютной точности нельзя из-за весьма малых ошибок. Малые ошибки существуют и возникают они от нарушения чётности закона распределения (Бейес, см. Stigler 1986, с. 94 – 95 и Курно 1843, § 137), вариаций этого закона (снова Курно) и, добавим мы, некоторой взаимозависимости наблюдений.

9) Случайность. Пуанкаре обращался к этому понятию и в своём руководстве, и в научно-популярных брошюрах, однако так и не привёл свои соображения в единую систему и нам придётся описывать его различные истолкования случайности.

а) Неустойчивость равновесия или движения. Некоторые утверждения Аристотеля (§ 2.1.1), Галена (§ 2.1.3) и Максвелла (§ 11.8.5) означали, что малые причины могли приводить к существенным последствиям, Пуанкаре (с. 4) первым прямо заявил, что случайность − это неустойчивое равновесие или движение и привёл несколько примеров (с. 4 – 5): неустойчивость конуса, поставленного на вершину, – было замечено Курно, см. § 11.3-4; рулетка; неустойчивые состояния атмосферы; распределение астероидов, – как и у Ньютона о *неправильностях* в Солнечной системе (§ 3.2.3); этот последний пример был всё-таки связан с большим промежутком времени. Пуанкаре также заметил, что утверждение Лапласа (§ 8.3), которого он не назвал, о предсказании будущего неверно именно ввиду неустойчивости движения. Мы не нашли связи между рассмотренным объяснением случайности и исследованиями Пуанкаре проблемы устойчивости в математике и астрономии.

b) Сложность причин. Уже Лейбниц (§ 4.1.2) эвристически объяснял случайность сложностью соответствующих причин. Лаплас совершенно неверно (конец § 8.4) качественно объяснил существование малых неправильностей в системе мира действием бесчисленных разностей температур и давлений в различных частях планет. Максвелл (§ 11.8.5) фактически обосновал свой вывод нормального распределения случайностью. И снова Пуанкаре оказался первым, кто прямо указал на эту связь. Вначале он (с. 7 – 8) заявил, что молекулярное движение случайно ввиду совместного действия неустойчивости и сложности причин, но затем он назвал тасовку карт, смешивание жидкостей и порошков и (с. 15) *даже молекул газа в кинетической теории газов*.

c) Малые причины, приводящие к малым последствиям. Пуанкаре (с. 10) привёл лишь один пример, притом не относящийся к естествознанию: малые причины приводят к малым погрешностям измерения; он, однако, указал, что эти погрешности мы полагаем случайными, потому что их причины слишком сложны.

d) Пересечение цепей детерминированных событий. Это истолкование мы упоминали в §§ 2.1.1 и 11.3-4. Пуанкаре (с. 10) допускает его, но основными считает первые два истолкования; объяснение с) он при этом явно упустил.

e) Случайность и необходимость. Напомним (§ 2.2.4), что Пуанкаре сформулировал весьма удачную мысль о совместном действии случайности и необходимости. Он, к сожалению, не упомянул о проявлении необходимости в массовых случайных явлениях.

В творчестве Пуанкаре теория вероятностей оставалась второстепенным объектом, и почти полное отсутствие у него ссылок на своих предшественников кроме Бертрана указывает, что он, как и указал Борткевич, не был должным образом знаком с их работами. Мало того: в 1912 г. Пуанкаре мог бы уже воспользоваться аппаратом цепей Маркова. Но вместе с тем он оказался автором руководства, которое примерно 20 лет оставалось основным сочинением по теории вероятностей в Европе. Заявление Ле Кама (Le Cam 1986, с. 81) о том, что ни

Бертран, ни Пуанкаре *видимо, не владели исчислением вероятностей*, некорректно: ему следовало тогда добавить, что в то время вообще никто, кроме, пожалуй, Маркова, не владел теорией вероятностей. О Бертране см. конец § 12.1.

## Примечания

**1**. На титульном листе перевод назван авторизованным, однако сам Бертран (*C. r. Acad. Sci.* Paris, т. 40, 1855, с. 1190) указал, что Гаусс успел лишь прислать *некоторые частные соображения*. Известно, что Гаусс отказывался публиковать свои сочинения на французском языке, но таким образом согласился на перевод некоторых из них.

**2**. Пуанкаре неизменно пользовался термином *исчисление* (а не теория) *вероятностей* и сто́ит заметить, что в 1882 – 1891 гг. Марков опубликовал пять литографированных курсов своих лекций, названных *Теория вероятностей*, а вот своё руководство (1900а и последующие издания) он назвал *Исчислением вероятностей*. По крайней мере в 1892 г. Пуанкаре не был готов поверить в статистический характер второго закона термодинамики; в дополнение к сказанному в пункте 2 см. Шейнин (1991а, с. 141).

**3**. В этом же контексте Пуанкаре (§ 108, с. 171) заявил, со слов Липпмана (Lippmann, автор руководства по термодинамике), что все верят в универсальность нормального закона; экспериментаторы полагают, что это математический факт, а математики считают его экспериментальным.

# 13. Геометрическая вероятность

О развитии понятия геометрической вероятности в XVIII в. и раньше см. § 7.1.6, о его определении, которое предложил Курно, см. § 11.3-2, а задачу Бертрана о длине случайной хорды мы описали в § 12.1-1. Здесь мы рассмотрим дальнейшую историю указанного понятия.

1) Курно (1843, § 74) применил геометрическую вероятность для вывода распределения функции нескольких случайных переменных. Вот один из его примеров. Дана функция $u = |x - y|$, аргументы которой равномерно распределены на отрезке [0; 1]. Подсчитав площади соответствующих фигур, он заключил, что

$$P(u \geq a) = (1 - a^2),\ 0 \leq a \leq 1.$$

Вероятность противоположного события привела бы Курно к некогда популярной задаче о встрече (Laurent 1873, с. 67 – 69): двое договорились встретиться в определённом месте в течение некоторого промежутка времени, но приходят они независимо друг от друга в “случайные” моменты времени, притом первый пришедший какое-то время ожидает второго, затем уходит. Какова вероятность встречи?

2) Геометрическую вероятность фактически применили величайшие естествоиспытателя XIX в. Больцман (Boltzmann 1868/1909, с. 50) определил вероятность скорости молекулы находиться в интервале [$c$; $c + dc$] как отношение времени, в течение которого это имело место, ко всему периоду наблюдения (§ 11.8.5). Максвелл (1860) применил геометрические вероятности при выводе своего распределения.

Изучая дождевых червей, Дарвин (1881/1945, с. 52 – 55) исследовал, как они затаскивают бумажные треугольнички в свои норки. Он исходил из того, что число “случайных” захватов какой-либо стороны треугольничка червём пропорционально её длине[1].

3) Seneta и др. (2001) описали исследования Сильвестра, Крофтона и Барбье по геометрической вероятности, которые привели к появлению интегральной геометрии. Мы упомянем лишь замечательную задачу Сильвестра: определить вероятность того, что четыре точки, случайно выбранные внутри выпуклой области, образуют выпуклый четырёхугольник. Чубер (Czuber 1903/1968, с. 99 – 102) решил эту задачу в нескольких частных

случаях.
4) Опишем задачу из книги Czuber (1884, с. 11), интересную в отрицательном смысле. Две точки, *M* и *N*, случайно расположены на отрезке $AB = a$. Требуется определить вероятность *P* того, что $MN > NA$. Здесь

$$P(x \le MA \le x + dx) = dx/a,\ P(MA > NA|x \le MA \le x + dx) = x/a,$$

$$P(MA > NA) = \int_0^a x dx/a^2 = 1/2.$$

Ответ был ясен (и равносилен полному незнанию).

5) Пуанкаре (1896, с. 97; 1912, § 68, с. 122) заметил, что вероятность точке $(x; y)$ находиться внутри некоторой фигуры равна интегралу по соответствующей области

$$\iint \varphi(x; y)dxdy,$$

в котором подынтегральная функция должна ещё быть выбрана для данной задачи. Он далее перешёл к задаче Бертрана, упомянув, правда, лишь её первые два решения, а затем привёл и свои собственные рассуждения, молчаливо допустив, что $\varphi \equiv 1$.

Проведём полярную ось через центр круга, обозначим один из концов хорды *A*, а её центр *P*. Хорда теперь может быть зафиксирована либо полярными углами точек *A* и *P*, ω и α, либо полярными координатами точки *P*, θ и ρ, и двойные интегралы по кругу

$$\iint d\omega d\alpha \text{ и } \iint d\rho d\theta$$

не равны друг другу, что и объясняет, как указал Пуанкаре, парадоксальный характер задачи. Он также изучал вероятность вращающимся фигурам удовлетворять некоторым условиям, но не связал этого исследования с задачей Бертрана, ср. пункт 7 ниже.

6) Чубер (1903/1968, с. 107 – 108) нашёл три новых естественных решений задачи Бертрана:

a) Один конец хорды зафиксирован, и она проходит через случайную точку круга; $p = 1/3 + \sqrt{3}/2\pi \approx 0{,}609$.

b) Оба конца хорды случайны; этот случай совпадает с первым решением Бертрана.

c) Случайно выбраны две произвольные точки хорды;

$p = 1/3 + 3\sqrt{3}/2\pi \approx 0{,}746$.

7) Оказалось (De Montessus 1903), что задача Бертрана имеет несчётное количество естественных ответов. Проведём ось абсцисс $0x$, наметим на ней, на её положительном направлении, точки $D$ и $C$, – пересечения концентрических окружностей с центром в $O$ и радиусами $OC = 1$ и $OD = 1/2$ с осью. Произвольные точки $M_2(x)$ и $M_3(x)$ расположены на этой же оси, соответственно между двумя кругами и вне бóльшего из них; через них проведены касательные $A_2B_2$ и $A_3B_3$ к меньшей окружности и касательная $M_3T$ к бóльшей окружности с точкой касания $T$. Наконец, произвольная точка $M_1(x)$ расположена внутри меньшего круга, также на оси абсцисс.

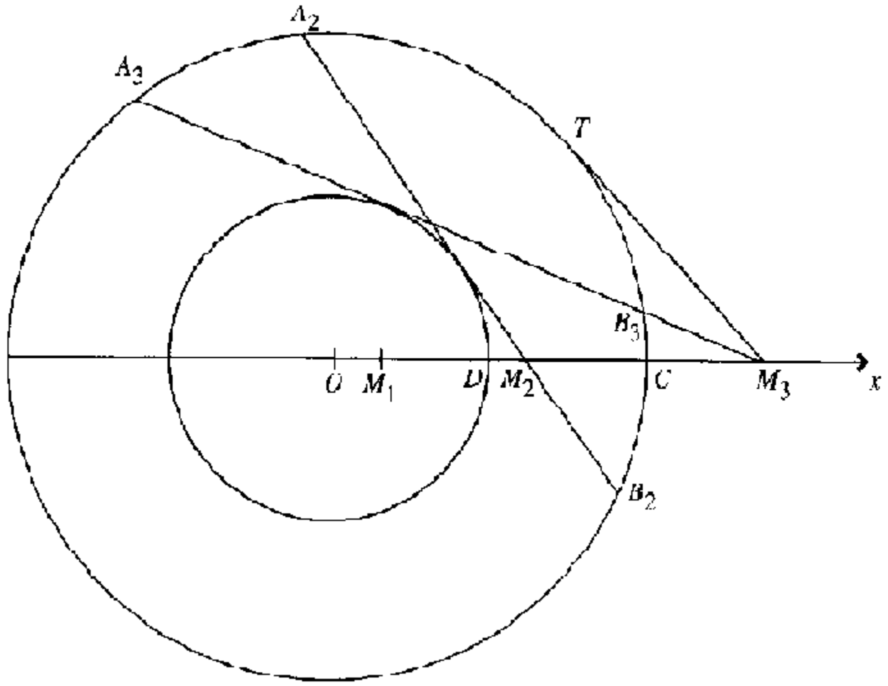


Рис. 1. De Montessus (1903). Точка движется вдоль оси от $D$ к бесконечности и, соответственно, искомая вероятность в задаче Бертрана принимает бесконечное число значений. $OD = 1/2$, $OC = 1$.

Для точек $M_2$ и $M_3$ искомая вероятность равна, при $1/2 \le x \le 1$ и $x \ge 1$, соответственно

$P_2$ = [угол $A_2M_2O/\pi$] = [2arcsin(1/2$x$)]/π,

$P_3$ = [угол $A_3M_3O$ ÷ угол $TM_3O$] = [arcsin(1/2$x$) ÷ arc sin(1/$x$)].

При движении от точки $O$, например, в положительном направлении вероятность $P_2$ убывает от 1 в точке $D$ до 1/3, а от точки $C$ до бесконечности вероятность $P_3$ возрастает от 1/3 до 1/2. Трудно доказать (и Де Монтессу этого не сделал), что $P_3$ возрастает монотонно, но уже для $x$ = 1,01 и 1,1 она равна соответственно 0,36 и 0,41 и достигает значения (1/2 – 1/1600) при $x$ = 10.

Заметим, что при совпадении точки $M_2$ или $M_3$ с $D$ мы имеем первое решение Бертрана, а случай $M_3 \to \infty$ приводит к его второму решению. Третий случай Бертрана отличен, поскольку рассматривается не прямая, а точка. Де Монтессу далее вычислил общую среднюю вероятность исследуемого события, однако, во-первых, напрасно включил в это среднее точки $M_1$, для которых условие Бертрана выполнялось детерминированно; во-вторых, он допустил при этом грубейшую арифметическую ошибку (при сложении дробей сложил их числители и разделил сумму на сумму знаменателей). Средняя вероятность оказалась равной 1/2, что можно было предвидеть, поскольку интервал вне окружности бесконечен.

8) Borel (1909/1950) включил в свою книгу две малоинтересные главы о геометрической вероятности. На с. 132 он решил задачу о встрече (§ 13.1), а на с. 148 – 149 указал, хоть и не ссылаясь ни на кого, что большинство естественных методов решения задачи Бертрана приводит к вероятности, равной 1/2.

9) Шмидт (1926) исходил из соображений Пуанкаре и дополнительно указал, что искомая вероятность должна быть инвариантна относительно параллельного переноса и вращения системы координат (в настоящее время добавляется инвариантность относительно отражения). Соответственно, он доказал, что это условие соблюдается только для системы координат ($\rho$; $\theta$), см. пункт 4, и при переходе от этой системы к другой, но, конечно же, с учётом соответствующего якобиана[2].

По мнению Прохорова (1999а) с геометрической точки зрения полярная система координат при независимых и равномерно распределённых $\theta$ и $\rho$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \rho \le 1$, является самой естественной. Как и у Пуанкаре, это приводило к вероятности, равной 1/2.

С современной точки зрения о геометрической вероятности см. M. G. Kendall & Moran (1963), которые, в частности, замечают, – впрочем, вслед за авторами XIX в., см., например, Crofton (1869, с. 188), – что она может значительно упростить вычисление

интегралов, а также Амбарцумян (1999). Последний автор указывает на связь задач на геометрические вероятности и интегральной геометрии со стохастической геометрией.
Итак, в конце концов комментаторы решили, что искомая вероятность равна 1/2, что равносильно незнанию. Всё столь длительное обсуждение было напрасным.

## Примечания

**1.** Поскольку Дарвин рассматривал несколько возможных вариантов “случайного”, то в этом смысле его исследование опередило задачу Бертрана о длине случайной хорды. Дарвин хотел выяснить, осмысленны ли действия червей и заключил, что они захватывали треугольнички не как попало.

# 14. Чебышев

## 14.1. Отдельные сочинения

1) Магистерская диссертация (1845). Она послужила пособием для студентов Демидовского лицея в Ярославле и в ней Чебышев излагал теорию вероятностей почти без привлечения математического анализа, заменяя, например, интегрирование суммированием и уже (как и в своих дальнейших работах) оценивая погрешности допредельных соотношений. Диссертация, видимо, содержала добавление, опубликованное лишь через год, см. пункт 2.

Мы полагаем, что правильнее было бы изложить основные идеи теории вероятностей, но тема пособия была задана попечителем соответствующего учебного округа.

2) ЗБЧ Пуассона (1846). Подробное изложение этой работы см. Прохоров (1986), который, в частности, уточнил оценку одной из формул Чебышева. Вот одна из задач, решённых последним. Проведено $n$ [независимых] испытаний, вероятности “удач” в которых равны $p_1, p_2, ..., p_n$ и требуется оценить вероятность общего числа удач μ в них. Остроумные рассуждения Чебышева привели его к формуле

$$P(\mu \geq m) \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \frac{\sqrt{m(n-m)}}{m-ns} \left(\frac{ns}{m}\right)^m \left(\frac{n(1-s)}{n-m}\right)^{n-m+1},$$

где $m > ns + 1$ и $s$ – средняя вероятность успеха.

Этот результат был интересен и сам по себе и, кроме того, позволил Чебышеву перейти к доказательству теоремы Пуассона, ср. § 9.7. Он не преминул указать необходимое количество испытаний для достижения желательной вероятности сближения частости удачи $\mu/n$ и средней вероятности $s$. Чебышев действительно не пользовался сложным математическим аппаратом (что и указал в названии своего мемуара), но проделанные им преобразования тягостны. Верно, однако, и то, что его доказательство было строгим (он лишь не оговорил независимости испытаний) и полным и он (1846/1947, с. 14) был вправе упрекнуть Пуассона за то, что тот применил способ вывода, не доставлявший предела погрешностей, вызванных применением приближенного анализа.

Позднее Чебышев более понятно изложил один из своих промежуточных выводов в *Лекциях* (1879 – 1880/1936, с. 162 – 163), см. также Бернштейн (1945/1964, с. 412).

3) Неравенство Бьенеме – Чебышева (ср. § 11.2-4). Чебышев (1867) рассматривал дискретные [случайные величины] с конечным числом возможных значений; без потери общности мы упростим вывод, полагая, что они обладают одним и тем же числом значений. Кроме того, мы воспользуемся ныне стандартными обозначениями ожидания. Чебышев показывает, что

$$P\{|\Sigma(\xi_i - \mathrm{E}\xi_i)| < \alpha[\mathrm{E}\xi_i^2 - (E\xi_i)^2]^{1/2}\} > 1 - 1/\alpha^2,\ \alpha > 0. \quad (14.1)$$

В отличие от Хейде и Сенеты (§ 11.2-4) мы полагаем, что Чебышев вывел это неравенство примерно так же, как Бьенеме, но только гораздо подробнее. Он, правда, ограничился дискретными переменными, тогда как Бьенеме, упуская все детали, видимо, имел в виду непрерывный случай: в целом его мемуар был посвящён математической обработке наблюдений. Современные авторы, названные нами в § 11.2-4, повторяют доказательство именно для второго случая; это, собственно, сделал уже Слешинский (1893).

Из формулы (14.1) Чебышев немедленно вывел следствие, которое в несколько иных обозначениях имеет вид

$$\lim P(\Sigma[|\xi_i - \mathrm{E}\xi_i|/n] < \varepsilon) = 1,\ n \to \infty,$$

а в своих *Лекциях* (с. 166 – 167) он дополнительно специализировал эту формулу на случай совпадения случайных величин друг с другом, получив таким образом важнейшее и весьма простое следствие: среднее арифметическое является [состоятельной] оценкой ожидания случайной величины. Оговоримся: указанные следствия предполагают, что ожидания и дисперсии соответствующих случайных величин равномерно ограничены, и Чебышев действительно отметил это (в другой терминологии). В указанном месте, а ещё раньше, по другому поводу, Чебышев (1867/1947, с. 436) ввёл индикаторные случайные величины (принимающие лишь два значения, 0 и 1, с соответствующими вероятностями), но не сам термин.

4) [ЦПТ]. В заглавии соответствующего мемуара (1887b) упоминаются две теоремы, первая из которых была следствием о среднем арифметическом (см. выше пункт 3) и Чебышев лишь

повторил её формулировку. Он, далее, перешёл к ЦПТ, предварив её доказательство указанием на то, что она *приводит* к МНКв, – в соответствии, добавим мы, с подходом Лапласа.

Чебышев прежде всего сослался на установленные им неравенства для интеграла от неотрицательной функции, моменты которой вплоть до некоторого порядка совпадают с одноименными моментами соответствующего, в определённом смысле, нормального распределения. Эти неравенства Чебышев (1874) опубликовал без доказательства, обосновал же их Марков (1884), затем Стилтьес, и только впоследствии, притом без ссылки на своих предшественников, сам Чебышев. Об их истории см. Крейн (1951). Позднее Стилтьес (Stiltjes 1885) выразил сожаление, что упустил исследование Маркова.

Чебышев рассматривал случайные величины $u_1, u_2, ..., u_n$ с плотностями $\varphi_i(x)$ и моментами

$$\mathrm{E}u_i = 0,\ |\mathrm{E}u_i^2| < C,\ |\mathrm{E}u_i^3| < C,\ ...$$

Эти условия недостаточны. Случайные величины должны быть независимы (и Чебышев, конечно же, так и полагал), но он не отметил ограничения

$$\lim[(1/n)\Sigma\mathrm{E}u_i^2] \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ n \to \infty. \qquad (14.2)$$

С другой стороны, требование единой грани *C* излишне. Уместно, однако, заметить, что Чебышев, видимо, и не выставлял его. Вот свидетельство Ляпунова (1901b, с. 57), который, однако, этого прямо не утверждал: Чебышев, оказывается, иногда употреблял единственное число вместо множественного. Ляпунов привёл несколько примеров и в том числе процитировал выражение Чебышева *числовая величина математических ожиданий* из его формулировки ЦПТ.

Чебышев замечает, что плотность $f(x)$ дроби

$$x = \Sigma u_i/\sqrt{n} \qquad (14.3)$$

может быть определена по кратному интегралу

$$f(x) = \int \ldots \int \int \varphi_1(u_1)\varphi_2(u_2) \ldots \varphi_n(u_n)du_1du_2 \ldots du_n, \qquad (14.4)$$

распространённому на значения переменных, при которых указанная дробь находится в интервале $[x; x + dx]$. Обе части (14.4) умножаются на $e^{sx}$, где $s$ – некоторая постоянная, и интегрируются в бесконечных пределах, причём правая часть разбивается в произведение $n$ интегралов в тех же пределах. Обе части далее разлагаются по степеням $s$ (правая часть – после предварительного логарифмирования) и коэффициенты при одинаковых степенях этой величины приравниваются друг другу. Таким образом определяются интегралы от функций

$$f(x),\ xf(x),\ x^2f(x),\ \ldots,$$

т. е. моменты величины (14.3) вплоть до некоторого порядка $(2m - 1)$. При $n \to \infty$ оказывается, что интеграл в бесконечных пределах

$$\int e^{sx}f(x)dx = \exp(s^2/2q^2), \qquad (14.5)$$

где $1/q^2$ – среднее арифметическое вторых моментов величин $u_i$ и где видна необходимость условия (14.2).

Используя свои прежние упомянутые выше оценки интеграла от неотрицательной функции, Чебышев теперь завершает своё доказательство:

$$\lim P\left(\alpha \le \frac{\sum u_i}{\sqrt{2\sum \mathrm{E}u_i^2}} \le \beta\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\alpha^\beta \exp(-x^2)dx,\ n \to \infty. \qquad (14.6)$$

При конечном $n$ та же вероятность, как он замечает без строгого доказательства, определяется разложением по полиномам, которые теперь называются полиномами Чебышева – Эрмита.

Бернштейн (1945/1964, с. 423 – 425) указал, что упомянутое выше разложение по степеням $s$ расходится при $|s| \ne 0$ и что Марков (который не разъяснил этого обстоятельства) ввёл по этой причине дополнительное ограничение, а именно (1898/1951, с. 268)

$$\lim \mathrm{E}u_n^2 \ne 0,\ n \to \infty.$$

Марков кроме того выписал равенства, которые Чебышев фактически использовал в своём исследовании:

$$\lim\left(\frac{\sum u_i}{\sqrt{2\sum \mathrm{E}u_i^2}}\right)^m = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} t^m \exp(-t^2)dt,\ n \to \infty. \quad (14.7)$$

Исходя из неравенств Чебышева, Марков также доказал, что соответствующая плотность стремится к нормальному закону, тогда как Чебышев, видимо, считал это очевидным. Подробное описание см. в комментарии Колмогорова (Чебышев 1944 – 1951, т. 3, 1948, с. 404 – 409).

Ещё до Маркова к чебышевскому доказательству [ЦПТ] обратился Слешинский (1892). Он исходил из результатов Коши (§ 11.1) и (с. 204) имел целью упростить (а не уточнить) Чебышева. Вопреки мнению Фрейденталя и в согласии с Heyde & Seneta (1977, с. 95 – 96) мы полагаем, что исследование Коши всё же имело изъяны. И, снова повторяя этих двух авторов, мы скажем, что Слешинский, видимо, строго доказал указанную теорему, правда лишь для линейной функции погрешностей с чётной функцией плотности. Пожалуй, по этой причине Ляпунов (1900/1954, с. 126) заметил, что тот *делал слишком ограничительные предположения*. Как и Чебышев (гл. 1, Прим. 2), Слешинский считал, что его результаты обосновывают МНКв [опять-таки только в смысле Лапласа].

## 14.2. *Лекции*

С 1860 по 1882 гг. Чебышев читал лекции по теории вероятностей в Петербургском университете, и в 1936 г. А. Н. Крылов опубликовал курс 1879/1880 гг. по записи Ляпунова; ниже мы ссылаемся на него, указывая лишь номера страниц. В своём предисловии Крылов указал, что запись Ляпунова *воспроизводит лекции* [...] *именно в том виде, как они прочитаны со всеми тонкостями попутных замечаний* ... Прудников (1964, с. 183), однако, полагал иное:

*Записать подробно лекции* [...] *было почти невозможно, и понятно, что сохранившиеся записи их, сделанные А. М. Ляпуновым, носят фрагментарный характер*.

Его мнение представляется гораздо правдоподобнее. Крылов также сообщил, что переписал рукопись Ляпунова *по новой орфографии* [...] *попутно проверив все выкладки*. Мы перевели этот курс на английский язык (**S, G,** 3) и при этом исправили быть может сотню (повторяем: сотню) математических опечаток, не претендуя, однако, на полное их выявление. Ермолаева (1987) кратко описала найденную ей более подробную запись лекций Чебышева с сентября 1876 по март 1878 гг., которая, однако, так и осталась неопубликованной, и неизвестно насколько она по существу отлична от ляпуновской.

Лекции были посвящены определённым интегралам, теории конечных разностей и собственно теории вероятностей, и ниже мы опишем лишь их последний раздел, но начнём с нескольких общих замечаний. Чебышев стремился применять простейшие методы; он, например, пользовался суммированием и, при необходимости, переходил к интегрированию лишь в последний момент, а характеристические функции применял лишь к дискретным величинам; далее, независимости событий или случайных величин он не оговаривал, о чем мы уже упоминали выше; и, наконец, он не интересовался философскими проблемами теории вероятностей[1], а из её приложений обсуждал почти исключительно математическую обработку наблюдений.

1) Основные понятия. Целью теории вероятностей Чебышев (с. 148) назвал определение шансов *для совершения известного* [некоторого] *события*, событием же является *все то, чего вероятность определяется*, а вероятностью – величина, подлежащая измерению. Появление слов *шанс* и *вероятность* в одной фразе было, возможно, чисто литературным приёмом, по существу же Чебышев сделал небольшой шаг в направлении аксиоматизации теории вероятностей[2] Сто́ит привести современное высказывание (Прохоров и Севастьянов 1999, с. 77): теория вероятностей изучает математические модели случайных событий и

*позволяет по вероятностям одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом с первыми*.

Чебышев (с. 160) предложил необычное и вряд ли полезное определение ожидания – не случайной величины, а появления одного из нескольких несовместимых событий. Сумма произведений вида $p_i a_i$ описывала эти события их вероятностями и величинами, *измеряющими* их. Заметим, что он в основном описывал дискретные случайные величины.

Фактически вслед за Лапласом (§ 8.4) Чебышев (с. 165) указал, что понятие предела в теории вероятностей отличается от того же понятия в математическом анализе. И все-таки мы не можем согласиться с равенствами (или опечатками?) типа (с. 167, 171, 183, 190, 204)

$$\lim m/n = p. \qquad (14.8)$$

2) Предельная теорема для схемы Пуассона (с. 167 и 201 – 204). Пусть в $n$ испытаниях с вероятностями успеха $p_i$, $i = 1, 2, ..., n$ соответственно изучаемое событие произошло $m$ раз; искомую вероятность этого результата обозначим $P_{n,m}$. Применив малоизвестную формулу из первого раздела *Лекций* (с. 59)

$$A_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f[e^{\varphi i}]e^{-m\varphi i}d\varphi, \qquad (14.9)$$

которая относилась к коэффициентам ряда

$$f(x) = A_o + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_m x^m + \ldots,$$

Чебышев получил, полагая, что $q_i = 1 - p_i$,

$$P_{n,m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[p_1e^{\varphi i} + q_1][p_2e^{\varphi i} + q_2] \ldots [p_ne^{\varphi i} + q_n]e^{-m\varphi i}d\varphi.$$

После некоторых преобразований и учёта лишь малых значений φ оказалось, что

$$P_{n,m} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp(-nQ\varphi^2/2)\cos[(np - m)\varphi]d\varphi,$$

где $p$ – средняя вероятность успеха и $Q = \Sigma p_iq_i/n$. Принимая для больших $n$ бесконечный верхний предел в полученном интеграле, Чебышев окончательно получил

$$P\,[|(m/n) - p| < t\sqrt{2Q/n}] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp(-z^2)dz$$

(обозначение lim здесь отсутствовало) и заметил, что отсюда следовала формула (14.8), в которой, заключил он, и состоял ЗБЧ

Пуассона. Своего предшественника он здесь уже, естественно, не упрекал.

3) Схема Бернулли (с. 168 – 175). Чебышев выписывает производящую функцию биномиального распределения (обозначения обычны)

$$\Sigma P_{n,m}t^m = (pt + q)^n,\ m = 0, 1, 2, ..., n \qquad (14.10)$$

и вычисляет соответствующие ожидание и дисперсию при помощи современного метода (дифференцирования этой функции один и два раза и т. д.), но не отмечает его общности. Он далее повторяет эти вычисления другим способом. Полагая в уравнении (14.10) $t = e^{\alpha}$, он умножает обе его части на $e^{-\alpha pn}$, раскладывает экспоненциальные функции в степенные ряды по α и приравнивает коэффициенты при α и при $\alpha^2$. В заключение Чебышев (с. 179 – 183) выводит локальную и интегральную теоремы Муавра – Лапласа и далее (с. 183 – 186) уделяет внимание вычислению интеграла от экспоненциальной функции отрицательного квадрата.

Отметим его необычную манеру, которая в данном случае видна по выражению для указанного интеграла в пределах $[u; +\infty)$: Чебышев приравнял его значению подынтегральной функции при нижнем пределе, умноженному на некоторую правильную дробь, – а не на действительное число в интервале (0; 1).

4) Предельная теорема для полиномиального распределения (с. 205 – 207 и 214 – 218). Чебышев рассматривает $n$ испытаний, в каждом из которых происходит одно и только одно из событий $A_1, A_2, ..., A_k$, причём событие $A_i$ означает, что некоторая функция приняла значение $i$. Все события равновероятны и вероятность каждого поэтому равна $1/k$. Пусть теперь событие $A_i$ произошло $m_i$ раз, тогда

$$m_1 + m_2 + ... + m_k = n,\ P(m_1 + 2m_2 + ... + km_k = s) = P_s,$$

$$\Sigma P_s t^s = t^n(t^k - 1)^n/k^n(t - 1)^n, \qquad (14.11)$$

после чего Чебышев определяет $P_s$. Для рассмотрения предельного случая он представляет правую часть (14.11) в виде

$$f(t) = A_o + A_1t + A_2t^2 + \ldots + A_s t^s + \ldots$$

и применяет выражение (14.9), чтобы получить

$$k^n P_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\varphi i(n-s)}\{[e^{k\varphi i} - 1] \div [e^{\varphi i} - 1]\}^n d\varphi,$$

где $n$-я степень дроби равна

$$e^{n(k-1)\varphi i/2}[\sin(k\varphi/2) \div \sin(\varphi/2)]^n,$$

так что

$$P_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\{[n(k-1) - 2s](\varphi/2)\}[\sin(k\varphi/2) \div k\sin(\varphi/2)]^n d\varphi,$$

и при большом $k$, снова не вводя символа lim,

$$P(|s - kn/2| < ku\sqrt{n/6}\ ) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \exp(-t^2)dt.$$

5) [ЦПТ] (с. 219 – 223). В то время Чебышев еще не владел её строгим доказательством. Мы лишь заметим его высказывание (с. 224): полученная им формула

*выведена не строгим путём.* [...] *Мы делали различные предположения, не показав предела происходящих от этих* [от этого] *погрешностей. Этого же предела не может дать сколько-нибудь удовлетворительным образом математический анализ в настоящем своём состоянии*.

6) Статистические заключения. Чебышев решил две задачи, которые, впрочем, уже рассматривались раньше. В первой из них он (с. 187 – 192) вывел предельную теорему Бейеса (§ 6.2). Бейеса он, однако, в своих *Лекциях* вообще не упоминал.

Во второй задаче Чебышев (с. 193 – 201) исследовал вероятность последующего результата бернуллиевых испытаний по известным предыдущим данным. Событие произошло $m$ раз в $n$ испытаниях, какова вероятность, что оно появится $r$ раз в $k$ новых испытаниях? Пользуясь в основном лишь формулой Стирлинга, Чебышев приближённо вывел интегральную предельную теорему; аналогичную теорему вывел Лаплас

(§ 8.1-5). Формула Чебышева (опять без упоминания предела!) имела вид

$$P\left(\left|\frac{r}{k}-\frac{m}{n}\right| < t\sqrt{2\frac{m}{n}\left(1-\frac{m}{n}\right)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{k}\right)}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp(-z^2)dz. \quad (14.12)$$

Эту же формулу, но уже в качестве предельной, впоследствии указал Марков (1914a), который вряд ли помнил о её появлении у своего учителя.

7) Математическая обработка наблюдений (с. 224 – 252). Чебышев (с. 227) доказывает, что среднее арифметическое является [состоятельной] оценкой неизвестной константы. В отличие от Пуанкаре (§ 12.2-7) оптимальность он (с. 228 – 231), однако, обосновывает тем, что в классе линейных оценок среднее обеспечивает наиболее тесные вероятные пределы допускаемой ошибки. Дисперсия среднего арифметического также минимальна (там же); хотя Чебышев не обращает на неё особого внимания, получается так, что он по идее основывается на зрелом гауссовском обосновании МНКв (§ 10А.4). И в то же время он (с. 231 – 236) выводит нормальный закон как универсальное распределение ошибок наблюдений примерно так же, как Гаусс в 1809 г. (§ 10А.2).

*Способ Гаусса*, как Чебышев (с. 250) утверждает, фактически имея в виду именно эту, впоследствии отвергнутую Гауссом попытку, основан на сомнительном *законе гипотез*, т. е. на теореме Бейеса с совпадающими априорными вероятностями. Этот *закон* Чебышев несколько раз осуждал в связи с бейесовским подходом и в прежних параграфах своих *Лекций*; в данном же случае уместно вспомнить о замечании Уитттекера и Робинсона в § 10А.2-2.

Заметим, наконец, что Чебышев (с. 249) почему-то полагал, что формула Гаусса (10.6b) для выборочной дисперсии появилась лишь *в последнее время* и что она предполагает наличие большого числа наблюдений. Гаусс (§ 10А.4-6), однако, заявил, что его формула, в отличие от прежней, знаменатель в которой был равен числу наблюдений, необходима и для *достоинства науки*. О несмещённости, которую обеспечивает формула Гаусса, Чебышев не упоминал, хотя и указывал, что рассматривает лишь случайные ошибки с нулевым ожиданием. Можно заключить, что описанная тема мало интересовала Чебышева.

8) Сократимость дроби (с. 152 – 154). Требуется определить вероятность $P$ того, что "случайная" дробь $A/B$ не может быть сокращена. Пусть $p_m$ – вероятность того, что эта дробь не сократима на простое число $m$, тогда

$$P = p_2 p_3 p_5 \dots p_m.$$

Поскольку вероятность сократимости $A$ или $B$ на $m$ равна $1/m$ (здесь существенная предпосылка!),

$$p_m = 1 - 1/m^2,$$
$$P = (1 - 1/2^2)(1 - 1/3^2)(1 - 1/5^2) \dots (1 - 1/m^2), \quad (14.13)$$
$$1/P = 1 + 1/2^2 + 1/3^2 + 1/4^2 + \dots = \pi^2/6, \quad (14.14)$$

$$P = 6/\pi^2.$$

Переход от (14.13) к (14.14) в тексте не объяснён, но он был известен Эйлеру (Euler 1748, гл. 15, §§ 275 – 277). Сумму (14.14) Чебышев определил двумя методами. В одном из них он приравнивал коэффициенты при $x^2$ в двух различных разложениях $\ln[(\sin x)/x]$, из которых второе было во всяком случае известно Эйлеру (там же, гл. 9, § 158):

$$\ln(1 - x^2/6 + x^4/120 - \dots) =$$
$$\ln[(1 - x^2/\pi^2)(1 - x^2/4\pi^2)(1 - x^2/9\pi^2) \dots].$$

Чебышев также заметил, что если дробь не сократима на 2, 3 и 5, то $1/19 < 1 - P < 1/20$, что лишний раз свидетельствует о его внимании к практической стороне математических исследований[3]. Марков[4] заметил, что Кронекер (Kronecker 1894, лекция 24) решил ту же задачу вслед за Чебышевым, указав притом на приоритет Дирихле. Точной ссылки Кронекер не привёл, и мы не смогли проверить её, но он добавил, что Дирихле определил искомую вероятность, *если она вообще существует*.

Бернштейн (1928/1964, с. 219) опровергнул решение Чебышева, заметив, что указанная выше предпосылка приводит к противоречиям. Он привёл и дальнейшие соображения и, в частности, указал (с. 220), что теория чисел имеет дело с закономерными последовательностями чисел, для которых есть смысл исследовать предельные или асимптотические частости чисел заданного класса, но не вероятности, *которых мы никогда не станем экспериментально определять*. Об этой же задаче и о вероятностной теории чисел см. Постников (1974).

## 14.3. Некоторые общие соображения

Итак, Чебышев полагал, что утверждения теории вероятностей должны быть строго доказаны, а её предельные теоремы следует сопровождать оценками погрешностей допредельных соотношений (Колмогоров 1947, с. 56). Он сам существенно развил ЗБЧ и, с некоторыми огрехами, впервые доказал ЦПТ. От исследования этих двух задач *зависела дальнейшая судьба теории вероятностей* (Бернштейн 1945/1964, с. 411). Его ученики и, в первую очередь, Марков и Ляпунов, также внесли свой вклад в теорию вероятностей (§§ 15.1, 15.2, 15.4).

Колмогоров (там же) продолжал:

*Чебышев впервые ясно оценил и использовал всю силу понятий случайной величины и* [её] *математического ожидания ...*

Мы, однако, возразим против выражения *всю силу*. Действительно, во-первых, Чебышев не воспользовался эвристическим определением случайной величины (Пуассон, § 9.2), не употреблял этого выражения[5] и не изучал плотности и производящие функции как математические объекты. Во-вторых, всё развитие теории вероятностей, видимо, можно характеризовать как всё более полное использование силы указанных понятий; с тех пор она начала изучать зависимые случайные величины, их системы и цепи.

Вот ещё заключение Бернштейна (1945/1964, с. 432):

*Кризис теории вероятностей, который остановил её рост 100 лет назад, был преодолён гением Чебышева и его сподвижников, далеко опередивших в этой области западноевропейских математиков.*

*Кризис* можно понимать как опасное и неустойчивое состояние; в данном случае – как крайне неблагоприятное положение по сравнению с быстро развивавшимися тогда в Европе иными ветвями математики, см. § 1.1. И здесь приходится добавить два обстоятельства. С одной стороны, Чебышев, *при своём блестящем аналитическом таланте был патологическим консерватором*. Таково мнение С. П. Новикова (2002, с. 330), который подтвердил его ссылкой на В. Ф. Кагана (1869 – 1953): тот, *будучи молодым приват-доцентом*, выслушал презрительное высказывание Чебышева о *новомодных дисциплинах типа римановой геометрии и комплексного анализа*. Даже Ляпунов (1895/1946, с. 19 – 20), который по мнению Бернштейна (1945/1964, с. 427)

*лучше других представителей петербургской школы* [Чебышева] *понимал и умел ценить достижения западноевропейских математиков второй половины прошлого* [XIX] *столетия,*

назвал идеи Римана отвлечёнными, псевдогеометрическими и иногда бесплодными, притом не имеющими ничего общего *с глубокими геометрическими исследованиями* Лобачевского. Но Ляпунов не забыл о Клейне, который ещё в 1871 г. представил единую картину неевклидовой геометрии, частными случаями которой оказались результаты Лобачевского и Римана!

С другой стороны, Тихомандрицкий (1898, с. IV) засвидетельствовал, что в 1887 г. показывал Чебышеву *свой курс*, и что тот *высказал мысль, что* [...] *теперь нужно перестроить всю теорию вероятностей*. Трудно сказать, что именно имел в виду Чебышев. Его слова должны были стать известными, мы же нашли позднейшие ссылки на них (Maciejewski 1911, с. 87; Гнеденко и Гихман 1956, с. 487). О петербургской школе теории вероятностей см. также Бернштейн (1940).

Но вернёмся к его первым двум утверждениям и спросим: почему всё-таки ни Пуассон, ни Пуанкаре не стремились строго доказывать свои выводы? Пожалуй, только по отношению к ЦПТ такой возможности у Пуассона не было. Основной причиной, видимо, было прикладное положение теории вероятностей, которая почти не имела дела с собственно математическими объектами (плотностями, характеристическими функциями). И *дальнейшая судьба* этой науки не меньше зависела от её обращения к указанным объектам, что произошло лишь в 1920-е годы (П. Леви). Пуассон (1837, с. 1), правда, указал, что в XVIII в. исчисление (а не теория!) вероятностей *стало одной из основных ветвей математики и по числу и пользе своих приложений, и по характеру анализа, который оно породило*, но это утверждение всё же не противоречит сказанному выше. И вот подходящее утверждение Маркова в докладе 1921 г. (Шейнин 2006а, с. 152): *на теорию вероятностей обычно смотрели как на прикладную науку, где математическая точность излишня*.

**Примечания**

**1.** Прудников (1964, с. 91) процитировал статью 1893 г. ученика Чебышева, педагога В. А. Латышева:

*Один из наиболее выдающихся* [русских] *математиков* [...] *прямо говаривал студентам, что не советует заниматься философской стороной вопроса математики, потому что для знаний математики это мало полезно, скорее вредно*.

Он добавил, что этим математиком был наверняка Чебышев. Напомним (гл. 6), что Чебышев сформулировал задачу о последующем восходе Солнца на языке обыденной жизни.

**2.** Аналогичное определение цели теории вероятностей встретилось у Чебышева много раньше (1845/1951, с. 29) и сто́ит напомнить, что у Лапласа теория вероятностей служила для открытия законов естествознания (§ 8.3с). Мысли, сходные чебышевским, мы находим у Буля (Boole 1851/1952, с. 251):

*Цель теории вероятностей можно выразить так: По данным вероятностям любого предложения определить вероятность другого предложения*.

**3.** Заметим, однако, безоговорочное утверждение Чебышева (там же, с. 214): различные лотереи *одинаково безобидны*, если ожидаемые выигрыши в них одни и те же и равны [одинаковым] ставкам. Это противоречит разумному мнению Даламбера и Бюффона (§§ 7.1.2 и 7.1.4) о том, что низкой вероятностью однократного [благоприятного] события следует пренебрегать.

**4.** Мы можем сослаться на немецкий перевод его руководства (1912, с. 148) и на с. 241 последнего издания 1924 г.

**5.** Термин *случайная величина* появился в конце XIX в. (Васильев 1885, с. 127 – 131; Некрасов 1888, с. 77), а английский термин *random magnitude* быть может и позднее (Whitworth 1867/1901, с. 207); нынешнее английское выражение – *random variable*. Оговоримся: ранних изданий книги Уитворта мы не видели.

# 15. Марков, Ляпунов, Некрасов

Здесь мы рассмотрим творчество трёх выдающихся учёных; по отношению к Некрасову мы, однако, уточним эту характеристику.

## 15.1. Марков: общие сведения

Основные результаты Маркова мы рассмотрим в § 15.2, а здесь кратко опишем некоторые дополнительные темы; об его исследовании статистических рядов см. § 16.1.3. Наконец, § 15.3 посвящён личности Маркова.

1) История теории вероятностей. Марков безусловно интересовался ей. Он исследовал ЗБЧ Бернулли (§ 4.2.3) и был инициатором юбилейного заседания Петербургской академии наук 1913 г. по поводу 200-летия этого закона, равно как и публикации русского перевода 4-й части *Искусства предположений* (§ 4). Марков несколько раз возвращался к

истории неравенства Бьенеме – Чебышева и метода моментов (§ 11.2-4), чётко высказался за второе обоснование МНКв (упомянуто в § 10А.6-1), ввёл надлежащий термин *теорема Муавра – Лапласа* и подчеркнул роль Муавра в установлении *формулы Стирлинга* (1924, с. 53). Это последнее издание его Руководства содержит много замечаний по истории теории вероятностей, а в теоретико-числовых мемуарах, собранных в его *Избранных трудах* (1951), немало точных ссылок на предшественников.

2) Страховое дело. В своём *Исчислении вероятностей* Марков пояснил теорию страхового дела, но ничего нового к ней не добавил. Он, однако, много сотрудничал в пенсионных учреждениях, аккуратно и скрупулёзно вникая во все практические детали (Шейнин 1997d), а в 1906 г. опубликовал две газетные статьи с уничтожающей критикой тогдашнего проекта страхования детей (перепечатаны нами там же).

3) Вычисления. *Подобно некоторым другим крупным учёным, Марков любил и умел вычислять* (Линник и др. 1951, с. 615). В теории вероятностей наиболее известна таблица нормального распределения, составленная Марковым (1888) с 11-ю знаками для аргумента $x = 0$ (0,001) 3 (0,01) 4,8 с разностями всех необходимых порядков (например, с разностями первых трёх порядков для $x \le 2{,}649$). По свидетельству авторов справочника Fletcher et al (1946), таблицы Маркова и второго автора (1898 г.) оставались непревзойдёнными вплоть до 1940-х годов.

Отношение Маркова к вычислениям проявилось в одном из его высказываний (1899b, с. 30):

*Многие математики, видимо, полагают, что выход из поля абстрактных рассуждений в сферу эффективных вычислений унизителен.*

4) Теория корреляции. В § 11.7-3 мы указали, что статистики относились к ней с сомнением. То же можно сказать о Маркове. Слуцкий (1912a) опубликовал книгу, в которой собрал и обобщил результаты биометрической школы по теории корреляции и которую Колмогоров (1948) назвал ещё важной и интересной. Марков, однако, не оценил её. В трёх письмах Чупрову 1912 г. (Ондар 1977a, с. 60 – 65) он заявил, что книга интересует, но не прельщает его и не очень ему нравится. В том же 1912 г. Слуцкий вступил в переписку с Марковым и в одном из своих писем (Шейнин 1999c, с. 132) справедливо заметил:

*Недостатки* <u>*изложения*</u> *теории корреляции у Пирсона –*

*временные, такого же порядка, как* [...] *недостатки математики 17 и 18 века* [веков]. *Строгий фундамент под работу гениев был подведён только post factum, то же будет и с Пирсоном. Я взял на себя изложение того, что сделано. А. А. Чупров изложит когда-нибудь вопрос о корреляции с философско-логической стороны, осветит его как метод исследования. Зрелому математическому уму чистого математика предоставлено будет усовершенствовать математический фундамент теории.*

Через несколько лет Марков (1916а/1951, с. 533) критически отозвался о теории корреляции: её

*Положительная часть не велика и состоит в простом применении способа наименьших квадратов к разысканию линейных зависимостей. Но* [...] *не довольствуясь приближенным определением различных коэффициентов,* [она] *указывает ещё их вероятные погрешности, и здесь она вступает в область фантазии, гипноза и веры в математические формулы, которые в действительности не имеют твёрдого научного основания.*

Разыскание зависимостей (пусть только линейных) все-таки важно, а оценка надёжности результатов существенна для любого исследования. В то время, правда, подобная оценка была невозможна. Рассматривая вычисления одного современного ему автора, Марков (с. 534 – 535) указал на явную несуразицу: вычисленный тем коэффициент корреляции был равен 0,09, а его вероятная ошибка – 0,14. Кроме того, эти числа резко изменились при отбрасывании некоторых наблюдений этого автора, но теперь известно (Линник 1951, с. 670), что без знания распределения генеральной совокупности генеральный коэффициент корреляции оценивается выборочным коэффициентом ненадёжно.

Но мы обязаны сослаться на Бернштейна (1928/1964, с. 231). Не обосновав, к сожалению, своего суждения, он заявил, что приложения теории корреляции, за исключением биологических, основаны на недоразумении.

5) Принципы теории вероятностей. Марков по существу ими не занимался. Так, в предисловии к немецкому изданию своего Руководства (1912, с. iii) он заявил, что не будет подробно рассматривать их. Примерно в то же время он (1911с/1977, с. 162) пессимистически оценил подобные усилия:

*Я не буду защищать* [...] *основных теорем, связанных с основными понятиями исчисления вероятностей, о* *равновозможности, о независимости событий и т. д., так как знаю, что можно спорить без конца даже об основных положениях такой признаваемой всеми точной науки как геометрия*.

Он (Руководство 1908, с. 2; 1924, с. 2) также не совсем чётко заявил, что

*различные понятия определяются не столько словами, каждое из которых может в свою очередь потребовать определения, как нашим отношением к ним, которое выясняется постепенно.*

Видимо: некоторые (а не *различные*) понятия вынужденно принимаются без определения. До аксиоматизации от классического определения вероятности смог отойти (не совсем удачно) только Мизес, см. также § 8.4. Вообще же (A. A. Youshkevich 1974, c. 125) Марков, очевидно как ученик Чебышева, недооценивал возникавшее тогда аксиоматическое направление теории вероятностей равно как и теорию функций комплексного переменного.

Марков (1924, с. 10) сформулировал *аксиому*: если равновозможные события *делятся по отношению* к событию *A* на благоприятные и неблагоприятные, то после появления *A* неблагоприятные *отпадают*, остальные же остаются равновозможными. На с. 13 – 19 он доказал теоремы сложения и умножения вероятностей довольно сложным образом и со ссылкой на эту аксиому (не выделенную из контекста!), а на с. 24 заключил, что указанные теоремы совместно с его аксиомой *служат незыблемым основанием для исчисления вероятностей как отдела чистой математики*. Никто ни разу не ссылался ни на марковскую аксиому, ни на его странный вывод. Он же притом не изучал ни плотности вероятностей, ни характеристические функции как математические объекты, как это сделал P. Lévi (1925).

Donkin (1851, c. 353) высказал утверждение, подобное марковской аксиоме и, видимо, вводящее *принцип недостаточных оснований*, или, по Кейнсу (1921/1973, с. 44), *принцип безразличия*:

*Закон, который всегда должен приниматься в качестве основы всей теории, таков. Если мы представляем себе несколько гипотез, полагая их взаимоисключающими и исчерпывающими, но не зная о них ничего больше, то мы распределяем свою веру поровну между ними.*

Буль (1854/2003, с. 163) полагал, что принцип Донкина быть может является аксиоматическим. Но ни Донкин, ни Кейнс, ни Буль не упоминали преобразования теории вероятностей.

6) Математическая статистика. В 1910 г. Марков (Ондар 1977a, с. 12) отказывался признать Пирсона, но к концу жизни несколько смягчил свою точку зрения. Вот отрывок из письма Чупрова английскому статистику Иссерлису, видимо 1924 г. (Шейнин 1990c/2010, с. 88):

*Марков относился к Пирсону можно сказать с презрением. Характерец был у Маркова не легче чем у Пирсона и малейших противоречий он также не переносил. Можете себе представить, как он воспринимал мои настойчивые указания на крупное научное значение трудов Пирсона. Усилия мои, направленные в эту сторону, остались, как доказывает четвёртое издание Исчисления вероятностей, не безрезультатными. Кое-что* [пирсоновское] *оказалось в конце концов включённым в поле научных интересов Маркова*.

Чупров (1925b/1977, с. 168) также опубликовал рецензию на указанное издание. Здесь, мы процитируем лишь его разумную критику марковского описания теории корреляции:

*Выбор вопросов, на которых останавливается внимание, случаен; освещение их в рамках главы, отведённой* [МНКв], *не полно; связь теории корреляции с теорией вероятностей недостаточно органична ...*

Какие же новые отделы статистики Марков включил в последнее издание своего Руководства? Исследование статистических рядов и пирсоновскую теорию корреляции (§ 15.2-1). Он рассмотрел линейную корреляцию и применил МНКв для определения параметров линий регрессии и обсуждал [случайные переменные] с плотностью в виде квадратичной формы, а его общие ссылки включали книгу Слуцкого (1912a). Никаких упоминаний *фантазии* или *гипноза* (§ 15.1-4) не было и в помине. В § 15.2-1 мы добавим, что Марков не обратил внимание ни на критерий хи-квадрат, ни на кривые Пирсона. Других английских учёных (Стьюдента, Юла) он вообще не упоминал.

7) Преподавание теории вероятностей в школе. В 1914 г. П. А. Некрасов попытался ввести эту дисциплину в школьный курс. Марков, который вообще не выносил Некрасова ни как человека, ни как математика (см. также конец § 15.3), не был приглашён на последовавшую заочную дискуссию, но высказал своё мнение в специальной статье (1915a). Он резко протестовал против

конкретной программы курса, которую предложил Некрасов, но в принципе, как можно понять, не возражал против его предложения. Ещё раньше, в 1914 г., он опубликовал по этому поводу перепечатанную нами (Шейнин 1993a, с. 200) газетную статью, а в 1916 г. был членом специальной академической комиссии, которая крайне отрицательно отозвалась и о проекте Некрасова, и о его понимании основных понятий математического анализа, ср. § 15.5 (Доклад 1916).

8) Методологические вопросы. Многие авторы высоко оценили методологическое значение трудов Маркова. Бернштейн (1945/1964, с. 425) назвал их *образцами точности и ясности изложения*; Линник и др. (1951, с. 615) отметили, что для него была *характерна ясность и чёткость языка, тщательная отделка деталей*. Убедительный пример, свидетельствующий об обратном, представляет собой отказ Маркова обсуждать уравнивание прямых условных наблюдений (§ 10А.4-9) в своём Руководстве. И мы не доверяем утверждению Чупрова (1925b/1977, с. 167) о *прозрачной ясности изложения* в Руководстве Маркова (1924).

За исключением самокритичного заявления Маркова (§ 15.2-1), мы согласны лишь с Идельсоном (1947, с. 101), который признал главу о МНКв в его Руководстве *трудно написанной*. И вообще Марков переписывал свои формулы вместо того, чтобы нумеровать и ссылаться на них. Так, он (1924, с. 328 – 330) почти подряд выписал длинную формулу пять раз. Далее, он не применял указательных местоимений; на с. 328 мы читаем: *выбор коэффициентов* [следует выключенная строка] *находится в нашем распоряжении. Мы подчиним коэффициенты* [эта строка повторяется] *двум условиям* ...

Марков отказывался применять термин *случайная величина* (§ 15.2-1); отсутствовали у него и выражения *нормальное распределение* и *коэффициент корреляции*. Его литературный стиль был просто неважным, а некоторые фразы (1906/1951, с. 341) почти непонятны; структура его Руководства усложнялась от одного издания к следующему. См. также § 15.2-1.

## 15.2. Марков: основные исследования

1) Математическая обработка наблюдений. Линник и др. (1951, с. 637) полагают, что при обосновании МНКв Марков *по существу* ввёл понятия, *эквивалентные* нынешним понятиям несмещённой и эффективной статистик для оценки параметров

законов распределения. Оценкой параметров Марков, однако, занимался лишь косвенно и никогда не упоминал о подобной цели, а введение указанных понятий можно было бы с таким же успехом приписать Гауссу. Мы равным образом не согласны с Идельсоном (1947, с. 14), который упомянул метод Гаусса, доведённый Марковым *до высшего логического и математического совершенства*. В § 10А.6-1 мы вспомнили о решительной позиции Маркова, воспринявшего второе гауссово обоснование МНКв; этим (и замечанием о том, что из [состоятельности] среднего арифметического ещё ничего не следует, см. § 12.2-8), однако, и ограничивается здесь его вклад. И в то же время Марков (1899а/1951, с. 246) отрицал оптимальность МНКв, так нужно ли было его обосновывать?

Нейман (Neyman 1934, с. 595) ошибочно приписал гауссово обоснование Маркову, а F. N. David & Neyman (1938) повторили указанную ошибку, но Нейман (1938/1952, с. 228) позднее признал её. И тем не менее призрачная *теорема Гаусса − Маркова* до сих пор встречается в литературе; H. A. David (2001, p. 218) заметил, что ввёл её Scheffé (1959, p. 14), хотя уже Plackett (1949) указал на это недоразумение.

В своём Руководстве Марков (1924) по существу объединил обработку наблюдений с исследованием корреляции (§ 15.1-4) и статистических рядов и интерполированием, что, видимо, отражало его попытку включить МНКв в зарождавшуюся математическую статистику, однако в методическом отношении это нововведение было спорным.

Для учебного пособия исследование статистических рядов было довольно сложным; в то же время Марков не упомянул соответствующих статей Чупрова (1916; 1918 – 1919), первую из которых он сам представил в *Известия* Петербургской академии наук. Чупров (1925b/1977, с. 167) вежливо заметил, что *течения научной мысли, идущие не в русле собственной работы Маркова*, не упоминаются.

В связи со статистическими рядами Марков (1924, с. 349 – 353) рассмотрел эксперимент Уелдона, – 26 306 бросков 12-и костей (Пирсон 1900). Применив ЦПТ и теорему Бейеса с переходом к нормальному закону, Марков решил, что вероятность появления пяти или шести очков оказалась выше 1/3. В отличие от Пирсона он не воспользовался критерием хи-квадрат и мог создать впечатление, что это новое средство, хотя и пригодное также для небольшого числа наблюдений, вообще не нужно.

Единственная связь интерполяции с МНКв в Руководстве состояла в вычислении эмпирических коэффициентов по принципу наибольшего веса. Пирсоновских кривых Марков не коснулся, возможно ввиду их недостаточной обоснованности, однако, он перепечатал Предисловие к изданию 1913 г., в котором применение приближённых методов в прикладной математике, даже при невозможности оценки их погрешности, было названо неизбежным. Более того: Марков (1915a, с. 32) заявил, что *эмпирические* формулы Пирсона не требуют теоретического доказательства.

Мы полагаем, что Марков следовал здесь (так же, как и в случае с цепями, рассмотрение которых не было иллюстрировано естественнонаучными приложениями) своему жёсткому и вряд ли вполне обоснованному принципу (Ондар 1977a, письмо Чупрову 1910 г., с. 59): *Я ни на шаг не выйду из той области, где компетентность моя не может подлежать сомнению*.

Изложение собственно МНКв в руководстве было тяжеловесным, и сам Марков в письме Чупрову 1910 г. признал это (Ондар 1977a, с. 29): *мне часто приходилось слышать, что у меня изложено недостаточно ясно*. О том же в 1893 г. писал Маркову его бывший студент Коялович (1893 – 1909, 1893, с. 224), см. также Ермолаева (2009) и Шейнин (2006b/2009):

*Насколько я Вас понял, Вы рассматриваете каждое отдельное наблюдение как одно из значений возможного результата. Таким образом, для каждого измерения возможен ряд результатов* [...], *один из которых осуществляется на деле. Все это я готов понять для одного измерения, но когда их имеется, напр., два, то я не могу понять, чем отличается ряд возможных результатов* [...] *первого наблюдения от ряда возможных результатов* [...] *второго измерения.*

*Вопрос, конечно, сейчас же решается, если Вы скажете, что вероятность одной и той же ошибки в этих рядах различна, но ведь Вы вероятно не захотите вводить понятие о вероятности ошибки в Ваше изложение*.

Положение так и не улучшилось. Несмотря на собственные утверждения (Марков 1924, с. 323 и 373), высказанные вслед за Чебышевым (1879 – 1880/1936, с. 227), он (с. 327 и 374) заявил, что каждому сделанному наблюдению соответствует лишь одно возможное и нигде чётко не разъяснил, что ошибки наблюдения являются случайными величинами и что ряд наблюдений это случайная выборка, обладающая плотностью распределения.

Более того, Марков (Ондар 1977а, Письмо 53 Чупрову 1912 г., с. 71) *повсюду, где только возможно, исключ*[ал] *ничего не определяющие слова* *<u>случайно</u>* *и* *<u>наудачу</u>*, приводя взамен соответствующее пояснение. И тем не менее он иногда вместо *случайный* просто писал *неопределённый*, что было много хуже. В Прим. 5 к гл. 14 мы упоминали в этой связи Васильева, который (1885, с. 133) прямо утверждал, что *случайные ошибки имеют все свойства случайных величин* (и *свои специальные свойства*).

Глава о МНКв в руководстве Маркова вряд ли удовлетворила математиков-статистиков или геодезистов. Ни те, ни другие не нашли там обсуждения результатов Пирсона, вторым же кроме того не требовалась ни интерполяция, ни исследование статистических рядов, а отсутствие скобок Гаусса (Прим. 15 к гл. 2) и появление давно забытого термина *практическая геометрия* вместо *геодезия* (с. 462) не могло им понравиться.

Упомянем ещё, что Марков раскритиковал поспешную и непродуманную статью Б. Б. Голицына (Galitzin 1902), в которой тот описал обработку своего исследования прочности стеклянных трубок. Работа Маркова оставалась в рукописи и была опубликована нами (Шейнин 1990b). Основана она была не на каком-либо новом методе, а на аккуратности и тщательности учёта всех обстоятельств. Именно в связи с обсуждением статьи Голицына Марков высказался и по поводу *правила Бредихина* (§ 11.8.4).

2) ЗБЧ. Марков (1906/1951, с. 341) заметил, что условие

$$\lim \mathrm{E}(1/n^2)[(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) - (\mathrm{E}\xi_1 + \mathrm{E}\xi_2 + \ldots + \mathrm{E}\xi_n)]^2 = 0, \; n \to \infty \qquad (15.1)$$

достаточно, чтобы последовательность [случайных величин] $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ подчинялась ЗБЧ, т. е., в его формулировке, условию

$$\lim P\{|(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) - (\mathrm{E}\xi_1 + \mathrm{E}\xi_2 + ... + \mathrm{E}\xi_n)| < \varepsilon\} = 1, \; n \to \infty.$$

Далее Марков (1906/1951, с. 342 – 344; Руководство, 1913, с. 116 – 129) вывел несколько достаточных условий для последовательностей независимых и, особо, зависимых случайных величин и там же (с. 351 и 119 соответственно и с. 174 в издании 1924 г.) привёл примеры последовательностей, не подчинявшихся этому закону и, кроме того, доказал

(Руководство, 1913, с. 129), что, помимо условия (15.1), независимые величины подчиняются ЗБЧ, если для каждого $i$ существуют моменты

$$\mathrm{E}\xi_i = a_i,\ \mathrm{E}|\xi_i - a_i|^{1+\delta} < C,\ 0 < \delta < 1.$$

В связи с исследованием ЗБЧ Марков (1900a, с. 86 издания 1924) доказал, что для положительной случайной величины ξ

$$P(\xi \le t^2\mathrm{E}\xi) > 1 - 1/t^2$$

и Борткевич (1917, с. 36) и Романовский (1925a; 1925b) назвали это неравенство его именем.
3) [ЦПТ]. Марков уточнил условия теоремы (14.6), доказанной Чебышевым, о чем мы упомянули в конце § 14.1. Он (1898/1951, с. 268) рассматривал независимые [случайные] величины $u_i$ с нулевыми ожиданиями[1], принимая вслед за Чебышевым, что при конечных или[2] бесконечных значениях $k$

$$\lim|\mathrm{E}u_n^k| < +\infty,\ n \to \infty \qquad (15.2)$$

и дополнительно полагая, что

$$\lim\mathrm{E}u_n^2 \ne 0,\ n \to \infty. \qquad (15.3)$$

Марков несколько раз возвращался к ЦПТ.
a) Для осуществления равенств (14.7) он (1899a/1951, с. 234) принял условие (15.2), а для перехода к доказываемой теореме (с. 240) ввёл дополнительное ограничение, – а лучше сказать два ограничения (при $n \to \infty$):

$$\lim\mathrm{E}[(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^2] = \infty, \qquad (15.4)$$
$$\lim[\mathrm{E}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^2/n] \ne \varepsilon. \qquad (15.5)$$

b) Позднее Марков (1907, с. 708) снова обратился к доказательству формулы (14.7). Сославшись на свои статьи (1898; 1899a), он теперь ввёл условия (15.2) (для конечных значений $k$) и (15.5), сами же величины $u_i$ не ограничил. На следующей странице Марков отказался от условия (15.5), *лишь бы только*

$$\lim\mathrm{E}u_n^2 = \infty,\ n \to \infty \qquad (15.6)$$

и значения $u_i$ оставались конечными. Условия (15.6) и (15.4) конечно же совпадали.

Наконец, Марков (1908а) существенно расширил область применения метода моментов, заменив свои ограничения единым условием Ляпунова (1901а/1954, с. 159)

$$\lim \frac{\sum \mathrm{E}\,|u_i|^{2+\delta}}{[\sum Du_i^2]^{1+\delta/2}} = 0,\ \delta > 0,\ n \to \infty. \qquad (15.7)$$

В 1913 г. Марков включил видоизменённый вариант этого последнего исследования в своё Руководство; он также перепечатан в книге автора (1951, с. 319 – 338).

По поводу условия (15.3) Марков (1899с, с. 42) обратил внимание на пример Пуассона (1824, § 10), который доказал, что предельное распределение линейной формы

$$L = \varepsilon_1 + {}_{1/3}\varepsilon_2 + {}_{1/5}\varepsilon_3 + \ldots$$

случайных величин $\varepsilon_i$ с плотностью $e^{-2|x|}$ имеет вид

$$\lim P(|L| \le c) = 1 - (4/\pi)\mathrm{arctg}\,e^{-2c},\ n \to \infty.$$

В его примере

$$\lim \mathrm{D}[\varepsilon_n/(2n-1)] = 0,\ n \to \infty.$$

Марков и сам привёл пример нарушения условия (15.3), при котором ЦПТ не имела места и дополнительно сослался на Пуассона, но без точной ссылки (1899а/1951, с. 242 – 246).

История условия (15.5) остаётся, однако, неясной. Для независимых величин его ввёл Некрасов (1900 – 1902, 1902, с. 292 и 293) взамен ограничения (15.3). Ляпунов (1901а/1954, с. 175) утверждал, что оно недостаточно (но мог ли он в то время знать о третьей части работы Некрасова?) и сослался на примеры, указанные Марковым. Сенета (Seneta 1984, с. 39) заметил, однако, что опубликованные статьи Маркова не содержали подобных примеров и что условие (15.3) необходимо и достаточно для ЦПТ в случае равномерно ограниченных величин.

4) Цепи Маркова. Это название предложил Бернштейн (1926,

§ 16), сам же Марков (1906/1951, с. 354) называл их просто цепями. Отправной точкой для него послужила одна работа Брунса того же года, однако предыстория цепей Маркова много богаче и к ней мы кроме того относим

a) Урновую задачу Д. Бернулли и Лапласа, предшественницу модели Эренфестов (§ 8.1-3).

b) Изучение броуновского движения (Brush 1968).

c) Задачу о вымирании родов (§ 11.2-7).

d) Задачи о случайном блуждании (Dutka 1985).

e) Некоторые результаты Пуанкаре (§ 12.2-6).

f) Работы Башелье (например, Bachelier 1900 о финансовых спекуляциях, см. также Courtault и др. 2000; Taqqi 2001).

Марков (1906/1951, с. 345 и 354) рассмотрел простые однородные цепи случайных событий и дискретных случайных величин и доказал, что ЗБЧ применим и к числу появлений события, и к последовательностям этих величин. Позднее он (1910/1951, с. 476) распространил первый из этих результатов на простые неоднородные цепи.

ЦПТ для цепей Марков доказывал при помощи условия (14.7). Он рассмотрел простые однородные цепи событий (1906) и случайных величин (1908b); простые неоднородные (1910) и сложные однородные цепи случайных величин (1911a; 1911b); простые однородные цепи косвенно наблюдённых событий (1912a). При изучении цепей Марков установил важные эргодические теоремы, однако не обратил на них особого внимания; одну из решённых им задач мы упоминали в этой связи в § 8.1-3).

Трудно поверить, что Марков не представлял себе большого прикладного значения цепей, но сам он об этом ни слова не сказал и единственный приведённый им пример (1913, чередование гласных и согласных в русском языке, см. Petruszewycz 1983) имел в то время методический характер. В 1910 г. сам Марков в письмах Чупрову несколько раз замечал, что ограничивает свою работу тем, что ему хорошо известно (§ 15.2-1). Добавим ещё (Колмогоров 1947, с. 59), что в то время физика в России не изучалась должным образом.

5) Метод моментов. Марков широко применял его, и только тот, кто повторит некоторые его исследования (например, предельного поведения слагаемых, полученных при разложении алгебраических дробей), сможет оценить преодолённые им трудности. Бернштейн (1945/1964, с. 427) противопоставляет

Маркову Ляпунова, который применил усовершенствованный к тому времени классический трансцендентный анализ. Метод моментов, заключил Бернштейн, *не облегчает проблемы* [доказательства ЦПТ] *и лишь перемещает центр её трудности*. Вскоре Бернштейн (1947, с. 44) заметил, что Чебышев отрицательно отзывался о методе характеристических функций, который в его время ещё не соответствовал требованиям математической строгости.

Можно, однако, представить себе, что Марков хотел выяснить, насколько мощен метод моментов; да он (Руководство 1913; 1951, с. 322) и сам указал, что Ляпунов *поколебал* значение метода математических ожиданий и что он, Марков, поэтому и решил доказать упомянутую теорему заново (см. выше).Уже Ляпунов (1900/1954, с. 125) назвал марковское доказательство ЦПТ *слишком сложным и громоздким* ввиду его связи со *специальной теорией*, но Крейн (1951, с. 8 – 9) заметил, что он ещё *не потерял своего значения* и его ещё используют (Соловьев 1997, с. 12).

## 15.3. Личные черты

О жизни (и творчестве) Маркова см. Марков-младший (1951), Гродзенский (1987), Гнеденко и Шейнин (1978), Seneta (2001), Шейнин (2007b). Более частные источники указаны ниже; в частности, архивную переписку Маркова см. Шейнин (2007e), а его многочисленные общественно-политические письма в газеты, часть которых оставалась в архивах ввиду их резкости, опубликовал Гродзенский[3]. Мы сами также опубликовали несколько писем Маркова, об одном из которых см. § 15.1-7.

В 1901 г. Толстой был отлучён от православной церкви, и в последние дни его жизни Священный синод решил, что отлучение останется в силе (Аноним 1910). В 1912 г., когда события 1910 г. были ещё в памяти, Марков подал прошение в Синод с просьбой отлучить и его (но Синод лишь признал его *отпавшим*), см. Марков-младший (1951, с. 609) и Емелях (1954, с. 400 – 401 и 408). И всё же: почему Марков промедлил около двух лет? Мы полагаем, что он возмутился позорным делом Бейлиса (кровавым наветом мелкого конторского служащего), которое неявно поддерживала православная церковь, см. ниже.

Менее известно, что Марков последовательно выступал против антисемитизма, в чем, как и в своём творчестве, он следовал за Чебышевым. В 1870 г. Чебышев выхлопотал Л. И. Липкину, который изобрёл преобразователь прямолинейного движения в круговое, права на жительство в столице и на сдачу магистерского экзамена (Прудников 1964, с. 84).

В 1905 г. Совет Петербургского университета решил просить разрешения зачислить в студенты всех успешных абитуриентов-евреев вне зависимости от процентной нормы (3%), но два профессора, Марков и зоолог В. М. Шимкевич, заявили, что следует решить этот вопрос явочным путём. Их предложение было отвергнуто, и Марков, состоявший членом комиссии Совета, покинул её (*Журналы* 1906).

Через два года студенты Военно-медицинской академии выгнали из аудитории нескольких членов черносотенного и антисемитского *Союза русского народа*. Марков публично поддержал это решительное действие, за что и получил благодарность от сходки студентов Академии (Гродзенский 1987, с. 96). В 1913 г. некто М. Жовтис поступал в Харьковский технологический институт. На экзамене по математике его попросили решить уравнение десятой степени, к тому же весьма неприятное. Он, конечно же, с таким заданием не справился, но сообщил об этом эпизоде в местную газету. Марков опубликовал в другой газете отклик, назвав экзамен издевательством (там же, с. 102 – 104).

В том же году, во время пресловутого процесса киевского еврея М. Бейлиса, которого обвинили в ритуальном убийстве русского мальчика, Марков обратился с открытым письмом к Замысловскому, лидеру крайне правых в Думе, с обвинением в организации антисемитской кампании (там же, с. 104 – 105).

Погоды Марков, конечно же, не сделал, но его мужественную позицию не следует забывать. Вспомним письмо Эйнштейна 1933 г. немецкому статистику и антифашисту Гумбелю (Архив Эйнштейна, Еврейский университет в Иерусалиме, № 38615): *Достойные черты характера столь же ценны, как научные результаты*. Гумбель еле-еле успел удрать во Францию, а оттуда – в США, но в 1920-е годы он несколько раз побывал в Советском Союзе, опубликовал свои впечатления, в которых показал себя сталинистом (Шейнин 2003а). Похвала Эйнштейна оказалась преждевременной …

О других эпизодах из жизни Маркова см. Марков-младший (1951); мы лишь добавим (Гродзенский 1987, с. 137), что в 1921 г. 15 профессоров Петроградского университета заявили (разумеется, безуспешно), что только знания, а не классовая принадлежность или политические убеждения должны учитываться при приёме абитуриентов в университеты. Первым подписал это заявление Марков. Нейман (1981) вспомнил, что Маркова прозвали *неистовым Андреем*, о другом его прозвище, *боевой академик*, сообщил Некрасов (1916b, с. 9).

Общеизвестной стала чрезмерная резкость Маркова. В 1912 г. Жуковский (Шейнин 2007е, с. 198) написал ему:

*Не могу не упрекнуть Вас за выражения Вашего письма относительно высокочтимого* […] *Чаплыгина, которые едва ли можно считать корректными*.

И в 1915 г. К. А. Андреев в письме Некрасову (Шейнин 1994f, с. 132) указал, что Марков

*До сих пор остаётся старым закоренелым грешником по части провокации споров*. […] *Единственное средство избавить себя от неприятности быть на удочке провокатора, это не реагировать ни на какие его выпады*.

Андреев опубликовал посмертную статью В. Г. Имшенецкого, Марков же раскритиковал её как незавершённую. Сам Марков перед смертью согласился на публикацию своей последней и также незавершённой статьи (Безикович 1924, с. XIV).

Резко и, скажем, вызывающе, Марков вёл себя по отношению к Некрасову, *одолевал* его *множеством грубых открыток* (жалоба Некрасова 1915 г. Непременному секретарю АН, см. Шейнин (2007е), и Некрасов (1916b, с. 56 – 62).

## 15.4. Ляпунов

В научном творчестве Ляпунова теория вероятностей осталась лишь эпизодом. Он (1900 и 1901а) доказал [ЦПТ], приняв единственное условие (15.7). Мы лишь кратко повторим (Бернштейн 1945/1964, с. 427 – 428), что характеристическая функция определяет искомый закон распределения вне зависимости от существования соответствующих моментов и что то разложение по степеням *s*, которым пользовался Чебышев (§ 14.1-4), не приводит к затруднениям при замене этого аргумента на *is*. Ляпунов доказал, что при выполнении его условия характеристическая функция центрированной и нормированной суммы случайных величин сходится к характеристической функции нормированного нормального закона.

Обратим также внимание на статью Линдеберга (Lindeberg 1922b, с. 211), чьё доказательство ЦПТ проще и более известно[4].

Линдеберг сослался на свою первоначальную работу (1922a) и продолжал:

*Теперь я вижу, что уже Ляпунов изложил общие результаты, которые не только превосходят сделанное Мизесом* [ссылка на его статью 1919 г.], *но из которых можно вывести большинство установленных мной фактов.* [...] *Изучение работ Ляпунова побудило меня заново проверить применённый мной метод*.

Особый эпизод связан здесь с ЦПТ для больших уклонений. Чебышев полагал, что пределы интеграла α и β в формуле (14.6) этой теоремы являются *какими-нибудь*, Некрасов же (1911, с. 449) произвольно истолковал это выражение как *являются переменными*. К Некрасову мы вернёмся в § 15.5, здесь же укажем, что он вполне мог бы, напротив, указать, что обобщал теорему Чебышева.

В своей предшествовавшей полемической статье Ляпунов (1901b, с. 61) заявил, что предполагал упомянутые пределы заданными и что в противном случае вероятность, записанная в левой части формулы (14.6), может и не иметь никакого предела, но все-таки асимптотически выражаться нормальным законом распределения.[5]

## 15.5. Некрасов

Жизнь и творчество Некрасова чётко подразделяются на два этапа. С 1885 г. и примерно до 1900 г. он успел опубликовать замечательные мемуары и в России, и в Германии, был профессором и ректором Московского университета. Некрасов (1898) также наметил доказательство [ЦПТ] для сумм [решетчатых случайных величин]. Затем, однако, с ним произошёл какой-то перелом. Его работы по теории вероятностей стали невообразимо многословными, темными и путанными, притом связанными с моральными, политическими и религиозными соображениями. Вот пример его утверждения (1906, с. 9): математика накопила

*психологическую дисциплину, а также и политическую и общественную арифметику или математический закон политического и общественного развития сил, зависящих от психических и физиологических оснований*.

Но этого мало: его сочинения стали изобиловать элементарными математическими ошибками и нелепыми утверждениями. Так (Некрасов 1901, с. 237), при *грубом* понимании можно принять $x^n$ при $n > 0$ за предел sin$x$ при

$|x| \to 0$, и с таким пониманием предела *выводы вышеупомянутых авторов* [Чебышева, Маркова, Ляпунова] *никогда не расходятся*. Вот соответствующее утверждение Ляпунова (1901b, с. 63):

*Все возражения П. А. Некрасова основаны на недоразумениях*; […] *одни суть не более, чем голословные заявления*, […] *другие совсем не отвечают содержанию критикуемых статей или отличаются крайней неопределённостью.*

Второй и последний из многих возможных примеров мы приведём из письма Некрасова Маркову 20.12.1913 г. (Шейнин 2007e, с. 167) по поводу обоснования МНКв:

*Точки зрения Гаусса и Лапласа я различаю моментами относительно опыта; первая точка зрения à posteriori, а вторая – à priori. Судить à posteriori удобнее, ибо данных больше; но эта точка зрения запаздывает, отстаёт, плетётся за событием.*

По крайней мере сопутствующими причинами подобного, мы бы сказали, перерождения личности Некрасова были его глубокая религиозность (перед учёбой в университете он окончил духовную семинарию), занятие высоких административных должностей в Министерстве народного просвещения[6] и реакционные взгляды. Однажды Некрасов (А. В. Андреев 1999, с. 103) упомянул *цельное знание* религиозного философа В. С. Соловьёва, и потому уместно процитировать высказывание последнего (Радлов 1900, с. 787), которое, фактически, стало и его собственной идеей: истинное знание это синтез теологии, рациональной философии и положительной науки. Андреев действительно утверждает, что Некрасов раздвоился между математикой и подобной философией. Борткевич (1903, с. 124) заметил, что Некрасов особенно часто упоминает Соловьёва *всуе* – но иногда, как представляется, и к месту.

По поводу общественно-политических взглядов Некрасова можно обратиться к его письму 1916 г. П. А. Флоренскому (Шейнин 1993a , с. 196): *немецко-еврейская культура и литература толкает нас* на распутье. Лишь в небольшой степени можно оправдать это утверждение тогдашней войной с Германией. При всём том сочинения Некрасова, не относящиеся к теории вероятностей или статистике, оставались вполне разумными. Так, в 1913 г. в *Математическом сборнике* появилась его обычная в этом смысле статья, посвящённая динамике, да и по поводу школьного образования можно утверждать то же, см. ниже.

Мы теперь остановимся на нескольких конкретных вопросах.
1) Преподавание. В § 15.1-7 мы упоминали предложение Некрасова ввести преподавание теории вероятностей в школьный курс и то, что его конкретная программа была отвергнута. Здесь мы добавим, что ещё в 1898 г. Некрасов предложил ввести её же в учебный план юридического факультета Московского университета, однако и эта инициатива оказалась неудачной. Впрочем (Шейнин 1995a, с. 166), в течение 1902 – 1904 гг. теория вероятностей не преподавалась даже на физико-математическом факультете Московского университета и редко с 1912 по 1917 гг.

Некрасов (1916а, с. 30 – 31) рекомендовал ввести в школьный курс и начала аналитической геометрии и анализа и считал полезным организацию математических кабинетов и применение кино, а намного раньше (1906, с. V) заявил, что курс математики следует строить на основе логики. Во всяком случае, проблема соотношения математической логики и теории вероятностей актуальна и сейчас.

2) МНКв (Некрасов 1912 – 1914). Во второй части этой статьи он указал, что вначале не заметил соответствующих работ Ярошенко (1893а; 1893b), но заявил (ошибочно), что рассмотрел свою тему общее. Ярошенко обосновал среднее арифметическое и вообще МНКв ссылкой на мемуар Чебышева (1867), т. е. на неравенство Бьенеме – Чебышева (§ 10.4-7). Впрочем, подобное же утверждение высказал уже Усов (1867).

Некрасов также неверно приписал Лежандру применение МНКв для интерполяции и неправильно описал различие в подходах к МНКв у Лапласа и Гаусса, см. также соответствующую выдержку из его письма Маркову (выше).

3) [ЦПТ]. Именно Некрасов рассмотрел эту теорему для случая больших уклонений, который после него начал изучаться лишь через 50 лет. Пусть независимые решетчатые случайные величины (линейные функции целочисленных случайных величин) $\xi_i$, $i = 1, 2, ..., n$, обладают конечными средними $a_i$ и дисперсиями $\sigma_i^2$ и

$$m = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n.$$

Пусть, далее,

$$x(m) = |m - \Sigma a_i| \div (\Sigma\sigma_i^2)^{1/2}.$$

Некрасов ограничился условием $x < n^p$, $0 < p < 1/6$, и доказывал, что для всех $m_1$ и $m_2$, удовлетворяющих этому условию,

$$P\,(m_1 < \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n < m_2) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x(m_1)}^{x(m_2)} \exp(-\,t^2/2)dt.$$

Всего он (1898) сформулировал шесть теорем и доказал их позже (1900 – 1902). Ни Марков, ни Ляпунов не изучили его результаты в достаточной мере. Это, впрочем, было почти невозможно и А. Д. Соловьёв (1997, с. 15 – 16) разумно заключил, что вообще никто не сделал этого *сколько-нибудь подробно*. Он сам смог лишь предположить, что Некрасов действительно доказал свои теоремы и напомнил, что Марков указал несколько допущенных тем ошибок. Более того, Соловьёв (с. 13 – 14) заметил, что Некрасов неверно представлял себе понятие решетчатых величин (не так, как сказано выше). В своём общем заключении он (с. 21) заявил, что Некрасов наложил на исследуемые случайные величины слишком стеснительное условие (аналитичность производящих функций в некотором кольце, что сильнее, нежели существование всех их моментов) и что другие его условия, вообще говоря, невозможно проверить. И Соловьёв, и первый из современных комментаторов, Сенета (Seneta 1984, § 6), сходятся в том, что упомянутые результаты Некрасова не повлияли на развитие теории вероятностей[7]. Этот печальный итог был вызван, конечно же, тем, что Некрасов не смог вразумительно изложить свои мысли, но также и громоздкостью принятого им подхода, – чисто аналитического, а не вероятностного (А. Д. Соловьёв, с. 21)[8].

## Примечания

**1.** Пока Марков не начал изучать свои цепи, он всегда принимал эти два условия. Впрочем, в одном случае (1899a/1951, с. 240) он, видимо, просто не повторил их со с. 234.

**2.** В русском переводе французского оригинала здесь допущена опечатка.

**3.** Гродзенский, к сожалению, не составил перечня обнаруженных им писем и не указал, какие из них действительно появились в печати своевременно.

**4.** Так, Гнеденко (1950/1954, с. 244 – 249) доказывает теорему для условия Линдеберга, а затем добавляет, что оно следует из условия Ляпунова.

**5.** Переписка Ляпунова с К. А. Андреевым 1901 г. (Шейнин 1989b) свидетельствует о том, что он вначале хотел опубликовать свою заметку в *Математическом сборнике*, но что руководство Московского математического общества (Бугаев, Некрасов (!)) воспротивились этому и что

Ляпунов по совету Андреева значительно расширил её.

**6.** Вот мнение К. А. Андреева (письмо Ляпунову 1901 г.; Гордевский 1955, с. 40):

*мыслит он* [Некрасов] *вообще не ясно, хотя может быть и глубоко, а излагает свои мысли ещё темнее. Удивляюсь только, что он так самонадеян. В его положении при такой массе административных тягостей нельзя, по-моему, иметь даже достаточно свободного времени, чтобы спокойно обдумывать глубокие научные вопросы, а потому лучше было бы за них вовсе не браться*.

Вот пример *глубокой мысли* Некрасова (1916a, с. 23): он упомянул почти все задачи не существовавшей теории катастроф и сам термин *катастрофа*.

**7.** Можно, однако, добавить, что одной из целей своей работы Марков (1912b, с. 215) подчас считал опровержение ошибочных заявлений Некрасова. Аналогичное заявление содержится в одном из его писем Чупрову 1910 г. (Ондар 1977a, с. 12).

**8.** В 1896 г. Чупров оканчивал Московский университет, и его *кандидатское сочинение* (дипломную работу) принимал Некрасов. В том же году в письме Борткевичу (Борткевич и Чупров 2005, Письмо № 5) Чупров сообщил, что, увидев в его сочинении слово *дисперсия*, Некрасов спросил: *Вы что это, теорию вероятностей к дисперсии света прилагаете*?..

# 16. Зарождение математической статистики

## 16.1. Устойчивость статистических рядов

На континенте Европы статистические исследования конца XIX и начала XX в. были в основном посвящены изучению населения, в Англии, же, напротив, главной областью приложения статистической мысли оказалась биология. Более определённо можно сказать, что так называемое континентальное направление зародилось в результате работ Лексиса, а предшественниками его были Пуассон, Бьенеме, Курно и Кетле.

Пуассон и Курно исследовали значимость статистических расхождений *вообще*, т.е. не приводя статистических примеров, а Курно (§ 11.3-6) кроме того пытался выявлять зависимость между решениями судей и присяжных. Бьенеме (§ 11.2-3) интересовался изменениями статистических показателей от серии к серии, Кетле же (§ 11.5) исследовал связь между причинами и следствиями в обществе, пытался стандартизировать статистические данные в международном масштабе и положил начало моральной статистике.

Все эти попытки и результаты происходили на фоне утверждений о том, что теория вероятностей применима к статистике, только если для данного массива наблюдений имели место “равновозможные случаи”, а вероятность оставалась неизменной (§ 11.7).

**16.1.1. В. Лексис.** Он (Lexis 1879) предложил непараметрический критерий для равенства вероятностей в различных сериях наблюдений, иначе – критерий устойчивости статистических рядов. Пусть имеется $m$ серий из $n_i$ наблюдений, $i = 1, 2, ..., m$, и вероятность появления изучаемого события в каждой из них предполагается одной и той же и равной $p$. Если в серии $i$ событие появилось $a_i$ раз, то дисперсии величин $a_i$ можно вычислить по двум независимым формулам (Лексис 1879, § 6):

$$\sigma_1^2 = pqn,\ \sigma_2^2 = [vv]/(m-1), \qquad (16.1;\ 16.2)$$

где $n$ – среднее из $n_i$, $v_i$ – уклонения $a_i$ от их среднего и $q = 1 - p$. Формулу (16.2) ввёл Гаусс, см. (9.6b); формула (16.1) была ему также известна (посмертно опубликованная запись: *W*-8, 1900, с. 133). Аналогично можно сравнивать друг с другом дисперсии частостей появления события. Оговоримся: Лексис использовал не дисперсии, а вероятные ошибки, причём считал, что соотношение между вероятной и средней квадратической ошибками не зависело от распределения.

Далее, Лексис (§ 11) назвал отношение

$$Q = \sigma_2/\sigma_1 \qquad (16.3)$$

*коэффициентом дисперсии*. Случай $Q = 1$ соответствовал, по его терминологии, нормальной дисперсии (некоторые случайные отклонения от 1 он всё-таки считал допустимыми); дисперсию при $Q > 1$ он назвал сверхнормальной, а устойчивость общего ряда наблюдений – поднормальной и указал, что вероятность *p* не являлась при этом постоянной. Наконец, случай $Q < 1$ Лексис объяснил зависимостью между наблюдениями, соответствующую дисперсию назвал поднормальной, а устойчивость – сверхнормальной. Впрочем, этот вариант он по существу не рассматривал. Заметим ещё, что он (§ 1) видимо впервые качественно подразделил статистические ряды на несколько типов и сделал первый (забытый) шаг к выделению стационарности и тренда.

Но как могла вероятность изменяться? Вначале Лексис (1876, с. 220 – 221 и 238) полагал, что изменения следуют нормальному закону, затем (1877, § 23) принял менее ограничительные условия; впрочем, возможно, что он не отказался от давнишней традиции (§ 11.7-7).

Лексис не вычислил ни среднего значения, ни дисперсии своего коэффициента (что было бы трудно) и не сказал ничего о необходимости решения этой задачи. Напомним, что Гаусс (§ 10А.4), введя выборочную дисперсию, указал на её несмещённость и определил её дисперсию. Быть может главным у Лексиса оказалось стремление статистически проверить некоторую стохастическую модель, и, видимо, в этом смысле следует понимать замечание Чупрова (§ 16.2) о необходимости объединить Лексиса и Пирсона.

Французский актуарий Дормуа (Dormoy 1874; 1878) опередил Лексиса, но в то время даже французские статистики (которые почти не участвовали в развитии Континентального направления статистики) не заметили его нововведения, и впервые о нём заговорил Лексис (Чупров 1909/1959, с. 236). Чупров (1926/1960, с. 228) указал, что теорию Лексиса следует называть по имени обоих учёных, но впоследствии Борткевич (1930, с. 53) высказал противоположное мнение:

*Дормуа так плохо понимал, как применять теорию вероятностей к эмпирическим фактам, что полагать его наравне с Лексисом, поскольку речь идёт о теории дисперсии, не соответствовало бы исторической правде*.

**16.1.2. В. И. Борткевич.** Мы упоминали его в § 9.7 по поводу ЗБЧ и в § 11.7-4 в связи с оценкой точности статистических выводов. Владислав Иосифович Борткевич, поляк по происхождению и юрист по образованию, родился и учился в Петербурге. В конце XIX в. он продолжил своё образование в Германии (был учеником Лексиса), а в 1901 г. получил профессуру в Берлине и прожил там всю оставшуюся жизнь как Ладислаус фон Борткиевич. В 1912 г. русский статистик П. Д. Азаревич (Фортунатов 1914, с. 237) писал о нем:

*Всякий раз, когда я вижу В. И., мне становится жаль, что его упустили из России. Вот истинный человек науки*.

Сам же Борткевич в письме Чупрову 1905 г. (Шейнин 1990c/2010, с. 55) сообщал, что чувствует себя в Германии *прекрасно*, а вот в России возможно потрясение общества. Борткевич, действительно, опубликовал большинство своих работ на немецком языке (которым владел в совершенстве), но и с Россией не терял связи. Он (1903) резко критиковал Некрасова за утверждения о том, что теория вероятностей может смягчить отношения между трудом и капиталом (с. 215) и (с. 219) оправдать принципы твёрдой власти и самодержавия, равно как и за *елейность* (с. 215) и *реакционные вожделения* (с. 216)[1]. Слуцкий (1922) сослался на полученное от него письмо, да и вообще переписывался с ним (Шейнин 2007a), а по крайней мере в последние годы своей жизни Борткевич был связан с существовавшими тогда в Берлине Русским научным институтом и Русским научным обществом (Шейнин 2001f, с. 228; Борткевич и Чупров 2005, с. 9 − 12).

Борткевич добился интересных результатов, и его пример особо поучителен, поскольку вначале он, можно сказать, не был математически грамотен: в 1896 г., в письме Чупрову, он заявил, что дифференцирование интеграла по его (нижнему) пределу незаконно (Шейнин 1990c/2010, с. 57). Следует также иметь в виду, что творчество Борткевича недостаточно известно, частично ввиду тяжеловесности его стиля и обилия деталей, частично ввиду того, что в то время немецкие статистики и экономисты (Борткевич был и серьёзным экономистом) чурались математики. Исправлять свой стиль, несмотря на критику

Чупрова (Борткевич и Чупров 2005, Письмо 35 1898 г.), он не стал, и Винклер (Winkler 1931, с. 1030) процитировал письмо Борткевича, который был рад узнать в нём одного из пяти (!) читателей своего сочинения 1923 – 1924 гг. об индексах. Даты письма Борткевича Винклер не указал. Вот мнение Андерсона (1932, с. 245/1963, т. 2, с. 533), ученика Чупрова и последнего представителя континентального направления статистики[2]:

*Борткевич не писал для широкого круга читателей* […] *и вовсе не был хорошим выразителем своих собственных идей. И он предъявлял к образованию и интеллекту своих читателей очень высокие требования. Частично ввиду своей уединённой жизни он упрямо отказывался последовать совету Чупрова*.

Но тот же Андерсон (там же, с. 243/531) высоко оценил успех Борткевича в исследовании статистических серий:

*Наше (младшее) поколение статистиков вряд ли может представить себе ту трясину, в которую попала статистическая теория после распада системы Кетле или выход из неё, который смогли отыскать только Лексис и Борткевич*.

Об их недостатках Андерсон ничего здесь не сказал, а позднее добавил к этим двум именам и Чупрова.

Многие авторы заслуженно хвалили его научные труды. Woytinsky (1961, с. 452 – 453) заметил, что его прозвали *Папой статистики*, а Schumacher (1931, с. 573) объяснил отношение Борткевича к науке цитатой из библии (Исход 20:3):

*Да не будет у тебя других богов пред лицом Моим*.

Заметим, что итальянские статьи 1908 – 1909 гг. Борткевича в защиту закона малых чисел (см. ниже), вообще забыты. Рукопись первой из них, написанная на немецком языке (**S, G,** 17), хранится в Университете г. Упсала, Швеция.

Борткевич определил E$Q$ и E$Q^2$, и Чупров несколько раз упоминал об этом (Шейнин 1990c/2010, с. 105, 113 и 172), а Марков в 1916 г. (Ондар 1977a, с. 96) посчитал его исследования *не вполне точными*, но *имеющими значение* и даже (1911c/1977, с. 166) заслуживающими *большого внимания*.

Свой закон малых чисел Борткевич (1898a) ввёл также для исследования устойчивости статистических рядов[3]. Он утверждал, что ряд, составленный из независимых наблюдений с различными вероятностями появления редкого события можно рассматривать как выборку из единой совокупности. Этот факт, или, точнее, убывание соответствующего коэффициента дисперсии к единице при убывании числа измерений, он и назвал законом малых чисел.

Борткевич оказался первым, кто после 60 лет забвения всерьёз обратил внимание на закон Пуассона, и в течение долгого времени его брошюра (1898a) оставалась в центре внимания статистиков. Так, Романовский (1924, кн. 17, с. 15) назвал это новшество *основным статистическим законом.*

С самого начала публикация Борткевича вызвала споры (Шейнин 1990c/2010, с. 58 – 64). Здесь мы повторим, что лишь Чупров рекомендовал ему сослаться на Пуассона, но что в 1909 – 1911 гг., в письмах Чупрову, Борткевич подчёркивал различие между своим законом и формулой Пуассона. Низкая вероятность, как он аргументировал, не является его основным допущением, поскольку редкое появление события может быть вызвано малым количеством наблюдений. Это объяснение, однако, ставит под сомнение применимость формулы закона Пуассона. Вообще же Борткевич так и не объяснил в достаточной мере свой закон. Вот что писал Чупров Маркову в 1916 г. (Письмо № 69a; Шейнин 1990c/2010, с. 111):

*В какой мере закон малых чисел пользуется признанием статистиков сказать трудно, так как неизвестно что, собственно, называть законом малых чисел. На вопросы, поставленные мной в примечании к стр. 398 второго издания* *Очерков* (1909) [с. 285 изд. 1959 г.], *Борткевич не отвечал ни в печати, ни письменно; допрашивать же его устно я не стал, так как он относится к критике закона м. чис. очень болезненно.*

Марков неоднократно обсуждал этот закон в своих письмах 1916 г. Чупрову (Ондар 1977a). Он указал, что Борткевич неверно объединял свои данные и (с. 111) *подбирал желательный для себя материал*[4] и что (с. 86 и 111) при малых числах коэффициент дисперсии не может быть большим. Последнее замечание Марков (1916b, с. 55) повторил публично. В 1916 г., отвечая Маркову, Чупров (Шейнин 1990c/2010, с. 110), видимо, не согласился с его первым утверждением и сообщил, что Ястремский (1913) также доказал замечание Маркова. Далее, Quine & Seneta (1987) более определённо указали, что для малых независимых и целочисленных случайных величин большое значение $Q$ маловероятно.

Но вот Колмогоров (1954) чётко заявил, что Борткевич лишь применил предельную теорему Пуассона, и мы (2008a) доказали это утверждение. Брошюра Борткевича (1898) написана прескверно, и понять её очень тяжело. Здесь мы ограничимся указанием, что изученный им коэффициент дисперсии *Q* не совпадал с лексисовским (о чём ни он, ни прежние комментаторы не сообщили). Чупров по всей видимости всё это понял, но по своей деликатности и ввиду дружбы с Борткевичем публично ничего не сказал. Русский перевод брошюры Борткевича см. в **S, G,** 18.

**16.1.3. А. А. Марков и А. А. Чупров.** В письмах Чупрову 1910 г. Марков (Ондар 1977a) доказал, что рассуждения Лексиса неверны; оказалось, например, что дисперсия может быть нормальной и при зависимых наблюдениях. Кроме того, он построил пример независимых испытаний, которые, при различных вариантах их объединения в серии, характеризовались либо сверх-, либо поднормальными дисперсиями. Впрочем, впоследствии Чупров, в письме своему ученику Н. С. Четверикову в 1923 г. (Шейнин 1990c/2010, с. 174), заметил, что устойчивость определяется лишь для конкретного ряда.

В том же 1910 г. Чупров, в письме Маркову, привёл примеры зависимостей, при которых дисперсия оказывалась сверх- и поднормальной, а в 1914 г. он даже решил, что коэффициент дисперсии следует *сдать в архив*, с чем никак не согласился Борткевич (Шейнин 1990c/2010, с. 175). Далее, в 1916 г. и Марков, и Чупров доказали, что $\mathrm{E}Q^2 = 1$ (подробности см. там же, с. 176) и, наконец, Чупров (1918 – 1919) окончательно развенчал коэффициент дисперсии (Шейнин 1990c/2010, с. 176 – 179). Мы, в частности, сослались на Андерсона (1926/1963, т. 1, с. 31): *От учения Лексиса мало что осталось после Чупрова*.

Мы не можем объяснить, почему уже в 1921 г. Чупров (2009b, с. 88), в письме К. Н. Гулькевичу (видному российскому дипломату и невозвращенцу, помощнику Ф. Нансена в Лиге Наций), сообщил, что только что выяснил несостоятельность коэффициента дисперсии:

*Одно из важнейших учений теории статистики, которое я доселе всецело принимал и исповедовал, − лексисова теория устойчивости статистических чисел, − оказывается, в значительной мере покоится на математическом недоразумении. Недоразумение это я сейчас вскрыл. Это вышибает один из устоев теории, остающейся в центральной своей части висеть в воздухе. Помириться на этом, не дав замены, мне не хочется. А подвести новый фундамент не удаётся: мои попытки разбиваются о то же самое возражение,* *и я почти что прихожу к выводу, что препятствие по существу непреодолимо*. […] *Так пока и верчусь*.

Впрочем, обо всём этом забыли. Так, Särndal (1971, с. 376 – 377), который кратко описал работы Лексиса и заметил, что они побудили Шарлье *заняться вопросами* [...] *анормальности данных*, не упомянул дальнейших исследований.

Но продолжаем. Чупров (1918 – 1919/1968, с. 142) совершенно элементарно вывел общую формулу для дисперсии

$$(1/n)\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\xi_i)^2\right) =$$

$$(1/n^2)\sum_{i=1}^{n}\ \mathrm{E}(\xi_i - \mathrm{E}\xi_i)^2 + (1/n^2)\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j\neq i}\ [\mathrm{E}(x_i x_j) - \mathrm{E}\xi_i\ \mathrm{E}\xi_j].$$

Здесь под знаками сумм находятся как угодно зависимые друг от друга случайные величины $\xi_i$ и результаты однократного наблюдения каждой из них $x_i$. Романовский (1923) опубликовал восторженную рецензию на эту работу, но не указал, что принятые Чупровым обозначения были слишком громоздки и затрудняли чтение. Отвратительным было введение двухэтажных индексов и сверху, и снизу в одном и том же выражении, которое таким образом оказалось пятиэтажным (Чупров 1923, с. 472).

Чупров частично отправлялся от своей рукописи (1916 или начало 1917). В ней он заново (см. выше) определил $\mathrm{E}Q^2$ и привёл качественные соображения о распределении коэффициента дисперсии. Чупров послал эту рукопись Маркову, и она упоминается или подразумевается в их переписке 1917 г. (Шейнин 1990с/2010, с. 114 – 122 и, возможно, Ондар 1977а, с. 118 и далее).

Добавим несколько слов о Чупрове. При изучении устойчивости статистических серий он добился весьма интересных результатов, например, ввёл понятие конечной переставляемости (Сенета 1987). С другой стороны, исследуя проблемы самого общего характера, он неизбежно выводил сложные формулы, и тот же Романовский (1930, с. 216) заметил, что, *представляя значительный теоретический интерес*, они *почти неприменимы* ввиду сложности вычислений. На следующей странице он указал, что оценка эмпирических коэффициентов корреляции по выборкам из произвольной совокупности возможна почти исключительно по формулам

Чупрова, которые, однако, крайне громоздки, неполны и мало изучены.

## 16.2. Биометрическая школа

Само это название указывает на журнал *Biometrika*, первый номер которого вышел в 1902 г. с подзаголовком *Журнал для статистического изучения биологических проблем*. Его первыми редакторами были Уэлдон (широко образованный биолог, умерший в 1906 г.), Пирсон и Давенпорт[5] при консультационном участии Гальтона, а в редакционной статье мы читаем там:

*Проблема эволюции является статистической проблемой.* […] [Дарвин основал] *теорию происхождения* [descent], *не прибегая к математическим идеям*[6] [но] *каждое его понятие, – вариация, естественный отбор,* [...], *– сразу же представляется приспособленным к математическому определению и требующим статистического анализа.* [...] *До сего времени области работы биологов, математиков и статистиков были значительно отделены друг от друга.* [...] *Придёт день,* [...] *когда некоторые математики станут полноправными биологами, а биологи – компетентными математиками*.

Много позже Пирсон (1923, с. 23) назвал Дарвина

*нашим избавителем, тем, кто придал новое значение нашей жизни и миру, в котором мы обитаем.*

Вот также выдержка из записки, которую Пирсон составил (и, видимо, распространил) в 1920 г. и которую процитировал его сын Э. Ш. Пирсон (E. S. Pearson 1936 – 1937, т. 29, с. 164): Цель биометрической школы состояла в том, чтобы

*преобразовать статистику в ветвь прикладной математики* [...], *обобщить, отбросить или обосновать скудные методы старой школы политических и социальных статистиков, и, в общем, преобразовать статистику Англии из спортплощадки для любителей и спорщиков в серьёзную отрасль науки.* [ ...] *Необходимо было критиковать несовершенные и часто ошибочные методы в медицине, антропологии* [антропометрии], *краниометрии, психологии, криминологии, биологии, социологии,* [...] *чтобы обеспечить эти науки новыми и более мощными средствами.*

Почти все перечисленные отрасли науки были в центре интересов Пирсона. И заметим ещё, что он не нашёл ни одного доброго слова в адрес статистиков вне Англии.

Вот характерное высказывание Пирсона (1907, с. 613):

*Я узнал по опыту общения с биологами, краниологами, метеорологами и врачами (которые иногда теперь приходят к биометрикам по ночам!), что первому любительскому внедрению современных статистических методов в устоявшуюся науку противостоит типичное презрение. Но я дожил до того времени, когда многие из них начали скрытно применять те самые методы, которые они вначале осуждали*.

Непосредственной причиной основания *Биометрики* быть может оказались научные трения между Пирсоном и Уэлдоном с одной стороны и биологами, которые как раз в то время открыли для себя Менделя. Соотнести биометрию и менделизм было трудно: первое течение изучало непрерывные величины, второе − дискретные изменения количественных признаков. Степень признания Пирсоном менделизма несколько спорна, но во всяком случае он (1904, с. 85 – 86) заявил, что

*В теории чистых гамет* [половые клетки] *нет ничего, существенно противоречащего основным чертам* […] *биометрического описания наследственности* …

Пирсон (E. S. Pearson 1936 – 1937, т. 29, с. 169 – 170) также заметил, что изучение социальных проблем с точки зрения менделизма велось поверхностно.

Быстрый успех новой школы был, конечно же, обусловлен упорным трудом её создателей, но также и усилиями их предшественника, Эджуорта. Его верную характеристику дал Чупров (1909/1959, с. 27 – 28). Талантливый статистик (и экономист), он был слишком оригинален и обладал причудливой манерой изложения и потому не смог сильно повлиять на своих современников. Но у себя на родине он по крайней мере подготовил почву для восприятия математико-статистических идей и методов. Недавно вышло собрание его сочинений в трех томах (Edgeworth 1996). См. также Schumpeter (1954/1955, с. 831) и M. G. Kendall (1968/1970, с. 262 – 263).

Быть может с самого начала основным редактором *Биометрики* оказался Пирсон, а среди его авторов были Чупров и Романовский[7]. Библиографию более 600 публикаций Пирсона см. Morant и др. (1939) и Merrington и др. (1983), а описание его жизни и трудов составил его сын (E. S. Pearson 1936 – 1937). Многие ранние статьи Пирсона перепечатаны в сборнике Pearson (1948), а его рукописи хранятся в University College London.

Почти неизвестны мысли Пирсона о физике, которой он занимался до 1893 г. Так (1891, с. 313; 1887, с. 114; Clifford

(1885/1886, с. 202)), во вселенной имеется *отрицательная материя*; *все атомы* […], *видимо, начали пульсировать в один и тот же момент*; силы, действующие в пространстве, обусловлены кривизной пространства. Римановых пространств Пирсон, однако, не упоминал, а кривизна пространства, как теперь считается, напротив вызвана силами, действующими в нём.

Пирсон (1857 – 1936) был прикладным математиком и философом, но в первую очередь со-основателем биометрии. Начало его научной деятельности можно связать с его *Грамматикой науки* (1892), которая заслужила ему клеймо *добросовестного и честного врага материализма* и *последовательного и ясного махиста*. Так выразился о нём Ленин в 1909 г. в своём *Материализме и эмпириокритицизме* (с. 190 и 274). Заметим, что последний термин равнозначен махизму, т. е. разновидности субъективного идеализма. Трудно, однако, поверить, что Пирсон уходил от реальности. Оговоримся: махизм определяет цель науки в описании явлений, а не в их изучении, и следует сказать, что Пирсон отрывал опыт (статистические данные) от теории (от соответствующей стохастической схемы)[8], см. § 16.2, но вряд ли можно назвать его продолжателем традиции государствоведения (§ 7.2.1).

Указанное сочинение Пирсона стало широко известно[9] и Ньюком, в качестве президента предстоявшего Международного конгресса гуманитарных и естественных наук 1904 г. в Сент-Луисе, пригласил его (к тому времени уже члена Королевского общества) прочесть доклад о методологии науки[10]. На этом конгрессе выступили такие учёные как Больцман и Каптейн. Об отношении Ньюкома к Пирсону свидетельствует и другое его высказывание 1903 г. (§ 11.8-4).

S. L. Zabell заметила, что Мах (Mach 1897, Введение) упомянул *Грамматику* Пирсона:

*Публикация* [*Грамматики*] *познакомила меня с исследователем, кантианские воззрения которого во всех важных пунктах совпадают с моими и который кроме того умеет откровенно и мужественно противостоять вненаучным тенденциям в науке*.

Упомянем ещё два факта из жизни Пирсона. В 1921 – 1933 гг. он читал особый курс лекций в University College, и в 1978 г. его сын, Э. Ш. Пирсон, издал их по сохранившимся записям автора и, видимо, сам придумал заглавие для книги: *История статистики*

*XVII и XVIII вв. на изменяющемся фоне интеллектуальной, научной и религиозной мысли*. Она была, пожалуй, первым серьёзным сочинением по своей теме после книги Тодхантера (1865), и на первой же её странице автор выразил сожаление, что так поздно заинтересовался историей статистики (см. наш Эпиграф).

Пирсон-младший написал предисловие к книге своего отца, в котором привёл свидетельства его интереса и к всеобщей истории. Но интереснее вспомнить фундаментальную биографию Гальтона (K. Pearson 1914 – 1930), быть может самого грандиозного когда-либо и где-либо опубликованного сочинения подобного рода. Истории теории вероятностей и математической статистики Пирсон посвятил и несколько статей; о трёх из них мы упоминали (§§ 3.2.3, 4.2.3 и 8.1-5), не согласившись с его основным выводом во втором случае. Ещё две (1920; 1928b) были посвящены истории теории корреляции, и в них Пирсон указал, что некоторые авторы, включая Гаусса, могли бы использовать в своей работе идеи и методы этой теории, но что начинать с них её историю всё-таки нельзя. Пирсон часто с успехом пытался внедрять статистический метод и особенно теорию корреляции во многие отрасли науки.

Исследования Пирсона частично лежат вне рамок нашего исследования, и мы лишь отметим основные направления его последующей (после примерно 1894 г.) работы. По выражению Хальда (1998, с. 651), он

*Между 1892 и 1911 гг.* [...] *создал своё собственное царство математической статистики и биометрики, беспрекословно господствуя в нем и ограждая его все расширяющиеся пределы от атак извне.*

Да, действительно, как раз к 1911 г. относится начало деятельности Фишера, который смог опубликовать в *Биометрике* лишь одну статью (в 1915 г.), но в конце концов намного превзошёл Пирсона, оказавшись основным автором возникновения математической статистики. Вот его весьма отрицательные отзывы о Пирсоне, которому Фишер так или иначе был несомненно обязан.

*Он был особо невосприимчив к современным успехам в своей области и часто враждебен по отношению к ним*. [Иначе же] *труды Эджуорта и Стьюдента, если назвать только двоих, были бы востребованы раньше* (письмо 1946 г., Edwards 1994, с. 100).

*Страшная слабость его* [Пирсона] *математической и научной работы происходила ввиду его неспособности к самокритике.* […] *В спорах, к которым он был весьма склонен, он постоянно выказывал отсутствие чувства справедливости* […] (Фишер 1956/1990, с. 3).

Наконец, Фишер (1937, с. 306) заявил, что одно утверждение Пирсона было *лишь оправданием фальсификации*. […]

Но были, разумеется, и весьма положительные отзывы о Пирсоне (Mahalanobis 1936; Eisenhart 1974), а об отношении Ньюкома к Пирсону см. § 11.8.4.

К основным заслугам Пирсона можно отнести разработку основ теории корреляции и сопряжённости признаков, введение в практику кривых Пирсона для описания эмпирических распределений, – а не для замены нормального распределения иным универсальным законом, как это имел в виду Ньюком, см. § 11.8.4, – и критерия хи-квадрат, а также составление многочисленных статистических таблиц. Свою систему кривых Пирсон (1896 с дополнительными исследованиями 1901 и 1916 гг.) построил в соответствии с практическими потребностями, недостаточно подкрепив её подходящими стохастическими схемами, как решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x-k}{a+bx+cx^2}\,y \qquad (16.4)$$

с четырьмя параметрами. При $b = c = 0$ оно, естественно, приводило к нормальному закону, в противном же случае ему соответствовали 12 иных типов кривых, по крайней мере часть из которых оказалась практически полезной. Параметры Пирсон предложил определять по методу моментов, – по четырём выборочным моментам соответствующего распределения. Напомним (§ 10А.2-4), что в теории вероятностей тот же термин применяется совсем в ином смысле. “Статистический” метод моментов удобен, но вычисляемые с его помощью оценки параметров часто имеют асимптотическую эффективность намного меньшую единицы (Крамер 1946, § 33.1)[11].

Бернштейн (1946, с. 448 – 457) указал стохастическую схему (выборка по схеме прикладываемых шаров), которая приводит к важнейшим типам кривых Пирсона. Он сослался на Маркова и, на с. 337, на Полиа (Polya 1931) как на своих предшественников. Марков (1917) действительно рассматривал ту же схему и на первой же странице упомянул кривые Пирсона, однако Бернштейн ошибочно указал другую статью Маркова.

Пирсон придавал особое значение понятию корреляции и заявил (E. S. Pearson 1936 – 1937, т. 29, с. 208 со ссылкой на свою запись лекций отца), что

*Цель математической теории статистики – обработка соотношения между двумя или более переменными величинами без предположения, что одна из них является однозначной математической функцией остальных.*

Распределение хи-квадрат вывел Аббе, а затем Гельмерт для выявления систематических влияний в теории ошибок (§ 10Б-1), К. Пирсон (1900) же предложил критерий хи-квадрат в контексте математической статистики. Не сразу, правда, он начал пользоваться им для проверки добротности подбора кривых к эмпирическим точкам; независимости признаков в таблицах сопряжённости; принадлежности двух независимых выборок к единой совокупности. Несмотря на свою значимость, этот критерий вряд ли, как утверждал Фишер в 1922 г. (Хальд 1998, с. 714), делает эмпиризм безопасным.

Мы (§ 15.1-4) заметили, что континентальные статистики не воспринимали Пирсона; см. также Ондар (1977b, с. 157), который процитировал аналогичное утверждение Чупрова. Многие коллеги, писал Чупров, *подобно Маркову, ставят английские исследования в шкаф нечитанными*. Суть неприязни состояла в эмпиризме биометрической школы (Чупров 1918 – 1919/1968, с. 223):

*Много бед натворило присущее английским исследователям нежелание иметь дело с понятиями вероятности и математического ожидания* [в пользу эмпирических показателей. Этот] *отказ чрезвычайно повредил ясности* [...] *и даже наводил на ложный путь* [...]

*Если же сбросить этот наряд* [...] *и дополнить упущенное* [...], *то станет ясно* [родство между Лексисом и Пирсоном]. *Не Лексис против Пирсона, а Пирсон в свете Лексиса, Лексис, обогащённый Пирсоном, – так должен был бы гласить лозунг тех, кто не удовлетворён бездушным эмпиризмом ...*

На смешение теоретических и эмпирических показателей у Пирсона указал и Fisher (1922, с. 311 и 329, прим.). Можно было бы привести и аналогичные высказывания Андерсона (Шейнин 1990c/2010, с. 189), но мы ограничимся цитированием Колмогорова (1947, с. 63 и 64; 1948, с. 143) и Бернштейна

(1928/1964, с. 228); о высказываниях других учёных см. Шейнин (2010).

1. *Современный этап развития математической статистики начался с фундаментальных работ* [...] (*К. Пирсон, Стьюдент, Фишер*). [...] *Применения теории вероятностей* [...] *превратились в общую теорию статистической проверки вероятностных гипотез* [...] *и статистической оценки параметров* [...].

2. *Исследования основоположника английской современной математической статистики Фишера были не безупречны в логическом отношении.* [...] *Справедливая критика* [его *логических неясностей*] *привела многих учёных (у нас, С. Н. Бернштейна) к полному отрицанию самого направления* [его] *исследований*.

3. *Оставались на уровне XVIII в. представления о логической структуре теории вероятностей.* [...] *Строгие результаты относительно близости эмпирических выборочных характеристик к теоретическим относились только к случаю независимых испытаний,* [...] *вспомогательный аппарат таблиц, употребляемых при статистическом исследовании, несмотря на огромную* [...] *работу,* [...] *оказался весьма несовершенным в отношении охвата переходных от* <u>*малых*</u> *к* <u>*большим*</u> *выборкам случаев*.

4. *Пирсон произвёл огромную организационно-статистическую работу и имеет также большие теоретические заслуги, в особенности потому, что он ввёл целый ряд новых понятий и открыл практически важные пути научных исследований. Обоснование и критика идей Пирсона являются одной из центральных проблем современной математической статистики, в разработке которой достигли значительных успехов, например, Шарлье и Чупров ...*

Два слова о Стьюденте (Госсет); о Юле см. M. G. Kendall (1951). Не принадлежа к биометрической школе, Стьюдент (Irwin 1978, с. 409) был

*Одним из пионеров развития современного статистического метода и его приложения к планированию и исследованию экспериментов.*

Фишер (там же, с. 410) назвал его *Фарадеем статистики*, поскольку его интуиция была сильнее его математики. См. сборник его трудов (1942) и E. S. Pearson (1990). Заметим, что известное *t*-распределение Стьюдента впервые появилось у немецкого математика Люрота (Pfanzagl & Sheynin 1996).

## 16.3. Объединение континентального направления и биометрической школы?

Так произошло ли объединение двух течений статистики, за которое ратовал Чупров? В 1923 г. Чупров стал почётным членом лондонского Королевского статистического общества, а после его смерти в 1926 г. оно приняло резолюцию соболезнования (Шейнин 1990с/2010, с. 198), в которой признавалась его роль в *согласовании методов исследования*, применяемых в Англии и на континенте.

О лишь частично успешных усилиях Чупрова и тщетных попытках Слуцкого примирить Маркова с работами Пирсона мы уже упоминали (§ 15.1-4). И вот Бауер (1955/1968, с. 226) сообщил, что по инициативе Андерсона исследовал, как применяется дисперсионный анализ в каждой из двух школ, и пришёл к выводу (с. 238), что их работы идут рядом, но не смыкаются. И это было написано в 1955 г.! Более подробно о статье Бауере см. Heyde & Seneta (1977, с. 57 – 58), где также справедливо указано, что, в противоположность биометрической школе, *Континентальные* статистики предпочитали исследовать непараметрические методы.

Мы сами (Гнеденко и Шейнин 1978, с. 235) указывали, что математическая статистика[12] по-настоящему родилась как слияние этих школ, и даже сейчас представляется, что это утверждение вовсе не было оригинальным (но сослаться ни на кого не можем). Но мы хотели бы уточнить: по крайней мере в описываемый нами период английские статистики все-таки продолжали работать обособленно от континентальных учёных. Э. Ш. Пирсон, в обширном исследовании трудов своего отца (E. S. Pearson 1936 – 1937), не посвятил этой теме ни единого слова, и то же можно сказать о других комментаторах Пирсона. Есть только признание Пирсона (см. наш Эпиграф) в пренебрежении историей статистики.

Мы полагаем, что английские (а затем американские) статистики в основном лишь случайно узнавали о предшествующих достижениях континентальных статистиков. Более того: нынешние англоязычные специалисты также склонны ориентироваться только на своих предшественников. Даже Хальд (1998), которого, впрочем, во многом извинял его преклонный возраст, назвал свою книгу *История математической* *статистики*, но почти полностью упустил Континентальную школу.

В 2001 г. журнал *Биометрика* (т. 88) опубликовал пять обзорных статей, посвящённых своему столетию, но ни в одной из них не было сказано ни слова о Континентальном направлении, ни одна не упомянула Чупрова. Уместно добавить, что Крамер (1946/1948, с. 9) поставил целью своей монографии объединить статистические исследования английской и американской школы (и в первую очередь – работы Фишера) с новой, чисто математической теорией вероятностей, созданной *главным образом* трудами французских и русских математиков.

В 1919 г. в *Биометрике* появилась редакционная статья с примечательным названием *Повинились*. Её автор (Пирсон) исправил допущенные им на протяжении нескольких лет фактические и методологические ошибки, в основном обнаруженные Чупровым (Шейнин 1990c/2010, с. 86), но не воспользовался случаем, чтобы сблизиться с континентальными статистиками.

## Примечания

**1.** Статья Борткевича появилась в русском эмигрантском журнале, который мы нашли в отделе редких книг Росс. гос. библиотеки. Несколько других экземпляров того же издания из числа хранящихся в Германии не содержат этой статьи, и мы можем объяснить это лишь тем, что она попала только в часть тиража.

**2.** Оскар Николаевич Андерсон (1887 – 1960), российский немец, эмигрировал в 1920 г. В 1924 – 1942 гг. жил и работал в Болгарии, затем в Германии (в Западной Германии), был ведущим статистиком этих двух стран. См. Шейнин (1990c/2010, с. 94 – 98), H. & R. Strecker (2001) и собрание его сочинений (Anderson 1963).

**3.** В 1897 г. Борткевичу не удалось дополнительно опубликовать свою работу на русском языке, в издании Петербургской академии наук; этому воспрепятствовало её предстоявшее появление на немецком языке (Шейнин 1990c/2010, с. 61 − 62).

**4.** Это обвинение не доказано; к тому же, оно противоречит всем представлениям о личности Борткевича.

**5.** Автор статьи 1896 г., книги биометрического направления 1899 г. и двух последующих заметок (M. G. Kendall & Doig 1968).

**6.** Уже во времена Дарвина установление теории предполагало ее количественное подтверждение, которого у него и в помине не было. *Гипотеза* происхождения видов, как мы её назвали в § 11.8.2, было бы правильней.

**7.** В 1912 г. Слуцкий предложил Пирсону две рукописи для публикации, ни одну из которых тот не принял. Сохранились три письма Слуцкого (1912b) Пирсону (Univ. College London, Pearson Papers 856/4 и 856/7; Шейнин 1999c, с. 229 – 236), но не ответы на них. По поводу этого эпизода Слуцкий советовался с Чупровым (Шейнин 1990c/2010, с. 70 − 71) и вскоре опубликовал одну из своих рукописей (1914), – ту, относительно которой он назвал отказ Пирсона недоразумением.

**8.** В резкой форме возразил против этого Борткевич в своей полемической статье (1915).

**9.** Вот примечательное воспоминание Неймана, которым он поделился с Э. Ш. Пирсоном (E. S. Pearson 1936, с. 213): в 1916 г. он прочёл *Грамматику науки* по рекомендации С. Н. Бернштейна, своего учителя по Харьковскому университету, и книга произвела *на нас* громадное впечатление. Там же (1892, с. 15) мы находим известнейшее утверждение Пирсона: *Единство всей науки состоит лишь в её методе, а не материале*. *Вся* наука действительно не имеет общего материала, но не думал ли Пирсон и об её отдельных отраслях?

Заметим, что и Пирсон (1978, с. 243) в свою очередь высказался о Ленине: Петроград *по какой-то непостижимой причине ныне назван по имени человека, который практически погубил его*.

В Советском Союзе, как нетрудно догадаться, Пирсона встретили в штыки. Эта тема выходит за хронологические рамки нашего исследования, и мы опишем лишь два эпизода (Шейнин 1998c/2001, с. 183 и 194, прим. 23) и вспомним Шлёцера (Schlözer 1804, p. 51): *статистика и деспотизм несовместимы*.

1) Мария Смит, 1930 г., будущая член-корреспондент Академии наук: система кривых Пирсона неприемлема главным образом потому, что в её основе

*лежит фетишизм числа и* [...] *классификация их построена только математически. Хотя Пирсон не так свирепо хочет подчинить весь реальный мир одной единой кривой распределения, как это делал Гаус* [так в ее тексте] [...]*, но его система покоится все же только на математической базе, на которой вообще нельзя изучать конкретный мир*.

2) А. Я. Боярский и Л. Цырлин, в 1947 г. кощунственно обвинили Пирсона в проповедовании расистских идей, *опередивших ведомство Геббельса*. Лишь несколько сдержаннее высказался о Пирсоне анонимный автор в БСЭ (2-е изд., т. 33, 1955, с. 85).

Советская статистика и советские статистики немало вынесли и вне зависимости от Пирсона. Та же Смит удовлетворённо и безграмотно заметила в 1931 г., что *ряды арестованных вредителей полны статистиками* (наша статья, упомянутая выше, с. 193, прим. 5).

**10.** Пирсон отказался, указав на свои финансовые затруднения и нежелание оставлять без должного руководства свой факультет [в лондонском Univ. College] (Шейнин 2002b, с. 143 и 163, прим. 8).

**11.** Вот выдержка из сохранившейся части письма без подписи и даты (Шейнин 1999c, с. 132), наверняка написанного Слуцким Маркову, по всей видимости в 1912 г.:

*... не независимы по своей величине от суммы уже накопившихся отклонений или что вероятности равных отклонений не постоянны, то мы и придём к формуле ...* [Слуцкий выписал формулу (16.4) с $k = 0$ и с функцией $F(x)$ вместо трёхчлена в знаменателе. Уже] *накопилось много материала*, [который доказывает пользу кривых Пирсона], *однако желателен и теоретический вывод, чтобы поставить* [их] *в один ряд с кривой Гаусса.*

**12.** Многие специалисты предпочитают термин *теоретическая* *статистика*, однако между двумя понятиями существует определённое различие: важный этап статистических исследований, а именно предварительное исследование данных, изучает только теоретическая статистика. Мы упоминали об этом в §§ 3.1.4 и 11.5. См. Шейнин (1999а, с. 707 – 708).

# 17. Аксиоматизация.
# Библиографический обзор

Основными источниками по аксиоматизации теории вероятностей можно считать Barone & Novikoff (1978) и Hochkirchen (1999), кроме которых назовём и Бернштейна (1917).

После Гильберта (Hilbert 1901) решительный шаг сделал Колмогоров (1933), и Freudenthal & Steiner (1966, с. 190) сравнили его достижение с решением задачи о *Колумбовом яйце* (надломив, можно поставить его стоймя). Из новых имён назовём Хаусдорфа (Hausdorff 2006), который оставил важные неопубликованные сочинения, см. Girlich (1996), а также Shafer & Vovk (2001) и Krengel (2011), который подчеркнул роль Больмана. Vovk & Shafer (2003,с. 27) охарактеризовали свою книгу:

*Мы показываем, как классическая суть теории вероятностей может быть непосредственно основана на мартингалах теории игр без всякого обращения к теории мер. Вероятность снова оказывается вторичным понятием, но теперь она определяется в терминах мартингалов*.

В заключение мы цитируем Буля (1854a/1952, с. 288), который первым заявил о необходимости аксиоматизации теории вероятностей:

*Притязания* [теории вероятностей] *принадлежать чистой науке должны основываться на степени, в которой она удовлетворяет следующим условиям. Первое, принципы, на которых основаны её методы, должны быть по своей сути аксиоматическими.*

Буль указал ещё два общенаучных условия. О его работе в теории вероятностей см. Halperin (1976), который, однако, не рассматривает аксиоматизацию.

## Библиография

В общий список включено большое число наших статей и книг; за исключением книги Чупров (1990/2010) все они были напечатаны в 20 – 25 экземплярах, но, как и некоторые, не попавшие в общий список, скачиваемы с нашего сайта www.sheynin.de Он тщательно копируется: Google, Oscar Sheynin, Home. Там же читатель найдёт ряд *Хрестоматий* (сборников переводов классических сочинений и позднейших, часто малоизвестных статей) и *Статей* (сборников переводов наших статей и наших неопубликованных работ). Всё вместе представляет собой уникальное собрание источников по нашей теме.

*Сокращения*

| | | |
|---|---|---|
| Б.м., б.г. | = | Без места, без года |
| ВИЕТ | = | *Вопросы истории естествознания и техники* |
| ИМИ | = | *Историко-математич. исследования* |
| Л | = | Ленинград |
| М | = | Москва |
| МС | = | *Математич. сб.* |
| Пг | = | Петроград |
| УМН | = | *Успехи математич. наук* |
| AHES | = | *Arch. Hist. Ex. Sci.* |
| *Hist. Scient* | = | *Historia Scientiarum* (Tokyo) |
| ISI | = | *Intern. Stat. Inst.* |
| ISR | = | *Intern. Stat. Rev.* |
| *JNÖS* | = | *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Stat.* |
| OC | = | *Oeuvr. Compl.* |
| W/Erg-i | = | *Werke*, Ergänzungsreihe, Bd. i |
| W-i | | *Werke*, Bd. i |

**Ал-Хазини** (1983), Книга весов мудрости. *Научн. Наследство*, т. 6, с. 15 – 140.
**Амбарцумян Р. В.** (1999), Стохастическая геометрия. В книге Прохоров (1999b, с. 682).
**Андерсон О.Н, Anderson O.** (1926, болг.), Zum Gedächtnis an Professor A. A. Tschuprow (Junior). В книге автора (1963, Bd. 1, pp. 28 – 38).
--- (1932), Ladislaus von Bortkiewicz. *Z. f. Nationalökonomie*, Bd. 3, pp. 242 – 250. Там же, Bd. 2, pp. 530 – 538.
**---** (1946), [Автобиография]. Archiv Ludwig-Maximilians-Univ. München, II-734.
**---** (1963), *Ausgewählte Schriften*, Bde 1 – 2. Tübingen.
**Андреев А. В.** (1999), Теоретические основы доверия (штрихи к портрету П. А. Некрасова). ИМИ, вып. 4 (39), с. 98 – 113.
**Аноним** (1910), Священный Синод и Толстой. Газета *Речь*, 8 ноября, с. 3.
**Аноним** (1954), Обзор научного совещания по вопросам статистики. *Вестник статистики*, № 5, с. 39 – 95. О докладе А. Н. Колмогорова см. с. 46 – 47.
**Аристотель.** Многие его сочинения были в разное время переведены на русский язык. Нумерация его строк в нашем тексте соответствует английскому собранию его сочинений (11 томов, 1908 – 1930 и т. 12, 1954). В 1984 г. оно было переиздано в двух томах с дополнениями, сокращением примечаний и некоторыми изменениями. Несколько сочинений, вошедших в эти издания,

возможно, не принадлежат Аристотелю.
**Бауер Р. К.** (1955, нем.), Теория дисперсии Лексиса в её отношениях к новым течениям статистической методологии, в особенности к анализу рассеяния. В книге Четвериков (1968, с. 225 – 238).
**Безикович А. С.** (1924), Биографический очерк [А. А. Маркова]. В книге Марков А. А. (1924, с. III – XIV).
**Бернштейн С. Н.** (1917), Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей. В книге автора (1964, с. 10 – 60).
**---** (1926, франц.), Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин. Там же, с. 121 – 176.
--- (1928), Современное состояние теории вероятностей и ее приложений. Там же, с. 217 – 232.
--- (1940), Петербургская школа теории вероятностей. *Уч. зап. Ленинградск. гос. унив.* № 55 (сер. математич. наук № 10), с. 3 – 11.
--- (1945), О работах П. Л. Чебышева по теории вероятностей. В книге автора (1964, с. 409 – 433).
--- (1946), *Теория вероятностей.* М. – Л., 4-е изд.
--- (1947), Чебышев, его влияние на развитие математики. *Уч. Зап. МГУ*, № 91, с. 35 – 45.
--- (1964), *Собрание сочинений*, т. 4. М.
**Бируни А. Р., Al-Biruni, Alberuni** (1887), *India.* Delhi, 1964. [*Индия. Избр. Произв.*, т. 3. Ташкент, 1966.]
--- (1934), *The Book of Instruction in the Elements of the Art of Astrology*. London.
--- (1963), *Определение границ мест для уточнения расстояний между населёнными пунктами*. *Избр. Произв.*, т. 2. Ташкент.
--- (1983), Об отношениях между металлами и драгоценными камнями по объёму. В сборнике *Научное наследство*, т. 6. М., с. 141 – 160.
**Борткевич В. И., Bortkiewicz L. von** (1889), К вопросу о русской смертности. *Врач*, т. 10, с. 1053 – 1056.
--- (1894 – 1896, нем.), Критическое рассмотрение некоторых вопросов теоретической статистики. В книге Четвериков (1968, с. 55 – 137).
--- (1898a), *Das Gesetz der kleinen Zahlen.* Leipzig. **S, G,** 18.
--- (1898b), Das Problem der Russischen Sterblichkeit. *Allg. stat. Archiv*, Bd. 5, pp. 175 – 190, 381 – 382.
--- (1903), Теория вероятностей и борьба с крамолой. *Освобождение*, кн. 1. Штутгарт, с. 212 – 219. Перепечатано, частично в англ. переводе, в книге Некрасов (2004, pp. 109 – 124). **S, G,** 4.
--- (1904), Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik. *Enc. math. Wiss.*, Bd. 1, pp. 821 – 851.
--- (1915), Realismus und Formalismus in der mathematischen Statistik. *Allg. stat. Archiv*, Bd. 9, pp. 225 – 256.
--- (1917), *Die Iterationen*. Berlin.
--- (1923), Wahrscheinlichkeit und statistische Forschung nach Keynes. *Nord. Stat. Tidskr.*, Bd. 2, pp. 1 – 23. **S, G,** 18.
--- (1930), Lexis und Dormoy. *Nordic Stat. J.*, vol. 2, pp. 37 – 54. **S, G,** 95.
**Борткевич В. И., Чупров А. А.** (2005), *Переписка* (*1895 – 1926*). Берлин. **S, G,** 9.
**Буняковский В. Я.** (1836), Определение вероятности, что уравнение второй степени с целыми коэффициентами, взятое наудачу, имеет корни

вещественные. *Mém. Imp. Acad. Sci. St. Pétersb.,* 6me sér., Sci. math., phys. et natur., t. 3 (Sci. math. et phys., t. 1), No. 4, pp. 341 – 351.
--- (1836 – 1837), О приложении анализа вероятностей к определению приближенных величин трансцендентных чисел. Там же, с. 457 – 467 и № 5, с. 517 – 526.
--- (1846), *Основания математической теории вероятностей*. СПб. В книге Прохоров (1999) из этого источника перепечатаны: *От сочинителя*; *Заключение*; глава *Краткий исторический очерк постепенного развития математической теории вероятностей*; и, в сокращении, *Подробное содержание книги*.
--- (1847), О возможности введения определительных мер доверия к результатам некоторых наук … *Современник*, т. 3, отдел Науки и художества, с. 36 – 49.
--- (1850), Sur une application curieuse de l'analyse des probabilités. *Mém. Imp. Acad. Sci. St. Pétersb.*, 6me sér., Sci. math., phys. et natur., t. 6 (Sci. math. et phys., t. 4), No. 3, pp. 233 – 258.
--- (1866a), Опыт о законах смертности в России и о распределении православного населения по возрастам. *Зап. Имп. АН*, т. 8, Прил. 6.
--- (1866b), Таблицы смертности и народонаселения, вычисленные для России. *Месяцеслов* на 1867 год. Прил., с. 3 – 53. СПб.
--- (1867), О суммовании численных таблиц по приближению. *Зап. Имп. АН*, т. 12, Прил. 7.
--- (1868), Несколько замечаний о законах движения народонаселения в России. *Русск. Вестник,* т. 73, с. 5 – 20.
--- (1871), О соединениях особенного рода, встречающихся в вопросе о дефектах. *Зап. Имп. АН*, т. 20, Прил. 2.
--- (1874), Антропобиологические исследования. Там же, т. 23, Прил. 5.
--- (1875a), Об одном вопросе, относящемся к разложению чисел на части. Там же, т. 25, Прил. 1.
--- (1875b), О вероятной численности контингентов русской армии в 1883, 1884 и 1885 гг. Там же, Прил. 7.
--- (1876), О самосчётах и о новом их применении. Там же, т. 27, Прил. 4.
--- (1880), О наибольших величинах в вопросах, относящихся к нравственной выгоде. Там же, т. 36, Прил. 1.
**Буров В. Г., Вяткин Р. В., Титаренко М. А.,** редакторы (1972 – 1973), *Древнекитайская философия*, тт. 1 – 2. М.
**Бэр К., Baer, K.** (1860 – 1875), *Исследования о состоянии рыболовства в России,* тт. 1 – 9. СПб.
--- (1873), *Zum Streit über den Darwinismus.* Dorpat [Tartu].
**Васильев А. В.** (1885), *Теория вероятностей.* Казань. Литография.
**---** (1921), *Математика*, вып. 1. Пг.
**Вовк В. Г., Шафер Г. Р.** (2005), Вклад А. Н. Колмогорова в основания теории вероятностей. *Проблемы передачи информации*, т. 39, с. 24 – 35.
**Гильберт Д.** (1901, нем.), *Проблемы Гильберта*. М., 1969.
**Гнеденко Б. В.** (1950), *Курс теории вероятностей*. М. Несколько последующих изданий.
--- (1951), О работах М. В. Остроградского в теории вероятностей. ИМИ, т. 4, с. 99 – 123.
--- (1958), Main stages in the history of the theory of probability. *Actes VIIIe*

*Congrès Hist. Sci. 1956*. Б.м., 1958, vol. 1, pp. 128 – 131.
--- (1959), О работах А. М. Ляпунова по теории вероятностей. ИМИ, вып. 12, с. 135 – 160.
**Гнеденко Б. В., Гихман И. И.** (1956), Развитие теории вероятностей на Украине. ИМИ, вып. 9, с. 477 – 536.
**Гнеденко Б. В., Шейнин О. Б.** (1978). См. Шейнин (1978a).
**Гордевский Д. З.** (1955), *К. А. Андреев.* Харьков.
**Гродзенский С. Я.** (1987), *А. А. Марков.* М.
**Гусак А. А.** (1961), Предыстория и начало развития теории приближения функций. ИМИ, вып. 14, с. 289 – 348.
**Давидов А. Ю. [**1854a], *Лекции математической теории вероятностей.* Б.м., б.г.
--- (1854b), Приложение теории вероятностей к медицине. *Моск. врачебный журнал*, отдел 1, с. 54 – 91.
--- (1857), Теория средних величин с приложением ее к составлению таблиц смертности. В сборнике *Речи и отчет, произнесенные в торжеств. собр. Моск. унив.* М., первая пагинация.
--- [1885], *Теория вероятностей, 1884 – 1885.* Б. м., б. г.
--- (1886), О смертности в России. *Изв. Имп. Общ. любителей естествознания, антропологии и этнографии*, т. 49, № 1, с. 46 – 66.
**Данилевский, Н. Я.** (1885), *Дарвинизм*, т. 1, ч. 1 – 2. СПб.
**Доклад** (1916), Доклад комиссии по обсуждению некоторых вопросов, касающихся преподавания математики в средней школе. *Изв. Акад. Наук*, шестая сер., т. 10, № 2, с. 66 – 80. Шесть авторов.
**Дорфман Я. Г.** (1974), *Всемирная история физики.* М.
**Емелях Л. И.** (1954), Дело об отлучении от церкви академика А. А. Маркова. *Вопр. истории религии и атеизма*, вып. 2, с. 397 – 411.
**Енько П. Д.** (1889), О ходе эпидемий некоторых заразительных болезней. *Врач*, с. 1008 – 1010, 1039 – 1043, 1061 – 1063.
**Ермолаева Н. С.** (1987), Об одном неопубликованном курсе теории вероятностей П. Л. Чебышева. ВИЕТ, № 4, с. 106 – 112.
--- (2009), Метод наименьших квадратов в письме А. А. Маркова Б. М. Кояловичу. ИМИ, вып. 13 (48), с. 89 – 110.
***Журналы*** (1906), *Журналы заседаний Совета С.-Петербургского университета* № 61 за 1905 г.
**Закатов П. С.** (1950), *Курс высшей геодезии.* М. Последующие изд.: 1953, 1964.
**Идельсон Н. И.** (1947), *Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений.* М.
**Кауфман А. А.** (1922), *Теория и методы статистики.* М. 4-е изд. Пятое, посмертное изд.: М., 1928.
**Кеппен В., Köppen W.** (1874), Über die Abhängigkeit des klimatischen Characters der Winde von ihren Ursprünge. *Repert. Met*, Bd. 4, No. 4, pp. 1 – 15.
--- (1875), О наблюдениях периодических явлений в природе. *Зап. Русск. географич. общ. по общей географии*, т. 6, № 1, с. 255 – 276.
**Колмогоров А. Н.** (1931), Метод медианы в теории ошибок. МС, т. 38, № 3 – 4, с. 47 – 49.
--- (1933, нем.), *Основные понятия теории вероятностей*. М., 1933, 1974.
--- (1946), К обоснованию метода наименьших квадратов. УМН, т. 1. с. 57 – 71.

--- (1947), Роль русской науки в развитии теории вероятностей. *Уч. зап. МГУ*, № 91, с. 53 – 64.
--- (1948), Е. Е. Слуцкий. УМН, т. 3, № 4, с. 143 – 151.
--- (1954), Малых чисел закон. БСЭ, второе изд., т. 26, с. 169. Опубл. анонимно.
--- (1983 англ.), О логических основаниях теории вероятностей. В книге автора *Теория вероятностей и математическая статистика*. М., 1986, с. 467 – 471.
**Колмогоров А. Н., Петров А. А., Смирнов Ю. М.** (1947), Одна формула Гаусса из теории метода наименьших квадратов. *Изв. АН СССР*, сер. математич., т. 11, с. 561 – 566.
**Колмогоров А. Н., Прохоров Ю. В.** (1974), Математическая статистика. БСЭ, 3-е изд., т. 15, с. 480 – 484.
**Коялович Б. М.** (1893 – 1909), Четыре письма А. А. Маркову. Архив Росс. АН, фонд 173, опись 1, 10, №№ 1 и 8; 149; 14. См. также Ермолаева (2009) и Шейнин (2006b/2009).
**Крамер Г.** (1946, англ.), *Математические методы статистики*. М., 1948.
--- (1976, англ.), *Полвека с теорией вероятностей: наброски воспоминаний*. М., 1979.
**Крейн М. Г.** (1951), Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. УМН, т. 6, № 4, с. 3 – 120.
**Крылов А. Н.** (1950), *Лекции о приближенных вычислениях*. М.
**Кузьмин Р.** (1928), Об одной задаче Гаусса. *Докл. АН СССР*, сер. А, № 18 – 19, с. 375 – 380.
**Леман Э.** (1959, англ.), *Проверка статистических гипотез*. М., 1979.
**Линник Ю. В.** (1951), Комментарий к статье Марков (1916а). В книге Марков (1951, с. 668 – 670).
--- (1952), Замечания по поводу классического вывода закона Максвелла. *Докл. АН СССР*, т. 85, с. 1251 – 1254.
**---** (1958), *Метод наименьших квадратов и основы статистической теории обработки наблюдений*. М. [М., 1962]
**Линник Ю. В., Сапогов Н. А., Тимофеев В. Н.** (1951), Очерк работ А. А. Маркова по теории чисел и теории вероятностей. В книге Марков (1951, с. 614 – 640).
**Ляпунов А. М.** (1895), П. Л. Чебышев. В книге Чебышев П. Л. *Избр. математич. тр.* М. – Л., 1946, с. 9 – 21.
**---** (1900, франц.), Об одной теореме теории вероятностей. В книге автора (1954, с. 125 – 151).
--- (1901а, франц.), Новая форма теоремы о пределе вероятности. Там же, с. 157 – 176.
--- (1901b), Ответ П. А. Некрасову. *Зап. Харьк. унив.*, т. 3, с. 51 – 63.
--- (1954), *Собрание сочинений*, т. 1. М.
**Майстров Л. Е.** (1967), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. М.
**Мальцев А. И.** (1947), Замечание к работе А. Н. Колмогорова и др. *Изв. АН СССР*, сер. математич., т. 11, с. 567 – 578.
**Марков А. А. младший** (1951), Биография А. А. Маркова [старшего]. В книге Марков (1951, с. 599 – 613).
**Марков А. А., старший** (1884), Доказательство некоторых неравенств П. Л. Чебышева. В книге автора *Избр. труды по теории непрерывных дробей*... М. – Л., 1948, с. 15 – 24.

--- (1888), *Table des valeurs de l'intégrale* …СПб.
--- (1898, франц.), О корнях уравнения ... В книге автора (1951, с. 255 – 269).
--- (1899a), Закон больших чисел и способ наименьших квадратов. Там же, с. 231 – 251.
--- (1899b), Приложение непрерывных дробей к вычислению вероятностей. *Изв. Физ.-математич. общ. Казанск. унив.*, 2-я сер., т. 9, № 2, с. 29 – 34.
--- (1899c), Ответ [П. А. Некрасову]. Там же, № 3, с. 41 – 43.
--- (1900a), [Руководство] *Исчисление вероятностей.* СПб. Последующие издания: 1908, 1913 и посмертное 1924 г. Немецкий перевод: Лейпциг – Берлин, 1912.
--- (1900b), О вероятности a posteriori. *Сообщ. Харьковск. математич. общ.*, 2-я сер., т. 7, № 1, с. 23 – 25.
--- (1906c), Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга. В книге автора (1951, с. 339 – 361).
--- (1907), О некоторых случаях теорем о пределе математического ожидания и о пределе вероятности. *Изв. Имп. Акад. Наук*, 6-я сер., т. 1, с. 707 – 714.
--- (1908a), О некоторых случаях теоремы о пределе вероятности. Там же, т. 2, с. 483 – 496.
--- (1908b), Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь. В книге автора (1951, с. 363 – 397).
--- (1910), Исследование общего случая испытаний, связанных в цепь. Там же, с. 465 – 507.
--- (1911a), О связанных величинах, не образующих настоящей цепи. Там же, с. 399 – 416.
--- (1911b), Об одном случае испытаний, связанных в сложную цепь. Там же, с. 417 – 436.
--- (1911c), Об основных положениях исчисления вероятностей и о законе больших чисел. В книге Ондар (1977a, с. 161 – 166).
--- (1912a), Об испытаниях, связанных в цепь не наблюдаемыми событиями. В книге автора (1951, с. 437 – 463).
--- (1912b), Отповедь П. А. Некрасову. МС, т. 28, с. 215 – 227.
--- (1913), Пример статистического исследования над текстом "Евгения Онегина", иллюстрирующий связь испытаний в цепь. *Изв. Имп. Акад. Наук*, 6-я сер., т. 7, с. 153 – 162.
--- (1914a), О вероятности a posteriori. Вторая заметка. *Сообщ. Харьковск. математич. общ.*, 2-я сер., т. 14, № 3, с. 105 – 112.
--- (1914b), Двухсотлетие закона больших чисел. В книге Бернулли Я. (1713/1986, с. 9 – 16).
--- (1915a), О проекте П. С. Флорова и П. А. Некрасова преподавания теории вероятностей в средней школе. *Ж. Мин. народн. просв.*, нов. сер., т. 57, май, с. 26 – 34 раздела Современная летопись.
--- (1915b), Об одной задаче Лапласа. В книге автора (1951, с. 549 – 571).
--- (1916a), О коэффициенте дисперсии. Там же, с. 523 – 535.
--- (1916b), О коэффициенте дисперсии для малых чисел. *Страх. обозрение*, № 2, с. 55 – 59.
--- (1917), О некоторых предельных формулах исчисления вероятностей. В книге автора (1951, с. 573 – 585).
--- (1924), Четвертое изд. книги Марков (1900a).
--- (1951), *Избранные труды.* Б.м.
--- (1990), К вопросу о прочности стекла. Рукопись примерно 1903 г. ИМИ,

вып. 32 – 33, с. 456 – 467.
***Материалы*** (1917), *Материалы для биографического словаря действительных членов Академии наук*. Пг.
**Менделеев Д. И.** (1860), О сцеплении некоторых жидкостей. *Сочинения*, т. 5, 1947, с. 40 – 55.
--- (1872a), Отчёт об опытах 1867 и 1869 гг. Там же, т. 16, с. 99 − 113.
--- (1872b), О сжимаемости газов. Там же, т. 6, с. 128 – 171.
--- (1875a), Ход работ по возобновлению прототипов. Там же, т. 22, 1950, с. 175 – 213.
--- (1875b), об упругости газов. Там же, т. 6, с. 221 – 589.
--- (1876), О температурах атмосферных слоев. Там же, т. 7, 1946, с. 241 – 269.
--- (1885), Записка об ученых трудах А. И. Воейкова. Там же, т. 25, 1952, с. 526 – 531.
--- (1887), Исследование водных растворов по удельному весу. Там же, т. 3, 1934, с. 3 – 468.
--- (1888), Будущая сила, покоящаяся на берегах Донца. Там же, т. 11, с. 53 − 207.
--- (1895), О весе определённого объема воды. Там же, т. 22, 1950, с. 105 − 171.
--- (1934 – 1952), *Сочинения*, тт. 1 – 25. М. – Л.
**Мендель Г.** (1866, нем.), Опыты над растительными гибридами. В одноименной книге автора. М., 1965, с. 9 – 46.
--- (1866 – 1873, опубл. 1905, нем.), Письма к К. Нэгели. Там же, с. 57 – 93.
**Милль Дж. С., Mill, J. S.** (1843, англ.), *Система логики*. СПб, 1914.
**Некрасов П. А., Nekrasov P. A.** [1888], *Теория вероятностей*. Лекции 1887 – 1888 гг. Литография. Б. м., б. г. Последующие издания: 1894 (литография), М., 1896 и СПб, 1912.
--- (1890), Теорема, обратная теореме Якова Бернулли. *Труды Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии*, Отделение физич. наук, т. 3, № 1, с. 45 – 47.
--- (1898), Общие свойства массовых независимых явлений в связи с приближенным вычислением функций весьма больших чисел. МС, т. 20, с. 431 – 442.
--- (1900 – 1902), Новые основания учения о вероятностях сумм и средних величин. МС, т. 21, с. 579 – 763; т. 22, с. 1 – 142, 323 – 498; т. 23, с. 41 – 455.
--- (1901), По поводу одной простейшей теоремы… МС, т. 22, с. 225 – 238.
--- (1906), *Основы общественных и естественных наук в средней школе*. СПб.
--- (1911), К основам закона больших чисел, способа наименьших квадратов и статистики. МС, т. 27, с. 433 – 451.
--- (1912 – 1914), Лапласовская теория способа наименьших квадратов, упрощенная при помощи одной теоремы Чебышева. МС, т. 28, с. 228 – 234; т. 29, с. 190 – 191.
--- (1916a), *Принцип эквивалентности величин в теории пределов и последовательном приближённом исчислении*. Пг.
--- (1916b), *Средняя школа, математика и научная подготовка учителей*. Пг.
--- (2004), *The Theory of Probability*. Berlin. **w** Сборник статей автора и о нём.
**Никомах из Герасы (Nicomachus of Gerasa)** (1952), *Introduction to Arithmetic*. В книге *Great Books* (1952, vol. 11, pp. 811 – 848).
**Новиков С. П.** (2002), Вторая половина ХХ в. и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе. ИМИ, вып. 7 (42), с. 326 –

356.
**Новосельский С. А.** (1916), *Смертность и продолжительность жизни в России*. Пг.
**Ободовский А.** (1839), *Теория статистики*. СПБ.
**Огородников К. Ф., Ogorodnikov K. F.** (1928), A method for combining observations. *Астрон. ж.*, т. 5, с. 1 – 21.
--- (1929a), On the occurrence of discordant observations. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, vol. 88, pp. 523 – 532.
--- (1929b), On a general method of treating observations. *Астрон. ж.* т. 6, с. 226 – 244.
**Ондар Х. О.** (1971), О работах А. Ю. Давидова по теории вероятностей и его методологических взглядах. *История и методология естеств. наук*, вып. 11, с. 98 – 109.
**---** (1973), К вопросу о первых приложениях вероятностей в медицине. Там же, вып. 14, с. 159 – 166.
**---,** редактор (1977a), *О теории вероятностей и математической статистике. Переписка А. А. Маркова и А. А. Чупрова.* М. В качестве приложений перепечатаны статьи Маркова (1911c) и (1914b) и две статьи Чупрова, в том числе (1925b). Громадное количество ошибок и искажений, см. Шейнин (1990/2010). Там же и дополнительные письма из указанной переписки.
--- (1977b), Обзор переписки А. А. Маркова и А. А. Чупрова. В книге Ондар (1977a, с. 137 – 160).
**Остроградский М. В.** (1848, франц.), Об одном вопросе, касающемся вероятностей. В книге автора (1961a, с. 215 – 237).
--- (1858), Записка об эмеритальной кассе. Там же, с. 297 – 300.
--- (1961a), *Полное собрание трудов*, т. 3. Киев.
--- (1961b), *Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности.* М. Ред., И. Б. Погребысский, А. П. Юшкевич.
**Паевский В. В.** (1935), Демографические работы Эйлера. В мемориальном сборнике *Эйлер.* М. – Л., 1935, с. 103 – 110.
**Пирогов Н. И.** (1849), Об успехах хирургии в течение последнего пятилетия. *Зап. по части врачебн. наук Мед.-хирургич. акад*., год 7-й, кн. 4, ч. 1, с. 1 – 27.
**---** (1850 – 1855), Севастопольские письма. *Собр. соч.*, т. 8, 1961, с. 313 – 403.
--- (1854), Отчет о проведенных хирургических операциях 1852 – 1853. Там же, т. 4, 1960, с. 203 – 241.
--- (1864, нем.), *Начала общей военно-полевой хирургии*, 1865 – 1866. Там же, т. 5, 1961 и т. 6, с. 55 – 309. Ссылки в тексте на т. 5.
--- (1871, нем.), Отчет о посещении военно-санитарных учреждений в Германии, Лотарингии и Эльзасе в 1870 г. Там же, т. 7, 1960, с. 415 – 489.
--- (1879, нем.), Военно-врачебное дело и частная помощь на театре войны и т. д. Там же, т. 7, 1960, с. 15 – 410.
--- (1957 – 1962), *Собрание сочинений*, тт. 1 – 8. М.
**Плошко В. Г., Елисеева И. И.** (1990), *История статистики*. М.
**Постников А. Г.** (1974), *Вероятностная теория чисел.* М.
**Прохоров Ю. В.** (1986), Закон больших чисел и оценки вероятностей больших уклонений. В книге Бернулли Я. (1713/1986, с. 116 – 150).
**---** (1999a), Бертрана парадокс. В книге Прохоров (1999b, с. 46).
---, редактор (1999b), *Вероятность и математическая статистика.*

*Энциклопедия*. М.
**Прохоров Ю. В., Севастьянов Б. А.** (1999), Вероятностей теория. В книге Прохоров (1999b, с. 77 – 81).
**Прудников В. Е.** (1954), В. Я. Буняковский − ученый и педагог. М.
--- (1964), *П. Л. Чебышев – ученый и педагог.* М. [Л., 1976.]
**Птуха М. В.** (1955), *Очерки по истории статистики в СССР*, т. 1. М.
--- (1961), Выборочные обследования сельского хозяйства России в XVII – XVIII вв. *Уч. зап. по статистике*, вып. 6, с. 94 – 100.
**Радлов Э. Л.** (1900), В. С. Соловьев: религиозные и философские взгляды. *Энц. Словарь Брокгауза и Ефрона*, полутом 60, с. 785 – 792.
**Райхер В. К.** (1947), *Общественно-исторические типы страхования*. М. – Л.
**Реньи А.** (1969, венг.), Письма о вероятности. В книге автора *Трилогия о математике.* М., 1980, с. 121 – 198.
**Розенталь И. С., Соколов В. С.** (1956), *Учебник латинского языка.* М.
**Романовский В. И.** (1912), *Закон больших чисел и теорема Бернулли.* Варшава. Также в *Протоколах заседаний Общ. естествоиспытателей Варш. унив.* за 1911, № 4, с. 39 – 63.
--- (1923), Рецензия на работу Чупров (1918 – 1919). *Вестник стат.*, кн. 13, № 1 – 3, с. 255 – 260.
--- (1924), Теория вероятностей и статистика: по некоторым новейшим работам западных ученых. Там же, кн. 17, № 4 – 6, с. 1 – 38; кн. 18, № 7 – 9, с. 5 – 34.
--- (1925a), Обобщение неравенства Маркова и его применение в теории корреляции. *Бюлл. Среднеазиатск. гос. унив.*, вып. 8, с. 107 – 111.
--- (1925b), Généralisation d’une inégalité de Markoff. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 180, pp. 1468 – 1470.
--- (1961), *Математическая статистика*, кн. 1. Ташкент. Ред. Т. А. Сарымсаков.
**Рубановский Л. М.** (1934), *Методы физической статистики*. Л. − М.
**Слешинский И. В.** (1892), К теории способа наименьших квадратов. *Зап. Математич. отд. Новоросс. общ. естествоиспытателей*, т. 14, с. 201 – 264.
--- (1893), К теореме Чебышева. *Зап. Новоросс. унив.*, т. 59, с. 503 – 506.
***Словарь*** (1985), *Демографический энциклопедический словарь*. М.
**Слуцкий Е. Е.** (1912a), *Теория корреляции.* Киев.
--- (1912b, англ.), Три письма К. Пирсону (Univ. College London, Pearson Papers 856/4 and 856/7. Опубл. в книге Sheynin, O. (2004), *Russian Papers on the History of Probability and Statistics*. Berlin, pp. 228 – 235. **w**
--- (1914, англ.), Критерий согласия для линий регрессии и наилучший метод для их нахождения. В книге автора (1960, с. 12 – 17).
--- (1922), К вопросу о логических основах исчисления вероятностей. Там же, с. 18 – 24.
--- (1960), *Избранные труды.* М.
**Соловьев А. Д.** (1997), П. А. Некрасов и центральная предельная теорема теории вероятностей. ИМИ, вып. 2 (37), с. 9 – 22.
**Стеклов В. А.** (1915), По поводу одной задачи Лапласа. *Изв. Имп. Акад. Наук*, сер. 6, т. 9, с. 1515 – 1537.
**---** (1924), А. А. Марков. *Изв. Росс. АН*, сер. 6, т. 16, с. 169 – 184.
**Струве П. Б.** (1918), Кто первым указал на применение статистики к филологическим исследованиям? *Изв. Росс. АН*, сер. 6, т. 12, с. 1317 – 1318.
**Субботин М. Ф.** (1956), Астрономические и геодезические работы Гаусса. В

мемориальном сборнике *Гаусс*. М., с. 243 – 310.
**Тихомандрицкий М. А.** (1898), *Курс теории вероятностей.* Харьков.
**Тихомиров Е. И.** (1932), Инструкция русским метеорологическим станциям в XVIII в. *Изв. Гл. геофизич. обс.* № 1 – 2, с. 3 – 12.
**Тутубалин В. Н.** (1972), *Теория вероятностей в естествознании*. М.
--- (1973), *Статистическая обработка рядов наблюдений*. М.
**Уилкс С.** (1962, англ.), *Математическая статистика.* М., 1967.
**Урланис Б. Ц.** (1963), Трехсотлетие демографии. *Уч. зап. по статистике,* вып. 7, с. 150 – 160.
**Усов Н. А.** (1867), Замечание по поводу теоремы П. Л. Чебышева. МС, т. 2, 93 – 95 второй пагинации.
**Федорович Л. В.** (1894), *История и теория статистики.* Одесса.
**Феллер В.** (1950, англ.), *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 1. М., 1964. Перевод с изд. 1957 г.
**Фортунатов А.** (1914), Памяти П. Д. Азаревича. *Стат. вестник*, № 1 – 2, с. 233 – 238.
**Хинчин А. Я.** (1943), *Математические основания статистической механики.* М. − Л.
**---** (1961), Частотная теория Мизеса и современные идеи теории вероятностей. *Вопр. философии*, № 1, с. 91 – 102, № 2, с. 77 – 89.
**Цингер [В. Я.]** (1862), *Способ наименьших квадратов.* Диссертация. М.
**Чеботарев А. С.** (1958), *Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей.* М.
**Чебышев П. Л.** (1845), Опыт элементарного анализа теории вероятностей. *Полн. собр. соч.*, т. 5, 1951, с. 26 – 87.
--- (1846, франц.), Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей. Там же, т. 2, 1947, с. 14 – 22.
--- (1867), О средних величинах. Там же, с. 431 – 437.
--- (1874), О предельных величинах интегралов. Там же, т. 3, 1948, с. 63 – 65.
--- (1879 – 1880, лекции), *Теория вероятностей.* М. – Л., 1936. Громаднейшее количество опечаток.
--- (1887a), Об интегральных вычетах, доставляющих приближенные величины интегралов. Там же, с. 191 – 225.
--- (1887b), О двух теоремах относительно вероятностей. Там же, с. 229 – 239.
--- (1944 – 1951), *Полное собрание сочинений*, тт. 1 – 5. М. – Л.
**Четвериков Н. С.**, редактор (1968), *О теории дисперсии.* М.
**Чириков М. В., Шейнин О. Б.** (1994). См. Шейнин (1994f).
**Чупров А. А., Chuprov A. A.** (1905, нем.), Задачи теории статистики. В книге автора (1960, с.43 – 90).
**---** (1909), *Очерки по теории статистики.* М. Последующие издания: 1910 и 1959. Ссылки в тексте на издание 1959 г.
--- (1912), Выборочное исследование. В книге автора (1960, с. 258 – 270).
--- (1916), О математическом ожидании коэффициента дисперсии. *Изв. Имп. Акад. Наук*, т. 10, с. 1789 – 1798.
--- (1916 или самое начало 1917), О средней квадратической ошибке коэффициента дисперсии. Рукопись; Архив РАН, фонд 173, опись 1, № 50. Англ. перевод в книге автора (2004, pp. 48 – 73).
--- (1918 – 1919, нем.), К теории стабильности статистических рядов. В книге Четвериков (1968, с. 138 – 224).

--- (1922a, нем.), Учебники статистики. В книге автора (1960, с. 413 – 429).
--- (1922b, шведск.), Закон больших чисел и стохастико-статистическая точка зрения в современной науке. Там же, с. 141 – 162.
--- (1923), On the mathematical expectation of the moments of frequency distributions in the case of correlated observations. *Metron*, t. 2, pp. 461 – 493, 646 – 683.
--- (1924, нем.), Основные задачи стохастической теории статистики. В книге автора (1960, с. 162 – 221).
--- (1925a, нем.), *Основные проблемы теории корреляции*. М., 1926 и 1960.
--- (1925b), Рецензия на книгу Марков (1924). В книге Ондар (1977a, с. 167 – 170).
--- (1926, шведск., доклад 1918), Теория устойчивости статистических рядов. В книге автора (1960, с. 224 – 239).
--- (1960), *Вопросы статистики*. Сборник перепечаток и переводов статей автора. Сост. Н. С. Четвериков. М.
--- (2004), *Statistical Papers and Memorial Publications*. Berlin. **w**
--- (2009a), *Архивные материалы, газетные и журнальные публикации*. Берлин. **w**
--- (2009b), *Письма К. Н. Гулькевичу 1919 – 1921*. Составители К. Виттих, Г. Кратц, О. Шейнин. Берлин. **w**
**Шейнин О. Б. (Sheynin O. B.)** (1963), Adjustment of a trilateration figure by frame structure analogue. *Survey Rev.*, vol. 17, pp. 55 – 56.
**---**(1965), О работах Р. Эдрейна в теории ошибок. ИМИ, вып. 16, с. 325 – 336.
--- (1966a), К истории итеративных способов решения систем линейных алгебраических уравнений. *Тр. IX Научн. конф. аспирантов и мл. научн. сотр. ИИЕТ*, секция истории физ.-мат. наук. М., с. 8 – 12.
--- (1966b), Origin of the theory of errors. *Nature*, vol. 211, pp. 1003 – 1004.
--- (1968), On the early history of the law of large numbers. *Biometrika*, vol. 55, pp. 459 – 467. Перепечатка: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 231 – 239).
--- (1969), О работе Т. Бейеса по теории вероятностей. *Тр. XII Научн. конф. аспирантов и мл. научн. сотр. ИИЕТ*, секция истории мат. и мех. М., с. 40 – 57.
--- (1970a), К истории предельных теорем Муавра – Лапласа. *История и методология естеств. наук*, вып. 9, с. 199 – 211.
--- (1970b), D. Bernoulli on the normal law. *Biometrika*, vol. 57, pp. 199 – 202. Перепечатка: M. G. Kendall & Plackett (1977, pp. 101 – 104).
--- (1970c), Комбинаторика и теория вероятностей. Соавторы, Л. Е. Майстров, Б. А. Розенфельд. Глава в книге *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия*, т. 2 (XVII в.). Редактор А. П. Юшкевич. М., 1970, с. 81 – 97.
--- (1971a), Newton and the classical theory of probability. AHES, vol. 7, pp. 217 – 243. **S, G,** 47.
--- (1971b), Lambert's work in probability. Там же, pp. 244 – 256. **S, G,** 47.
--- (1971c), On the history of some statistical laws of distribution. *Biometrika*, vol. 58, pp. 234 – 236. Перепечатка: M. G. Kendall & Plackett (1977, pp. 328 – 330).
--- (1972a), On the mathematical treatment of observations by Euler. AHES, vol. 9, pp. 45 – 56.
--- (1972b), D. Bernoulli's work on probability. *RETE. Strukturgeschichte der Naturwissenschaften*, Bd. 1, pp. 273 – 300. Перепечатка: M. G. Kendall & Plackett (1977, pp. 105 – 132). **S, G,** 29.

--- (1972c), Теория вероятностей. Соавтор Л. Е. Майстров. Глава в книге *История математики с древнейших времен до начала XIX столетия*, т. 3 (XVIII в.). Редактор А. П. Юшкевич. М., 1972, с. 126 – 152.
--- (1973a), Finite random sums. Historical essay. AHES, vol. 9, pp. 275 – 305.
--- (1973b), Boscovich's work on probability. Там же, pp. 306 – 324.
--- (1973c), Mathematical treatment of astronomical observations. Historical essay. Там же, vol. 11, pp. 97 – 126.
--- (1974), On the prehistory of the theory of probability. Там же, vol. 12, pp. 97 – 141. **S, G,** 30.
--- (1975a), Kepler as a statistician. *Bull. ISI*, vol. 46, pp. 341 – 354. **S, G,** 29.
--- (1975b), О появлении дельта-функции Дирака в трудах Лапласа. ИМИ, вып. 20, с. 303 – 308.
--- (1976), Laplace's work on probability. AHES, vol. 16, pp. 137 – 187.
--- (1977a), Laplace's theory of errors. Там же, vol. 17, pp. 1 – 61.
--- (1977b), Early history of the theory of probability. Там же, pp. 201 – 259. **S, G,** 30.
--- (1977c), О работах Лапласа по теории вероятностей. ИМИ, вып. 22, с. 212 – 224. Частичный перевод статьи (1976).
--- (1977d), Kepler. В книге *Bull. ISI*, vol. 46, No. 2, pp. 341 – 354. **S, G,** 9.
--- (1978a), Теория вероятностей. Соавтор Б. В. Гнеденко. Глава в книге *Математика XIX века.* М., 1978, с. 184 – 240. Редакторы А. Н. Колмогоров и А. П. Юшкевич.
--- (1978b), Теория вероятностей до П. Л. Чебышева. ИМИ, вып. 23, с. 284 – 306.
--- (1978c), Poisson's work in probability. AHES, vol. 18, pp. 245 – 300.
--- (1978d), Kepler. В книге Kruskal & Tanur (1978, vol. 1, pp. 487 – 488. **S, G,** 61.
--- (1979), Gauss and the theory of errors. AHES, vol. 20, pp. 21 – 72. **S, G,** 47.
--- (1980), On the history of the statistical method in biology. Там же, vol. 22, pp. 323 – 371.
--- (1982), On the history of medical statistics. Там же, vol. 26, pp. 241 – 286. **S, G** 29.
--- (1983), Corrections and short notes on my papers. Там же, vol. 28, pp. 171 – 195.
--- (1984a), On the history of the statistical method in astronomy. Там же, vol. 29, pp. 151 – 199. **S, G,** 30.
--- (1984b), On the history of the statistical method in meteorology. Там же, vol. 31, pp. 53 – 93. **S, G,** 47.
--- (1985), On the history of the statistical method in physics. Там же, vol. 33, pp. 351 – 382.
--- (1986a), Quetelet as a statistician. Там же, vol. 36, pp. 281 – 325. **S, G,** 29.
--- (1986b), Я. Бернулли и начала теории вероятностей. В книге Бернулли Я. (1713/1986, с. 83 – 115).
--- (1989a), Markov's work on probability. AHES, vol. 39, pp. 337 – 377; vol. 40, p. 387.
--- (1989b), Письма А. М. Ляпунова К. А. Андрееву. ИМИ, вып. 31, с. 306 – 313.
--- (1990a), К истории статистического метода в естествознании. ИМИ, вып. 32 – 33, с. 384 – 408. Краткое изложение статей (1980; 1982; 1984a; 1984b; 1985).

--- (1990b), Отзыв А. А. Маркова об одной статье Б. Б. Голицына. Там же, с. 451 – 455.
--- (1990c), *А. А. Чупров. Жизнь, творчество, переписка.* М., 2010.
--- (1991a), Poincaré's work in probability. AHES, vol. 42, pp. 137 – 172.
--- (1991b), On the works of Buniakovsky in the theory of probability. Там же, vol. 43, pp. 199 – 223. Предварительная публикация: *Препринт* № 17 Инст. истории естествознания и техники, 1988. Русский вариант: ИМИ, вып. 4 (39), 1999, с. 57 – 81.
--- (1991c), On the notion of randomness from Aristotle to Poincaré. *Math., Inform. et Sciences Humaines*, No. 114, pp. 41 – 55. Русский вариант: ИМИ, вып. 1 (36), № 1, 1995, с. 85 – 105.
--- (1992), Al-Biruni and the mathematical treatment of observations. *Arabic Sciences and Phil.*, vol. 2, pp. 299 – 306. **S, G,** 29
--- (1993a), Публикации А. А. Маркова в газете "День" за 1914 – 1915 гг. ИМИ, вып. 34, с. 194 – 206.
--- (1993b), On the history of the principle of least squares. AHES, vol. 46, pp. 39 – 54.
--- (1993c), Treatment of observations in early astronomy. Там же, pp. 153 – 192.
--- (1993d), Chuprov, Slutsky and Chetverikov: some comments. *Hist. Math.*, vol. 20, pp. 247 – 254.
---- (1994a), Gauss and geodetic observations. AHES, vol. 46, pp. 253 – 283.
--- (1994b), Chebyshev's lectures on the theory of probability. Там же, pp. 321 – 340.
--- (1994c), Bertrand's work on probability. Там же, vol. 48, pp. 155 – 199. **S, G,** 47.
--- (1994d), Ivory's treatment of pendulum observations. *Hist. Math.*, vol. 21, pp. 174 – 184.
--- (1994e), Theory of errors. In *Companion Enc. Hist. & Phil. of Math. Sciences*, vol. 2, pp. 1315 – 1324. London, 1994. Редактор I. Grattan-Guinness.
--- (1994f), Переписка П. А. Некрасова и К. А. Андреева. ИМИ, вып. 35, с. 124 – 147. Соавтор М. В. Чириков.
--- (1995a), Переписка П. А. Некрасова и А. И. Чупрова. ИМИ, вып. 1 (36), № 1, с. 159 – 167.
--- (1995b), Helmert's work in the theory of errors. AHES, vol. 49, pp. 73 – 104.
--- (1995c), Density curves in the theory of errors. Там же, pp. 163 – 196.
--- (1995d), Introduction of statistical reasoning into astronomy. In *General History of Astronomy*, vol. 2B. Cambridge, 1995, pp. 191 – 197. Редакторы R. Taton, C. Wilson.
**---** (1996a), A forerunner of the *t*-distribution. *Biometrika*, vol. 83, pp. 891 – 898. Соавтор, J. Pfanzagl.
--- (1996b), Selection and treatment of observations by Mendeleev. *Hist. Math.*, vol. 23, pp. 54 – 67. **S, G,** 29.
--- (1997a), Lüroth. Соавтор J. Pfanzagl. В книге Johnson & Kotz (1997, с. 203 – 204). Также во втором издании 2006 г. (vol. 7, pp. 4433 – 4434).
--- (1997b), Achenwall. Там же, с. 5 –6. Также во втором издании 2006 г.
--- (1997c), Süssmilch. Соавтор, J. Pfanzagl. Там же, с. 73 – 75. Также во втором издании 2006 г., но ошибочно без указания авторов.
--- (1997d), А. А. Марков и страхование жизни. ИМИ, вып. 2 (37), с. 22 – 33.
--- (1998a), Theory of probability; definition and relation to statistics. AHES, vol. 52, pp. 99 – 108.

--- (1998b), Statistical thinking in the Bible and the Talmud. *Annals Sci.*, vol. 55, pp. 185 – 198. **S, G,** 29.
--- (1998c), Statistics in the Soviet epoch. JNÖS, Bd. 217, pp. 529 – 549. Русский вариант: ИМИ, вып. 6 (41), 2001, с. 179 – 198.
--- (1999a), Statistics, definition of. In Kotz et al (1997 – 1999, т. 3, с. 704 – 711). Также во втором издании 2006 г.
--- (1999b), Discovery of the principle of least squares. *Hist. Scient.*, vol. 8, pp. 249 – 264.
--- (1999c), Е. Е. Слуцкий: к 50-летию со дня смерти. ИМИ, вып. 3 (38), с. 128 – 137.
--- (1999d), Gauss and the method of least squares. JNÖS, Bd. 219, pp. 458 – 467.
--- (2000a), История теории ошибок. ИМИ, вып. 5 (40), с. 310 – 332. Отдельное расширенное издание: Берлин, 2007.
--- (2000b), Bessel: some remarks on his work. *Hist. Scient.*, vol. 10, pp. 77 – 83. **S, G,** 29. Также см. 2016e, **S, G,** 74.
--- (2001a), Pirogov as a statistician. Там же, pp. 213 – 225. **S, G,** 29.
--- (2001b), Gauss. In Heyde & Seneta (2001, pp. 119 – 122). **S, G,** 29.
--- (2001c), Mendel. Там же, pp. 190 – 193. **S, G,** 29.
--- (2001d), Gauss, Bessel and the adjustment of triangulation. *Hist. Scient.*, vol. 11, pp. 168 – 175.
--- (2001e), Social statistics and probability theory in the 19th century. Там же, pp. 86 – 111. Сокращенный вариант: JNÖS, Bd. 223, 2003, pp. 91 – 112. Русский вариант: *Вопр. Статистики*, № 9, 2002, с. 64 – 69.
--- (2001f), Anderson's forgotten obituary of Bortkiewicz. JNÖS, Bd. 221, pp. 226 – 236.
--- (2002a), О теоретико-вероятностном наследии Курно. ИМИ, вып. 7 (42), с. 301 – 316. Устарело.
--- (2002b), Newcomb as a statistician. *Hist. Scient.*, vol. 12, pp. 142 – 167.
--- (2002c), Sampling without replacement: history and applications. *NTM, Intern. Z. f. Geschichte u. Ethik Naturwiss., Technik, Med.*, Bd. 10, pp. 181 – 187.
--- (2003a), *Гумбель, Эйнштейн и Россия*. М. Двуязычное (русско-англ.) издание.
--- (2003b), Nekrasov's work on probability: the background. AHES, vol. 57, pp. 337 – 353.
--- (2003c), On the history of Bayes's theorem. *Math. Scientist*, vol. 28, pp. 37 – 42. Русский вариант: К истории теоремы Бейеса. ИМИ, вып. 12 (47), 2007, с. 312 – 320.
--- (2003d), Geometric probability and the Bertrand paradox. *Hist. Scient.*, vol. 13, pp. 42 – 53. **S, G,** 47.
--- (2003e), Lies, damned lies and statistics*.* *Intern. Z. f. Geschichte u. Ethik der Naturwiss., Technik u. Med.* (NTM), Bd. 11, pp. 191 – 193.
--- (2004), Fechner as a statistician. *Brit. J. Math., Stat. Psychology*, vol. 57, pp. 53 – 72.
--- (2005), Early discovery of sunspots. *Journal*, vol. 99, No. 3, p. 83.
**---** (2006a), О взаимоотношениях П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. ИМИ, вып. 11 (46), с. 148 – 157.
**---** (2006b), Markov's work on the treatment of observations. *Hist. Scient*., vol. 16, pp. 80 – 95. Русский вариант: Математическая обработка наблюдений у Маркова. ИМИ, вып. 13 (48), 2009, с. 110 – 128.

**---** (2006c), Рецензия на Porter T. M. (2004), *Karl Pearson*. Princeton. *Hist. Scient.*, vol. 16, c. 206 – 209. Русский вариант: ВИЕТ, 2007, № 2, с. 191 – 195.
--- (2006d), Рецензия на перевод Bernoulli J. (1713), *Ars Conjectandi*. Baltimore, 2006. Там же, pp. 212 – 214. Русский вариант: ВИЕТ, 2007, № 1, с. 178 – 180.
--- (2007), *История теории ошибок*. Берлин. **S, G,** 21.
--- (2007a), Переписка Е. Е. Слуцкого и В. И. Борткевича. *Финансы и Бизнес*, № 4, с. 139 – 154. Соавторы К. Виттих, Г. Раушер.
--- (2007b), Markov: integrity is just as important as scientific merits. NTM, *Intern. Z. f. Geschichte u. Ethik Naturwiss., Technik u. Medizin*, Bd. 15, pp. 289 – 294.   29.
**---** (2007c), The true value of a measured constant and the theory of errors. *Hist. Scient.*, vol. 17, c. 38 – 48.  47.
**---** (2007d), Euler's work in probability and statistics. In *Euler Reconsidered. Tercentenary Essays*. Ed., R. Baker. Heber City, Uta, pp. 281 – 316.
--- (2007e), Андрей Андреевич Марков. **S, G,** 16.
**---** (2008a), Bortkiewicz' alleged discovery: the law of small numbers. *Hist. Scient.*, vol. 18, c. 36 – 48.
**---** (2008b), Romanovsky's correspondence with K. Pearson and R. A. Fisher. *Archives Intern. d'Histoire des Sciences*, vol. 58, No. 160 – 161, c. 365 – 384.
--- (2009a), *Theory of Probability and Statistics As Exemplified in Short Dictums*. Berlin. 2nd edition. **S, G,** 20 (первое издание).
**---**, переводчик (2009b), *Portraits. L. Euler, D. Bernoulli, J.-H. Lambert*. Berlin. **S, G,** 34.
--- (2010a), Karl Pearson: a century and a half after his birth. *Math. Scientist*, vol. 35, pp. 1 – 9. **S, G,** 35.
--- (2010b), The inverse law of large numbers. *Math. Scientist*, vol. 35, pp. 132 – 133. Русский вариант: Обратный закон больших чисел. ИМИ, вып. 14 (49), 2011, с. 212 – 219.
--- (2011a), Случайность и необходимость […] ВИЕТ, № 2, с. 36 – 44.
**---** (2011b), Statistics, History of. *Intern. Enc. of Stat. Sci.* Göttingen, pp. 1493 – 1504. Автор § 1: M. Lovrich.
**---** (2012a), New exposition of Gauss' final justification of least squares. *Math. Scientist*, vol. 37, pp. 147 – 148.
--- (2012b), Poisson and statistics. Там же, pp. 149 – 150.
--- (2012c), Ladislaus von Bortkiewicz: a scientific biography. In W. Wieslaw, Editor, *Dzieje Matematyki Polskiej*. Wroclaw, pp. 249 – 266. **S, G,** 18.
--- (2013a), Poisson et la statistique. In Poisson (2013, pp. 357 – 366).
**---** (2013b), "Святой Федос". ВИЕТ, № 1, с. 148 – 158.
**---** (2014a), Gauss and the method of least squares. *Silesian Stat. Rev.*, No. 12 (18), pp. 9 – 36.
**---** (2014b), Elementary exposition of Gauss (1823). Ibidem, pp. 39 – 47.
**---** (2014c), Antistigler. Ibidem, pp. 48 – 52. **S, G,** 31.
**---** (2014d), Theory of errors and statistics. Ibidem, pp. 53 – 54.
**---** (2014e), К истории государствоведения. *Финансы и бизнес*, № 1, с. 136 – 158.
**---** (2014, 2015), Cluster of anniversaries. *Math. Scientist*, vol. 39, pp. 11 – 16; vol. 40, pp. 1 – 6.
**---** (2016a), The history and principle of statistics. Wiley, Stats Ref: Statistics reference online
**---** (2016b), Неожиданные штрихи к портретам Гаусса и Бесселя. **S, G,** 74.

**---** (2017), *Black Book*. **S, G,** 80.
**Шмидт О. Ю.** (1926), О парадоксе Бертрана в теории вероятностей. МС, т. 33, с. 33 – 40.
**Эренфест П.** и **Т.** (1907, нем.), О двух известных возражениях против Н-теоремы Больцмана. В книге П. Эренфеста *Сборник статей*. М., 1972, с. 89 – 97.
**Эрисман Ф. Ф.** (1887), *Курс гигиены*, тт. 1 – 2. М. Том 2 содержит приложение о санитарной статистике.
**Юшкевич А. П.** (1986), Николай Бернулли и издание “Искусства предположений” Якоба Бернулли. *Теория вероятностей и ее применения*, т. 31, с. 333 – 352.
**Ярошенко С. П.** (1893a), К теории способа наименьших квадратов. *Зап. Новоросс. унив.*, т. 58, с. 193 – 208 2-й пагинации.
--- (1893b), Sur la méthode des moindres carrés. *Bull. sciences math.*, sér. 2, t. 17, pp. 113 – 125.
**Ястремский Б. С.** (1913), Закон “достаточно” больших чисел при оценке устойчивости статистических рядов. *Избр. тр.*, М., 1964, с. 13 – 32.
**Aaboe A., De Solla Price D. J.** (1964), Qualitative measurements in antiquity. In *L’aventure de la science* (*Mélanges A. Koyré*, t. 1). Paris, pp. 1 – 20.
**Abbe C.** (1871), Historical note on the method of least squares. *Amer. J. Sci. Arts*, ser. 3, vol. 1, pp. 411 – 415.
**Abbe E.** (1863), Über die Gesetzmäßigkeit in der Verteilung der Fehler bei Beobachtungsreihen. *Ges. Abh.*, vol. 2. Jena, 1989, pp. 55 – 81.
**Achenwall G.** (1752), *Staatsverfassung der europäischen Reiche im Grundrisse*. Göttingen. Первое издание (Göttingen, 1749) называлось *Abriß der neuesten Staatswissenschaft* etc. Большое число последующих изданий вплоть до 1798 г., но в 1768 г. название снова поменялось.
--- (1763), *Staatsklugheit und ihren Grundsätzen*. Göttingen. Четвертое изд., 1779.
**Adrain R.** (1809), Research concerning the probabilities of the errors which happen in making observations. Все его статьи (см. ниже) перепечатаны в Stigler (1980, т. 1).
**---** (1818a), Investigation of the figure of the Earth and of the gravity in different latitudes.
**---** (1818b), Research concerning the mean diameter of the Earth.
**Anchersen J. P.** (1741), *Descriptio statuum cultiorum in tabulis*. Copenhagen – Leipzig.
**André D.** (1887), Solution directe du problème résolu par Bertrand. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 105, pp. 436 – 437.
**Anonymous** (1735), Géométrie. *Hist. Acad. Roy. Sci. avec les Mém. Math. Phys.*, pp. 43 – 45 раздела *Histoire.* Автор несомненно Бюффон.
**Anonymous** (1839), Introduction. *J. Stat. Soc. London*, vol. 1, pp. 1 – 5.
**Arago F.** (1850), Poisson. OC, t. 2, 1854, pp. 593 – 671.
**Arbuthnot J.** (1712). An argument for divine Providence taken from the constant regularity observed in the birth of both sexes. В книге M. G. Kendall & Plackett (1977, pp. 30 – 34).
**Aristarchus** (1959), On the sizes and distances of the sun and the moon. In Sir Thomas Heath, *Aristarchus of Samoa*. Oxford, pp. 353 – 414.
**Arnauld A., Nicole P. (Арно А., Николь П.)** (1662), *L’art de penser.* Paris, 1992. [*Логика или искусство мыслить.* М., 1991.]

**Babbage C.** (1857), On tables of the constants of nature and art. *Annual Rept Smithsonian Instn* for 1856, pp. 289 – 302. Резюме статьи было опубл. в 1834 г.
**---** (1874), Of observations. Ibidem for 1873, pp. 187 – 197.
**Bachelier L.** (1900), *Théorie de la spéculation.* Paris, 1995.
**Baily Fr.** (1835), *An Account of the Revd John Flamsteed.* London.
**Barnard G. A.** (1967), The Bayesian controversy in statistical inference. *J. Inst. Actuaries*, vol. 93, pt. 1, pp. 229 – 269.
**Barnett V., Lewis T.** (1978), *Outliers in Statistical Data*. Chichester. [1984.]
**Barone J., Novikoff A.** (1978), A history of the axiomatic formulation of probability from Borel to Kolmogorov. AHES, vol. 18, pp. 123 – 190.
**Bayes T.** (1764 – 1765), An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vols 53 – 54 за 1763 – 1764, pp. 360 – 418, 296 – 325. Нем. перевод: Лейпциг, 1908. Перепечатка 1-й части мемуара: *Biometrika*, vol. 45, 1958, pp. 293 – 315; также E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 131 – 153).
**Beer A. и др.** (1961), An 8$^{th}$ century meridian line. *Vistas Astron.*, vol. 4, pp. 3 – 28.
**Bellhouse D. R.** (1981), The Genoese lottery. *Stat. Sci.*, vol. 6, pp. 141 – 148.
--- (1988), Probability in the 16$^{th}$ and 17$^{th}$ centuries. ISR, vol. 56, pp. 63 – 74.
--- (1989), A manuscript on chance written by J. Arbuthnot. ISR, vol. 57, pp. 249 – 259.
**Belvalkar S. K., Ranade R. D.** (1927), *History of Indian Philosophy*, vol. 2. Poona.
**Benjamin M.** (1910), Newcomb. В книге *Leading American Men of Science*. Editor, D. S. Jordan. New York, pp. 363 – 389.
**Berggren J. L.** (1991), Ptolemy's map of earth and the heavens: a new interpretation. AHES, vol. 43, pp. 133 – 144.
**Bernoulli Daniel (Бернулли Д.)** (1735), Recherches physiques et astronomiques … Quelle est la cause physique de l'inclinaison des plans des planètes… В книге автора (1987, pp. 303 – 326).
Все остальные мемуары перепечатаны в книге автора (1982). Их названия мы приводим, когда это возможно, лишь в переводе с латинского.
--- (1738; 1982, pp. 223 – 234), Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica*, vol. 22, 1954, pp. 23 – 36.
--- (1766; 1982, pp. 235 – 267), Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir.
--- (1768a; 1982, pp. 276 – 287), De usu algorithmi infinitesimalis in arte coniectandi specimen.
--- (1768b; 1982, pp. 290 – 303), О средней продолжительности браков при всяком возрасте супругов и о других смежных вопросах. В книге Птуха (1955, с. 453 – 464).
--- (1768c), Письмо Эйлеру. *Природа*, № 5, 1982, с. 103 – 104. Перевод А. П. Юшкевича.
--- (1769, Latin), Рукопись с тем же названием, что и мемуар 1778 г. На англ. яз.: *Festschrift for Lucien Le Cam.* New York, 1997, pp. 358 – 367.
--- (1770; 1982, pp. 306 – 324), Disquisitiones analyticae de nouo problemata coniecturale.
--- (1770 – 1771; 1982, pp. 326 – 338, 341 – 360), Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata.
--- (1778; 1982, pp. 361 – 375), The most probable choice between several discrepant observations and the formation therefrom of the most likely induction. *Biometrika*, vol. 48, 1961, pp. 3 – 13, вместе с переводом Эйлера (Euler 1768).

Перепечатка: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 155 – 172).
--- (1780; 1982, pp. 376 – 390), Specimen philosophicum de compensationibus horologicis, et veriori mensura temporis.
--- (1982, 1987), *Werke*, Bde 2 – 3. Basel.
**Bernoulli Jakob (Бернулли Я.)** (рукопись; 1975, частичная публикация), Meditationes. В книге Bernoulli J. (1975, pp. 21 – 90).
**---** (1713), *Ars conjectandi*. В книге Bernoulli J. (1975, pp. 107 – 259). Нем. перевод: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Leipzig, 1899. Перепечатка: Thun – Frankfurt/Main, 1999. Русск. перевод части 4: *Искусство предположений, часть 4-я*, 1913; перепечатка в книге автора (1986, с. 23 – 59). Ссылки в тексте либо на нем. перевод, либо (если указано) на русск. перевод 1986 г.
--- (1713/1975, pp. 260 – 286), Lettre à un amy sur les parties du jeu de paume.
--- (1975), *Werke*, Bd. 3. Basel. Содержит перепечатку ряда смежных мемуаров других авторов и комментарии.
--- (1986), *О законе больших чисел.* М. Редактор Ю. В. Прохоров. Содержит перевод части 4 *Искусства предположений*, перепечатку статьи Марков (1914b) и комментарии (О. Б. Шейнин, Ю. В. Прохоров, А. П. Юшкевич).
**---** (2006), *Искусство предположений, ч. 1 – 3*. Берлин.
**Bernoulli Johann III** (1785), Milieu à prendre entre les observations. *Enc. Méthodique*. Mathématiques, t. 2. Paris, pp. 404 – 409.
**Bernoulli Niklaus** (1709), *De usu artis conjectandi in jure*. В книге Bernoulli J. (1975, pp. 289 – 326).
**Bertillon Alph.** (1893), *Instructions signalétiques*. Melun.
**Bertrand J.** (1887a), Solution d'un problème. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 105, p. 369.
--- (1887b), Sur les épreuves répétées. Там же, pp. 1201 – 1203.
--- (1888a), *Calcul des probabilités.* Второе изд., практически совпадающее с первым, 1907. Перепечатки: New York, 1970, 1972. Ссылки в тексте на издание 1972 г.
--- (1888b), Sur l'évaluation a posteriori de la confiance méritée par la moyenne d'une série de mesures. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 106, pp. 887 – 891.
--- (1888c), Sur l'erreur à craindre dans l'évaluation des trois angles d'un triangle. Там же, pp. 967 – 970.
**Bessel F. W., Бессель Ф. В.** (1816), Untersuchungen über die Bahn des Olbersschen Kometen. *Abh. Preuss. Akad. Berlin*, math. Kl. 1812 – 1813, pp. 119 – 160. Bessel (1876) содержит только выдержку из этого сочинения.
--- (1818), *Fundamenta astronomiae*. Königsberg.
--- (1820), Beschreibung des auf des Königsberger Sternwarte. *Astron. Jahrb.* (Berlin) за 1823, pp. 161 – 168.
--- (1823, нем.), Личное уравнение при наблюдениях прохождений звезд. В книге автора (1961, с. 219 – 225).
--- (1838a, нем.), Исследование о вероятности ошибок наблюдений. Там же, с. 226 – 258.
--- (1838b, нем.), *Градусное измерение в Восточной Пруссии*. Там же, неполностью, с. 99 – 186.
--- (1876), *Abhandlungen*, Bde 1 – 3. Leipzig.
--- (1961), *Избранные геодезические сочинения.* М.
**Bienaymé I. J.** (1838), Sur la probabilité des résultats moyens des observations. *Mém. pres. Acad. Roy. Sci. Inst. France*, t. 5, pp. 513 – 558.
--- (1839), Théorème sur la probabilité des résultats moyens des observations. *Soc.*

*Philomat. Paris, Extraits*, sér. 5, pp. 42 – 49. Также: *L'Institut*, t. 7, No. 286, pp. 187 – 189.
--- (1840a), Principe nouveau du calcul des probabilités avec ses applications aux sciences d'observation. *Soc. Philomat. Paris, Extraits*, sér. 5, pp. 37 – 43. Также: *L'Institut*, t. 8, No. 333, pp. 167 – 169.
--- (1840b), Quelques propriétés des moyens arithmétiques de puissances de quantités positives. Там же, pp. 67 – 68. Также: *L'Institut*, t. 8, No. 342, pp. 216 – 217.
--- (1845), De la loi de multiplication et de la durée des familles. В статье D. G. Kendall (1975, pp. 251 – 253).
--- (1852), Sur la probabilité des erreurs d'après la méthode des moindres carrés. *J. Math. Pures Appl.*, sér. 1, t. 17, pp. 33 – 78. Также: *Mém. pres. Acad. Sci. Inst. France*, sér. 2, t. 15, 1858, pp. 615 – 663.
--- (1853), Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 37, pp. 309 – 324. Также: *J. Math. Pures Appl.* , sér. 2, t. 12, 1867, pp. 158 – 176.
--- (1855), Sur un principe que M. Poisson avait cru découvrir et qu'il avait appelé Loi des grands nombres. *C. r. Acad. Sci. Morales et Politiques*, sér. 3, t. 11, pp. 379 – 389. Также: *J. Soc. Stat. Paris*, 1876, pp. 199 – 204.
--- (1874), Sur une question de probabilités. *Bull. Soc. Math. France*, t. 2, pp. 153 – 154.
--- (1875), Application d'un théorème nouveau du calcul des probabilités. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 81, pp. 417 – 423. Также: *Bull. Math. Astron.*, t. 9, pp. 219 – 225.
**Biermann K. R., Бирман К. Р.** (1955), Über eine Studie von Leibniz zu Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Forschungen und Fortschritte*, Bd. 29, No. 4, pp. 110 – 113.
--- (1957), Задачи генуэзского лото в работах классиков теории вероятностей. ИМИ, вып. 10, с. 649 – 670.
--- (1966), Über die Beziehungen zwischen Gauss und Bessel. *Mitt. Gauss-Ges. Göttingen*, Bd. 3, pp. 7 – 20.
**Biermann K.-R., Faak M.** (1957), Leibniz' "De incerti aestimatione". *Forschungen und Fortschritte*, Bd. 31, No. 2, pp. 45 – 50.
**Biot J. B.** (1811), *Traité élémentaire d'astronomie physique*, t. 2. Paris – St. Pétersbourg. Второе изд.
**---** (1855), Sur les observatoires météorologiques permanents que l'on propose d'établir en divers points de l'Algérie. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 41, pp. 1177 – 1190.
**Birg S.,** редактор (1986), *Ursprünge der Demographie in Deutschland. Leben und Werke J. P. Süssmilch's*. [Сборник статей.] Frankfurt/Main.
**Black W.** (1782, English), *Esquisse d'une histoire de la médecine*. Paris, 1798.
--- (1788), *Comparative View of the Mortality of the Human Species.* London.
**Block M.** (1878), *Traité théorique et pratique de statistique.* Paris, 1886.
**Böckh R.** (1893), Halley als Statistiker. *Bull. ISI*, t. 7, No. 1, pp. 1 – 24.
**Boltzmann L., Больцман Л.** (1868), Studien über das Gleichgewicht der lebenden Kraft. В книге автора (1909, т. 1, с. 49 – 96). [Исследование равновесия живой силы между двумя движущимися материальными точками. *Избр. Произв.* М., 1984, с. 30 – 66.]
--- (1871), Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes. Там же, с. 288 – 308.
--- (1872), Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht. Там же, pp. 316 – 402.

--- (1878), Weitere Bemerkungen über einige Probleme. Там же, Bd. 2, pp. 250 – 288.
--- (1895), On certain questions of the theory of gases. Там же, pp. 535 – 544.
--- (1886), Der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie. В книге автора (1905, с. 25 – 50).[Второй закон механической теории тепла. В книге автора *Статьи и речи*. М., 1970, с. 3 – 28.]
--- (1887), Über die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes. В книге автора (1909, т. 3, с. 258 – 271). [О механических аналогиях второго начала термодинамики. *Избр. тр.* М., 1984, с. 280 – 290.]
--- (1895 – 1899), *Vorlesungen über Gastheorie*, Bde 1 – 2. Leipzig. [*Лекции по теории газов*, т. 1 – 2. М., 1956.]
--- (1896), Entgegnung auf die […] Betrachtungen des Herrn Zermelo. *Wiss. Abhandlungen*, Bd. 3. Leipzig, 1925, pp. 567 – 578. [1979.]
--- (1904a), Entgegnung auf einen von ... Ostwald ... gehaltenen Vortrag. В книге автора (1905, с. 364 – 378).
--- (1904b), *Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik*, Tl. 2. Leipzig.
--- (лекции 1900 – 1902), Über die Principien der Mechanik. В книге автора (1905, с. 308 – 337).
--- (1904), Relations of applied mathematics. [*Repts*] *Intern. Congr. Arts and Sci. St. Louis − Boston, 1904*. Boston, 1905, vol. 1, pp. 591 – 603.
--- (1905), *Populäre Schriften.* Leipzig, 1925. [Braunschweig – Wiesbaden, 1979.]
--- (1909), *Wissenschaftliche Abhandlungen*, Bde 1 – 3. Leipzig.
**Bomford G.** (1952), *Geodesy.* Oxford. Последующие издания: 1962, 1971, 1980. Русский перевод: М., 1958.
**Bond G. P.** (1857), On the use of equivalent factors in the method of least squares. *Mem. Amer. Acad. Arts Sciences*, New ser., vol. 6, pt 1, pp. 179 – 212.
**Boole G.** (1851), On the theory of probabilities. В книге автора (1952, pp. 247 – 259).
--- (1854a), On the conditions by which the solution of questions in the theory of probabilities are limited. Там же, с. 280 – 288.
--- (1854b), *Logic of Thought*. New York, 2003.
--- (1952), *Studies in Logic and Probability*, vol. 1. London.
**Borel E.** (1943), *Les probabilités et la vie*. Paris. [Paris, 1946.]
**---** (1909), *Eléments de la théorie des probabilités*. Paris, 1950.
**Boscovich R.** (1758, латин.). *Theory of Natural Philosophy.* Chicago – London, 1922. Перепечатка с англ. переводом. [Англ. издание: Cambridge, Mass., 1966.]
**Bouillaud J.** (1836), *Essai sur la philosophie médicale*. Paris.
**Boyle R.** (1772, посмертн.), A physico- chymical essay. *Works*, vol. 1. Sterling, Virginia, 1999, pp. 359 – 376.
**Brendel M.** (1924), Über die astronomische Arbeiten von Gauss. В книге Gauss, *W*-11/2, No. 3. Отдельная пагинация.
**Brownlee J.** (1915), Historical note on Farr's theory of epidemic. *Brit. Med. J.*, vol. 2, pp. 250 – 252.
**Bru B.** (1981), Poisson, le calcul des probabilités et l'instruction publique. В книге Poisson (1981, pp. 51 – 94).
--- (1988), Laplace et la critique probabiliste des mesures géodésiques. В книге H. Lacombe & P. Costabel, редакторы, *La figure de la Terre*. Paris, 1988, pp. 223 – 244.
--- (1991), A la recherche de la démonstration perdue de Bienaymé. *Math. Inf. Sci.*

*Hum.*, 29e année, No. 114, pp. 5 – 17
**---** (2013), Poisson et le calcul des probabilités. In Poisson (2013, pp. 333 − 355).
**Bru B., Bru M.-F., Bienaymé O.** (1997), La statistique critiquée par le calcul des probabilités. *Rev. Hist. Math.*, t. 3, pp. 137 – 239.
**Bru B., Jongmans F.** (2001), Bertrand. В книге Heyde et al (2001, pp. 185 – 189).
**Brush S. G.** (1968), Brownian movement from Brown to Perrin. AHES, vol. 5, pp. 1 – 36. Перепечатка: M. G. Kendall et al (1977, pp. 347 – 382).
**Budd W.** (1849), *Malignant Cholera*. London.
**Bühler G.**, редактор (1886), *Laws of Manu*. Oxford, 1967.
**Buffon G. L. L.** (1777), Essai d'arithmétique morale. В книге автора (1954, с. 456 – 488).
--- (1954), *Œuvres philosophiques.* Paris. Редакторы, J. Piveteau, M. Fréchet, C. Bruneau.
**Bull J. P.** (1959), Historical development of clinical therapeutic trials. *J. Chronic Diseases*, vol. 10, pp. 218 – 248.
**Bursill-Hall P.,** редактор (1993), *R. J. Boscovich. His Life and Scientific Work.* Rome.
**Butte W.** (1808), *Die Statistik als Wissenschaft*. Landshut.
**Byrne E. F.** (1968), *Probability and Opinion.* The Hague.
**Buys Ballot C. H. D.** (1847), *Les changements périodiques de temperature*. Utrecht.
--- (1850), Die periodischen […] Änderungen der Temperatur. *Fortschritte Phys.*, Bd. 3 für 1847, pp. 623 – 629.
**Campbell L., Garnett W.** (1882), *Life of Maxwell.* London, 1884.
**Cauchy A. L.** (1821), *Course d'analyse de l'Ecole royale polytechnique.* OC, sér. 2, t. 3. Paris, 1897.
--- (1845), Sur les secours que les sciences du calcul peuvent fournir aux sciences physiques ou même aux sciences morales. OC, sér. 1, t. 9. Paris, 1896, pp. 240 – 252.
--- (1853a), Sur la nouvelle méthode d'interpolation comparée à la méthode des moindres carrés. OC, sér. 1, t. 12. Paris, 1900, pp. 68 – 79.
--- (1853b), Sur les résultats moyens d'observations de même nature, et sur les résultats les plus probables. Там же, с. 94 – 104.
--- (1853c), Sur la probabilité des erreurs qui affectent des résultats moyens d'observations de même nature. Там же, с. 104 – 114.
--- (1853d), Sur les résultats moyens d'un très grand nombre d'observations. Там же, с. 125 – 130.
**Celsus** (1935), *De medicina*, vol. 1. London. На англ. яз. Написано в 1-м веке н. э.
**Chadwick E.** (1842), *Report on the Sanitary Condition of the Labouring Population.* Edinburgh, 1965.
**Chapman, S.** (1941), *Halley as a Physical Geographer*. London.
**Chaufton A.** (1884), *Les assurances*, t. 1. Paris.
**Cioffari V.** (1935), *Fortune and Fate from Democritus to St. Thomas Aquinas*. New York.
**Clausius R.** (1857), Über die Art der Bewegung welche wir Wärme nennen. В книге автора (1867, с. 229 – 259).
--- (1858), Über die mittlere Länge der Wege ... bei der Molecularbewegung. Там же, с. 260 – 276.
--- (1862), Über die Wärmeleitung gasförmiger Körper. Там же, pp. 277 – 326.

--- (1867), *Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie*, Abt. 2. Braunschweig.
--- (1889 – 1891), *Die kinetische Theorie der Gase.* Braunschweig. [Кинетическая теория газов. В книге *Основатели кинетической теории материи*. М. – Л., 1937, с. 41 – 164.]
**Clerke Agnes M.** (ca. 1885), *Popular History of Astronomy*. London, 1893. [London, 1902.]
**Clifford W. K.** (1885), *Common Sense of the Exact Sciences*. New York, 1946. К. Пирсон существенно дополнил посмертное издание 1886 г.
**Commelin C.** (1693), *Beschryvinge der Stadt Amsterdam.* Amsterdam.
**Comte A.** (1830 – 1842), *Cours de philosophie positive*, tt. 1 – 6. Paris, 1893, t. 3.
**Condamine C. M. de la** (1751), *Mesure des trois premiers degrés du méridien*. Paris.
--- (1759), Sur l'inoculation de la petite vérole. *Hist. Acad. Roy. Sci. Paris* 1754 *avec Mém. math. et phys*., pp. 615 – 670 of the *Mémoires*.
--- (1763), Second mémoire sur l'inoculation […]. Там же, pp. 439 – 482 of the *Mémoires*.
--- (1773), *Histoire de l'inoculation*. Amsterdam.
**Condorcet M. J. A. N.** (1784), Sur le calcul des probabilités. *Hist. Acad. Roy. Sci. Paris 1781 avec Mém. Math. et Phys. pour la même année*. Paris, 1784, pp. 707 – 728.
--- (1785a), *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues a la pluralité des voix.* New York, 1972.
--- (1785b), Eloge de [D.] Bernoulli. *Hist. Acad. Roy. Sci. Paris 1782 avec Mém. Math. et Phys*., pp. 82 – 107 of the *Histoire*. Reprinted in author's *Œuvres*, t. 2. Paris, 1847, pp. 545 – 580.
--- (1786), Eloge de Euler. *Hist. Acad. Roy. Sci. Paris 1783*, pp. 37 – 68. Also in Euler (1960), *Opera Omnia*, ser. 3, t. 12. Zürich, pp. 287 – 310.
--- (1795), *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain.* Paris, 1988.
**Coolidge J. L.** (1926), Adrain and the beginnings of American mathematics. *Amer. Math. Monthly*, vol. 33, No. 2, pp. 61 – 76.
**Cornfield J.** (1967), The Bayes theorem. *Rev. ISI*, vol. 35, pp. 34 – 49.
**Cotes R.** (1722), Aestimatio errorum in mixta mathesis per variationes partium trianguli plani et sphaerici. *Opera misc.* London, 1768, pp. 10 – 58.
**Cotte L.** (1788), Sur l'utilité des observations météorologiques. In author's *Mémoires sur la météorologie*, tt. 1 – 2. Paris, t. 1, pp. 1 – 32.
**Cournot A. A., Курно О.** (1838)**,** Sur l'applications du calcul des chances à la statistique judiciaire. *J. math. pures et appl.*, sér. 1, t. 3, pp. 257 – 334.
--- (1843), *Exposition de la théorie des chances et des probabilités.* Paris, 1984. Редактор B. Bru. Русск. перевод: *Основы теории шансов и вероятностей.* М., 1970.
--- (1851), *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique.* Paris, 1975.
--- (1861), *Traité de l'enchainement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire.* Paris, 1982.
--- (1875), *Matérialisme, vitalisme, rationalisme.* Paris, 1979.
**Courtault J.-M. et al** (2000), Bachelier. On the centenary of "Théorie de la spéculation". *Math. Finance*, vol. 10, pp. 341 – 353.

**Couturat L.** (1901), *La logique de Leibniz.* Paris.
**Creighton C.** (1891), *History of Epidemics in Britain*, vols 1 – 2. New York, 1965.
**Crofton M. W.** (1869), On the theory of local probability applied to straight lines drawn at random in a plane. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 158 for 1868, pp. 181 – 199.
**Cubranic N.** (1961), *Geodetski rad R. Boskovica.* Zagreb.
**Cuvier G.** (1831), Analyse des travaux de l'Académie […] pendant l'année 1827, partie phys. *Mém. Acad. Roy. Sci. Paris*, t. 10 pour 1831, pp. CIII − CXC.
**Czuber E.** (1884), *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerthe*. Leipzig.
--- (1891), Zur Kritik einer Gauss'schen Formel. *Monatshefte Math. Phys.*, Bd. 2, pp. 459 − 464.
--- (1903), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung*, Bd. 1. New York, 1968.
--- (1921), *Die statistischen Forschungsmethoden.* Wien.
**D'Alembert J. Le Rond** (1754), Croix ou pile. *Enc. ou dict. raisonné des sciences, des arts et des métiers*, t. 4, pp. 512 – 513.
--- (1761a), Sur le calcul des probabilités. В книге автора *Opusc. Math.*, t. 2. Paris, pp. 1 – 25.
--- (1761b), Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. Там же, pp. 26 – 95.
--- (1768a), Doutes et questions sur le calcul des probabilités. В книге автора *Mélanges de litterature, d'histoire et de philosophie*, t. 5, pp. 239 – 264.
--- (1768b), Sur la durée de la vie. В книге автора *Opusc. Math.*, t. 4. Paris, pp. 92 – 98.
--- (1768c), Sur un mémoire de M. Bernoulli concernant l'inoculation. Там же, pp. 98 – 105.
--- (1768d), Sur le calcul des probabilités. Там же, pp. 283 – 310.
--- (1821), Essai sur les éléments de philosophie. OC, t. 1, pt. 1. Paris, pp. 116 – 348.
**Darboux G.** (read 1901; 1902), Eloge historique de Bertrand. In author's *Eloges académiques et discours*. Paris, pp. 1 – 60.
**Darwin C.** (1859), *Origin of Species*. London – New York, 1958. [*Происхождение видов*. М., 1952.] [Manchester, 1995.]
--- (1868), *The variation of Animals and Plants under Domestication*, vols 1 – 2. London, 1885. [*Изменение животных и растений в домашнем состоянии*. М. – Л., 1941.] [London, 1988.]
**---** (1876), *The Effects of Cross and Self-Fertilisation in the Vegetable Kingdom.* London, 1878. [London, 1989.] [*Действие перекрестного опыления и самоопыления в растительном мире*. *Сочинения*, т. 6, 1950, с. 255 – 626.]
**---** (1881), *The Formation of Vegetable Mould*. London, 1945. [London, 1989.] [*Образование растительного слоя Земли деятельностью дождевых червей*. Там же, т. 2, 1936, с. 114 – 238.]
--- (1887), *Life and Letters*, vols 1 – 2. New York – London, 1897. [New York, 1969.]
**---** (1903), *More Letters*, vol. 1. London.
--- (1935 – 1959), *Сочинения*, тт. 1 – 9. М. – Л.
**David F. N.** (1962), *Games, Gods and Gambling.* London.
**David F. N., Neyman J.** (1938), Extension of the Markoff theorem on least squares. *Stat. Res. Memoirs*, vol. 2, pp. 105 – 117.
**David H. A., Дэвид Г.** (1957), Some notes on the statistical papers of Helmert. *Bull. Stat. Soc. New South Wales*, vol. 19, pp. 25 – 28. Впервые опубл. там же в

1954 г.
--- (1963, англ.), *Метод парных сравнений.* М., 1988.
--- (1998), Early sample measures of variability. *Stat. Sci.*, vol. 13, pp. 368 – 377.
**David H. A., Edwards A. W. F.** (2001), *Annotated Readings in the History of Statistics.* New York.
**Daw R. H.** (1980), J. H. Lambert, 1728 – 1777. *J. Inst. Actuaries*, vol. 107, pp. 345 – 350.
**Dawid Ph.** (2005), Statistics on trial. *Significance*, vol. 2, No. 1, pp. 6 – 8.
**Daxecker F.** (2004), *The Physicist and Astronomer Christopher Scheiner*. Innsbruck.
--- (2006), *Die Hauptwerk des Astronomen P. Christoph Scheiner JJ*. Innsbruck.
**DeCandolle Aug. P.** (1832), *Physiologie végétale*, tt. 1 – 3. Paris.
**Delambre, J. B. J.** (1819), Analyse des travaux de l'Académie … pendant l'année 1817, partie math. *Mém. Acad. Roy. Sci. Inst. de France*, t. 2 pour 1817, pp. I – LXXII of the *Histoire*.
**De Moivre A.** (1712, латин.), англ. перевод: De mensura sortis or the measurement of chance. ISR, vol. 52, 1984, pp. 236 – 262. Комментарий (A. Hald): там же, с. 229 – 236.
--- (1718), *Doctrine of Chances.* Последующие издания: 1738, 1756. Перепечатка последнего изд.: Нью Йорк, 1967.
--- (1725), *Treatise of Annuities on Lives*. В книге автора *Doctrine* …, 1756, с. 261 – 328. Нем. перевод: Вена, 1906.
--- (1730), *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis.* London. Французский перевод: Париж, 2009.
--- (1733, латин.), авторский перевод: A method of approximating the sum of the terms of the binomial $(a + b)^n$ expanded into a series from whence are deduced some practical rules to estimate the degree of assent which is to be given to experiments. Включено в последующие издания *Doctrine* … (в изд. 1756 г., с дополнениями, с. 243 – 254).
--- (1756), Последнее издание *Учения* (*Doctrine* …).
***De Moneta*** (1956), *De Moneta of N. Oresme and English Mint Documents*. London.
**De Montessus R.** (1903), Un paradoxe du calcul des probabilités. *Nouv. Annales Math.*, sér. 4, t. 3, pp. 21 – 31.
**De Morgan A.** (1845), Theory of probabilities. *Enc. Metropolitana*, Pure sciences, vol. 2. London, pp. 393 – 490.
--- (1847), *Formal Logic, or the Calculus of Inference, Necessary and Probable.* Chicago, 1926.
--- (1864), On the theory of errors of observation. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 10, pp. 409 – 427.
**De Morgan Sophia Elizabeth** (1882), *Memoir of Augustus De Morgan*. London.
**Descartes R., Декарт Р.** (1637), *Discours de la méthode*. La Gaya Scienza, 2012. [*Рассуждение о методе*. М., 1953.]
--- (1644), *Les principes de la philosophie. Œuvres*, t. 9, pt. 2. Paris, 1978, перепечатка издания 1647 г. [*Начала философии. Избр. Произв.* М., 1950, с. 409 – 544.]
**Desrosières A.** (1993, франц.), *The Politics of Large Numbers*. Cambridge (Mass.) – London, 1998.
**De Vries H.** (2005), Evidence of evolution. Annual Rept Smithsonian Instn for 2004, pp. 389 – 396.

**DeVries W. F. M.** (2001), Meaningful measures: indicators on progress, progress on indicators. ISR, vol. 69, pp. 313 – 331.
**De Witt J.** (1671), англ. перевод: Value of life annuities in proportion to redeemable annuities. В статье Hendriks (1852, pp. 232 – 249).
**Dietz K., Дитц К.** (1988, англ.), Сокращенный перевод: Первая модель эпидемического процесса в работах П. Д. Енько. *Вопр. вирусологии*, т. 38, № 2, 1993, с. 59 – 63.
**Dietz K., Heesterbeek J. A. P.** (2000), D. Bernoulli was ahead of modern epidemiology. *Nature*, vol. 408, pp. 513 – 514.
**---** (2002), D. Bernoulli's epidemiological model revisited. *Math. Biosciences*, vol. 180, pp. 1 – 21.
**Donkin W. F.** (1851), On certain questions relating to the theory of probabilities. *London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.*, ser. 4, vol. 1, pp. 353 – 368. Первая часть статьи.
**Doob J. L.** (1989), Commentary on probability. В книге *Centenary of Math. in America*, pt. 2. Providence, Rhode Island, 1989, pp. 353 – 354. Editor P. Duren et al.
**Dorsey N. E., Eisenhart C.** (1969), On absolute measurement. В книге Ku (1969, c. 49 – 55).
**Double F. J.** (1837, франц.), Inapplicability of statistics to the practice of medicine. *Lond. Medical Gaz.*, vol. 20, No. 2, 1837, pp. 361 – 364. Перевод из *Gaz. Médicale.*
**Double F. J., Dulong P. L., Larrey F. H.; Poisson S.-D.** (1835), Рецензия на Civiale, Recherches de statistique sur l'affection calculeuse. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 1, pp. 167 – 177. Translation: *Intern. J. Epidemiology*, vol. 30, 2001, pp. 1246 – 1249.
**Dove H. W.** (1837), *Meteorologische Untersuchungen.* Berlin.
--- (1839), Über die nicht periodischen Änderungen der Temperaturvertheilung auf der Oberfläche der Erde. *Abh. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, Phys. Abh. 1838, pp. 285 – 415.
--- (1850), Über Linien gleicher Monatswärme. Там же, Phys. Abh. 1848, pp. 197 – 228.
**Dufau P. A.** (1840), *Traité de statistique ou théorie de l'étude des lois, d'après lesquelles se développent des faits sociaux.* Paris.
**Dupâquier J.** et **M.** (1985), *Histoire de la démographie*. Paris.
**Du Pasquier L. G.** (1910), Die Entwicklung der Tontinen bis auf die Gegenwart. *Z. schweiz. Stat.*, 46. Jg, pp. 484 – 513.
**Dutka J.** (1985), On the problem of random flights. AHES, vol. 32, pp. 351 – 375.
--- (1988), On the St. Petersburg paradox. Там же, vol. 39, pp. 13 – 39.
--- (1990), R. Adrain and the method of least squares. Там же, vol. 41, pp. 171 – 184.
**---** (1996), On Gauss' priority in the discovery of the method of least squares. Там же, vol. 49, pp. 355 – 370.
**Ebbinghaus H.** (1908), *Abriss der Psychologie.* Leipzig.
**Eddington A. S.** (1933), Notes on the method of least squares. *Proc. Phys. Soc.*, vol. 45, pp. 271 – 287.
**Edgeworth F. Y.** (1996), *Writings in Probability, Statistics and Economics*, vols 1 – 3. Cheltenham. Editor, C. R. McCann, Jr.
**Edwards A. W. F.** (1987), *Pascal's Arithmetic Triangle*. Baltimore, 2002.

**---** (1994), R. A. Fisher on Karl Pearson. *Notes and Records Roy. Soc. London*, vol. 48, pp. 97 – 106.
**Eisenhart C.** (1963), Realistic evaluation of the precision and accuracy of instrument calibration. В книге Ku (1969, с. 21 – 47).
**---** (1964), The meaning of “least” in least squares. *J. Wash. Acad. Sci.*, vol. 54, pp. 24 – 33.
--- (1974), Pearson. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 10, pp. 447 – 473.
--- (1976), [Discussion of invited papers.] *Bull. ISI*, vol. 46, pp. 355 – 357.
**---** (1978), Gauss. In Kruskal & Tanur (1978, vol. 1, pp. 378 – 386).
**Ellis R. L.** (1849), On the method of least squares. In author’s *Mathematical and Other Writings*. Cambridge, 1863, pp. 12 – 37.
**Encke J. F.** (1832), Über die Begründung der Methode der kleinsten Quadrate. *Abh. Kgl. Akad. Wiss. zu Berlin* f. 1831, Math. Kl., pp. 73 – 78.
--- (1851); Über die Bestimmung der elliptischen Elemente bei Planetenbahnen. *Abh. Kgl. Akad. Wiss. Berlin* за 1849, pp. 1 – 68 второй пагинации.
**Eneström G.** (1896, in Swedish), Sur la méthode de J. de Witt (1671) pour le calcul de rentes viagères. *Archief voor de verzekerings-wetenschap*, t. 3, 1897, pp. 62 – 68.
**Erdélyi A.** (1956), *Asymptotic Expansions.* New York.
**Erman A.,** Editor (1852), *Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel*, Bde 1 – 2. Leipzig.
**Euler L., Эйлер Л.** (1748, латин.), *Введение в анализ бесконечных*, т. 1. М., 1961.
**---** (1749), Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter. *Opera omnia*, ser. 2, t. 25. Zürich, 1960, pp. 45 – 157.
--- (1755), Eléments de la trigonométrie sphéroidique tirés de la méthode des plus grands et plus petits. Там же, ser. 1, t. 27. Zürich, 1954, pp. 309 – 339.
--- (1767), Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. Там же, ser. 1, t. 7. Leipzig, 1923, pp. 79 – 100. Там же, с. 545 – 552, опубликована рукопись Эйлера Sur multiplication du genre humaine.
--- (1770), Expositio methodorum, cum pro determinanda parallaxi solis […].Там же, ser. 2, t. 30. Zürich, 1964, pp. 153 – 231.
--- (1776), Eclaircissements sur les établissements publics en faveur tant des veuves que des morts, avec la description d’une nouvelle espèce de Tontine aussi favorable au Public qu’utile à l’Etat. Там же, ser. 1, t. 7. Leipzig – Berlin, 1923, pp. 181 – 245.
--- (1778, латин.), [Замечания к мемуару Д. Бернулли (1778).] Англ. перевод 1961 г., его перепечатка 1970 г., опубликованы совместно с переводом указанного мемуара.
**Faraday M.** (1991 – 2008), *Correspondence*, vols 1 – 5. London.
**Farebrother R. W.** (1993), Boscovich’s method for correcting discordant observations. В книге Bursill-Hall (1993, pp. 255 – 261).
--- (1999), *Fitting Linear Relationships. History of the Calculus of Observations 1750 – 1900.* New York.
**Farr W.** (1885), *Vital Statistics*. London.
**Fechner G. T.** (1860), *Elemente der Psychophysik*, Bde 1 – 2. Leipzig. [Третье изд. 1907, его перепечатка 1964.]
--- (1874a), Über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers eines Beobachtungsmittels. *Annalen Phys. Chem.*, Jubelbd., pp. 66 – 81.
--- (1874b), Über den Ausgangswert der kleinsten Abweichungssumme […]. *Abh.*

*Kgl. Sächs. Ges. Wiss*., Bd. 18 (Math-Phys. Kl., Bd. 11), No. 1, pp. 3 – 76.
--- (1877), *In Sachen der Psychophysik*. Leipzig.
--- (1882), *Revision der Hauptpunkte der Psychophysik.* Leipzig.
--- (1887), Über die Methode der richtigen und falschen Fälle. *Abh. Kgl. Sächsische Ges. Wiss.*, Bd. 13 (22), pp. 109 – 312.
**---** (1897), *Kollektivmasslehre.* Leipzig. Редактор (и фактич. соавтор) G. F. Lipps.
**Fisher R. A.** (1920), Mathematical examination of the methods of determining the accuracy of an observation. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, vol. 80, pp. 758 – 770.
--- (1922), On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A222, pp. 309 – 368.
--- (1936), Has Mendel's work been rediscovered? *Annals of Science*, vol. 1, pp. 115 – 137.
--- (1937), Prof. Karl Pearson and the method of moments. *Annals of Eugenics*, vol. 7, pp. 303 – 318.
--- (1956), *Statistical Methods and Statistical Inference*. In author's *Stat. Methods, Exp. Design and Scient. Inference*. Oxford, 1990. Перепечатка издания 1973 г. с отдельной пагинацией.
**Fletcher A., Miller J. C. P. et al** (1946), *Index of Mathematical Tables*, vol. 1. Oxford, 1962.
**Forsythe G. E.** (1951), Gauss to Gerling on relaxation. *Math. Tables and Other Aids to Computers*, vol. 5, pp. 255 – 258.
**Fourier J. B. J.** (1819), Extrait d'un mémoire sur la théorie analytique des assurances. *Annales chim. phys*., t. 10, pp. 177 – 189.
**---** Editor (1821 – 1829), *Recherches statistiques sur la ville de Paris et de département de la Seine*, tt. 1 – 4. Paris.
--- (1826), Sur les résultats moyens déduits d'un grand nombre d'observations. *Œuvres*, t. 2. Paris, 1890, pp. 525 – 545.
**---** (1829), Historical Eloge of the Marquis De Laplace. *London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.*, 2nd ser., vol. 6, pp. 370 – 381. *Mém. Acad. Roy. Sci. Inst. de France,* t. 10, 1831, pp. LXXX − CII.
**Fraenkel A.** (1930), G. Cantor. *Jahresber. Deutsch. Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 39, pp. 189 – 266.
**Franklin J.** (2001), *The Science of Conjecture.* Baltimore.
**Fréchet M.** (1949), Réhabilitation de la notion statistique de l'homme moyen. В книге автора *Les mathématiques et le concret.* Paris, 1955, pp. 317 – 341.
**Freud S.** (1925), Selbstdarstellung. *Werke,* Bd. 14. Frankfurt/Main, 1963, pp. 31 – 96.
**Freudenthal H.** (1951), Das Peterburger Problem in Hinblick auf Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Nachr.*, Bd. 4, pp. 184 – 192.
**---** (1961), 250 years of mathematical statistics. In *Quantitative Methods in Pharmacology.* Amsterdam, 1961, pp. xi – xx. Editor H. De Jonge.
--- (1966), De eerste ontmoeting tussen de wiskunde en de sociale wetenschappen. *Verh. Knkl. Vlaamse Acad. Wettenschappen, Letteren en Schone Kunsten Belg*., Kl. Wetenschappen, Jg. 28, No. 88. Отдельная пагинация.
--- (1971), Cauchy. *Dict. Scient. Biogr*., vol. 3, pp. 131 – 148.
**Freudenthal H., Steiner H.-G.** (1966), Aus der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik. В книге *Grundzüge der Mathematik*, Bd. 4. Göttingen, 1966, pp. 149 – 195. Editors H. Behnke et al.

**Fries J. F.** (1842), Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Sämtliche Schriften*, Bd. 14. Aalen, 1974, pp. 1 – 236/254.
**Fuss P. N.** (1843), *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII siècle*, tt. 1 – 2. New York – London, 1968.
**Galen** (Гален) (1946), *On Medical Experience.* London.
--- (1951), *Hygiene.* Springfield, Illinois.
**Galilei G. (Галилей Г.)** (1613, итал.), History and demonstrations concerning sunspots and their phenomena. В книге автора *Discoveries and opinions of Galileo.* Garden City, New York, 1957, pp. 88 – 144.
--- (1623), The Assayer. В книге Galilei G., Grassi H., Guiducci M., Kepler J. (1960), *Controversy on the Comets of 1618.* Philadelphia, pp. 151 – 336.
**---** (1632, итал.), *Диалог о двух главнейших системах мира.* М. – Л., 1948.
**Galitzin B. (Голицин Б. Б.)** (1902), Über die Festigkeit des Glasses. *Изв. Имп. Акад. Наук*, сер. 5, т. 16, №1, с. 1 – 29.
**Galle E.** (1924), Über die geodätischen Arbeiten von Gauss. В книге Gauss, *W*-11/2, Abt. 1. Отдельная пагинация.
**Galton F.** (Гальтон Ф.) (1863), *Meteorographica.* London – Cambridge.
--- (1869), *Hereditary Genius*. London – New York, 1978. [*Наследственность таланта.* СПб, 1875.]
--- (1877), Typical laws of heredity. *Nature*, vol. 15, pp. 492 – 495, 512 – 514, 532 – 533.
--- (1892), *Finger Prints.* New York, 1965.
**Gani J.** (1982), Newton on a “Question touching ye different Odds upon certain given Chances upon Dice”. *Math. Scientist*, vol. 7, pp. 61 – 66.
--- (2001), P. D. Enko. В книге Heyde & Seneta (2001, pp. 223 – 226).
**Garber D., Zabell S.** (1979), On the emergence of probability. AHES, vol. 21, pp. 33 – 53.
**Gastwirth J. L.**, Editor (2000), *Statistical Science in the Courtroom.* New York.
**Gatterer J.C.** (1775), *Ideal einer allgemeinen Weltstatistik.* Göttingen.
**Gauss C. F., Гаусс К. Ф.** (1809a, нем.), Авторское сообщение о (1809b). Русск. перевод в книге автора (1957, с. 150).
--- (1809b, латин.), Теория движения небесных тел, кн. 2, раздел 3. Там же, с. 89 – 109.
--- (1811, латин.), Исследование об эллиптических элементах Паллады. Там же, с. 111 – 120.
--- (1816, нем.), Определение точности наблюдений. Там же, с. 121 – 128.
--- (1821, нем.), Авторское сообщение о (1823b, часть 1). Там же, с. 141 – 144.
--- (1823a, нем.), Авторское сообщение о (1823b, часть 2). Там же, с. 144 – 147.
--- (1823b, латин.), Теория комбинаций наблюдений, подверженных наименьшим ошибкам, части 1 – 2. Там же, с. 17 – 57.
--- (1826, нем.), Авторское сообщение о (1828). Там же, с. 147 – 150.
--- (1828a, латин.), Теория комбинаций наблюдений ..., Дополнение. Там же, с. 59 – 88.
--- (1828b), Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona. W-9, pp. 5 – 64.
--- (написано 1845, опубл. посмертно), Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Bestimmung der Bilanz für Witwenkassen. *W*-4, 1873, pp. 119 – 183.

--- (1855), *Méthode des moindres carrés.* Paris, 1996.
--- (1860 – 1865), *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher*. W/Erg-5, No. 1 – 3. Hildesheim, 1975.
--- (1863 – 1930), *W*-1 – 12. Göttingen a.o. Перепечатка: Hildesheim, 1973 – 1981.
--- (1887), *Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate*. Hrsg. A. Börsch, P. Simon. Vaduz, 1998.
--- (1957), *Избр. геодезич. соч.*, т. 1. Ред. Г. В. Багратуни. Москва.
Переписка с **Бесселем**: W/Erg-1, 1975; с **Герлингом**: W/Erg-3, 1975; с **Ольберсом**, W/Erg-4, 1976; с **Шумахером**: W/Erg-5, Место публикации: Hildesheim.
--- (1995, Latin and English), Theory of Combination of Observations Least Subject to Error. Includes Gauss (1823a) in German and English. Translated with Afterword by G. W. Stewart. Philadelphia.
**Gavarret J.** (1840), *Principes généraux de statistique médicale.* Paris. Немецкий перевод: Эрланген, 1844.
**Gerardy T.** (1977), Die Anfänge von Gauss' geodätische Tätigkeit. *Z. f. Vermessungswesen*, Bd. 102, pp. 1 – 20.
**Gingerich O.** (1983), Ptolemy, Copernicus, and Kepler. In Adler M. G. & van Doren J., редакторы (1983), *Great Ideas Today.* Chicago, pp. 137 – 180.
--- (2002), The trouble with Ptolemy. *Isis*, vol. 93, pp. 70 – 74.
**Gini C.** (1946), Gedanken von Theorem von Bernoulli. *Z. für Volkswirtschaft u. Statistik*, 82. Jg., pp. 401 – 413.
**Girlich H.-J.** (1996), Hausdorffs Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie. In *F. Hausdorff zum Gedächtnis*, Bd. 1. Hrsg E. Brieskorn. Braunschweig – Wiesbaden, pp. 31 – 70.
**Goldstein B. R.** (1985), *The 'Astronomy' of Levi ben Gerson* (*1288 – 1344*). New York.
**Gower B.** (1993), Boscovich on probabilistic reasoning and the combination of observations. In Bursill-Hall (1993, pp. 263 – 279).
**Gowing R.** (1983), *Roger Cotes – Natural Philosopher.* Cambridge.
**Graunt J.** (1662), *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality.* Baltimore, 1939. Редактор, W. F. Willcox.
***Great Books*** (1952), *Great Books of the Western World*, vols 1 – 54. Chicago.
**Greenwood M.** (1936), Louis and the numerical method. In author's *Medical Dictator.* London, pp. 123 – 142.
--- (1941 – 1943), Medical statistics from Graunt to Farr. *Biometrika*. Reprint: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 47 – 120).
**Gridgeman N. T.** (1960), Geometric probability and the number π. *Scripta Math.*, t. 25, pp. 183 – 195.
**Gumbel E. J.** (1917), Eine Darstellung statistischer Reihe durch Euler. *Jahresber. Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 25, pp. 251 – 264.
**Guy W. A.** (1852), Statistics, medical. In *Cyclopaedia of Anatomy and Physiology*. London, vol. 4, pp. 801 – 814.
**Hagstroem K.-G.** (1940), Stochastik, ein neues – und doch ein altes Wort. *Skand. Aktuarietidskr.*, t. 23, pp. 54 – 57.
**Hald A. (Хальд А.)** (1952, англ.), *Математическая статистика с техническими приложениями.* М., 1956. [*Statistical Theory with Engineering Applications.* New York, 1960.]
**---** (1990), *History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.*

New York.
--- (1998), *History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930.* New York.
--- (2002), *On the History of Series Expansions of Frequency Functions and Sampling Distributions, 1873 – 1944.* Copenhagen, this being *Roy. Danish Acad. Sci. Letters*. Mat.-Fys. Meddelelser No. 49.
--- (2003), *The History of the Law of Large Numbers and Consistency*. Univ. Copenhagen, Dept Applied Math. & Statistics, Preprint No. 2.
--- (2004), *History of Parametric Statistical Inference from Bernoulli to Fisher, 1713 to 1935.* Copenhagen.
**Halley E.** (1694a), *An Estimate of the Degree of Mortality of Mankind*. Baltimore, 1942.
--- (1694b), Some further considerations on the Breslaw bills of mortality. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 17 for 1693, No. 198, pp. 654 – 656. Reprint of volume: New York, 1963.
**Halperin T.** (1976), *Bool's Logic and Probability*. Amsterdam, 1986.
--- (1988), The development of probability logic from Leibniz to MacColl. *Hist. and Phil. of Logic*, vol. 9, pp. 131 – 191.
**Harter H. L.** (1977, date of Intro.), *Chronological Annotated Bibliography of Order Statistics*, vol. 1. No place.
**Hartley D.** (1749), *Observations on Man*. London. Reprint of edition of 1791: Poole, 1998.
**Harvey W.** (1651, in Latin), Anatomical Exercises on the Generation of Animals. В источнике *Great Books* (1952, vol. 28, pp. 329 – 496).
**Hasofer A. M.** (1967), Random mechanisms in Talmudic literature. *Biometrika*, vol. 54, pp. 316 – 321. Enlarged version (1977): Some aspects of Talmudic probabilistic thought. In *Proc. Assoc. Orthodox Jewish Scientists*, vol. 2. Jerusalem, pp. 63 – 80.
**Hausdorff F.** (2006), *Ges. Werke*, Bd. 5. Berlin.
**Haushofer D. M.** (1872), *Lehr- und Handbuch der Statistik.* Wien.
**Hegel G. W. F.** (1812), *Wissenschaft der Logik*, Tl. 1. Hamburg, 1978. [Berlin, 2002.] [*Наука логики. Соч*., т. 5. М., 1937.]
**Hellman C. D.** (1970), Brahe. *Dict. Scient. Biogr*, vol. 2, pp. 401 – 416.
**Helmert F. R.** (1868), Studien über rationelle Vermessungen im Gebiete der höhern Geodäsie. *Z. Math. Phys*., Bd. 13, pp. 73 – 120, 163 – 186.
--- (1872), *Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.* Последующие издания: 1907 and 1924 (Leipzig). Русский перевод с изд. 1907 г.: *Уравновешивание по способу наименьших квадратов.* М., 1914.
--- (1875a), Über die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Anzahl wahrer Beobachtungsfehler. *Z. Math. Phys.*, Bd. 20, pp. 300 – 303.
--- (1875b), Über die Formeln für den Durchschnittsfehler. *Astron. Nachr.*, Bd. 85, pp. 353 – 366.
--- (1876a), Genauigkeit der Formel von Peters zur Berechnung des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers direkter Beobachtungen. Там же, Bd. 88, pp. 113 – 132.
--- (1876b), Über die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler. *Z. Math. Phys.*, Bd. 21, pp. 192 – 218.
--- (1886), *Lotabweichungen*, Heft 1. Berlin.
--- (1905), Über die Genauigkeit der Kriterien des Zufalls bei Beobachtungsreihen. *Sitz. Ber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.*, Phys.-Math. Cl., Halbbd. 1, pp. 594 – 612. В книге автора (1993, pp. 189 – 208).

--- (1993), *Akademie-Vorträge.* Frankfurt am Main. Перепечатки статей автора, опубликованных Прусской Акад. Наук.
**Hendriks F.** (1852 – 1853), Contributions to the history of insurance. *Assurance Mag.*, vol. 2, pp. 121 – 150, 222 – 258; vol. 3, pp. 93 – 120.
--- (1863), Notes on the early history of tontines. *J. Inst. Actuaries*, vol. 10, pp. 205 – 219.
**Henny J.** (1975), Niklaus und Johann Bernoullis Forschungen auf dem Gebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrem Briefwechsel mit Montmort. In J. Bernoulli (1975, pp. 457 – 507).
**Henry M. Ch.** (1883), *Correspondance inédite de Condorcet et de Turgot*. Genève, 1970.
**Hermann D. B.** (1976), Some aspects of positional astronomy from Bradley to Bessel. *Vistas in Astronomy*, vol. 20, No. 1 – 2, pp. 183 – 186.
**Herschel J.** (1850), [Рецензия на] Quetelet (1846). *Edinb. Rev., Or, Critical J.*, vol. 92, No. 185, pp. 1 – 57. Опубл. анонимно.
--- (1861, Lecture), Sun. In author's *Familiar Lectures on Scientific Subjects*. London – New York, 1866, pp. 47 – 90.
**Herschel W.** (1783), On the proper motion of the Sun. В книге автора (1912, vol. 1, pp. 108 – 130).
--- (1784), Account of some observations. Там же, т. 2, с. 157 – 166.
--- (1805), On the direction and motion of the Sun. Там же, с. 317 – 331.
--- (1806), On the quantity and velocity of the solar motion. Там же, с. 338 – 359.
--- (1817), Astronomical observations and experiments tending to investigate the local arrangement of celestial bodies in space. Там же, с. 575 – 591.
--- (1912), *Scientific Papers*, vols 1 – 2. London. [Bristol, 2003.]
**Hertz H.** (1894), *Die Principien der Mechanik*, this being the author's *Ges. Werke*, Bd. 3. Leipzig.
**Heyde C. C., Seneta E.** (1977), *Bienaymé.* Berlin.
---, Editors (2001), *Statisticians of the Centuries.* New York.
**Hill D., Elkin W. L.** (1884), Heliometer-determination of stellar parallax. *Mem. Roy. Astron. Soc.*, vol. 48, pt. 1 (вся часть 1).
**Hippocrates** (1952a), On the epidemics. В книге *Great Books* (1952, vol. 10, pp. 44 – 63).
--- (1952b), On fractures. Там же, с. 74 – 91.
--- (1952c), Aphorisms. Там же, с. 131 – 144. [*Афоризмы*. СПб, 1848.]
**Hobbes T., Гоббс Т.** (1646), Of liberty and necessity. *English Works*, vol. 4. London, 1840, pp. 229 – 278. [О свободе и необходимости. *Избр. Произв.*, т. 1. М., 1965, с. 517 – 560.]
**Hochkirchen C.** (1999), *Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Göttingen.
**Hogan E. R.** (1977), R. Adrain: American mathematician. *Hist. Math.*, vol. 4, pp. 157 – 172.
**Hostinský B.** (1932), Application du calcul des probabilités à la théorie du mouvement Brownien. *Annales Inst. H. Poincaré*, t. 3, pp. 1 – 72.
**Hoyrup J.** (1983), Sixth-century intuitive probability: the statistical significance of a miracle. *Hist. Math.*, vol. 10, pp. 80 – 84.
**Hulme H. R., Symms L. S. T.** (1939), The law of error and the combination of observations. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, vol. 99, pp. 642 – 649.
**Humboldt A.** (1816), Sur les lois que l'on observe dans la distribution des formes

végétales. *Annales chim. phys*., t. 1, pp. 225 – 239.
--- (1817), Des lignes isothermes. *Mém. Phys. Chim. Soc. d'Arcueil*, t. 3, pp. 462 – 602.
--- (1818), De l'influence de la déclinaison du Soleil sur le commencement des pluies équatoriales, t. 8, pp. 179 – 190.
--- (1831), *Fragments de géologie et de climatologie asiatiques*, t. 2. Paris.
--- (1843), *Asie Centrale*, tt. 1 – 3. Paris.
--- (1845 – 1862), *Kosmos*, Bde 1 – 5 (1845, 1847, 1850, 1858, 1862). Stuttgart. [*Космос*. М., 1866 – 1871. Третье изд.] [Bde 1 – 4: Stuttgart, 1877.]
**Humboldt A., Bonpland A. J. A.** (1815 – 1825), *Nova genera et species plantarum*, tt. 1 – 7. Paris.
**Huygens C.** (1657), De calcul dans les jeux de hasard. В книге автора (1888 – 1950, t. 14, pp. 49 – 91).
--- (1888 – 1950), *Oeuvres complètes*, tt. 1 – 22. La Haye. Тома 6, 10 и 14 вышли в 1895, 1905 и 1920 гг. соответственно.
**Irwin J. O.** (1978), Gosset W. S. In Kruskal & Tanur (1978, vol. 1, pp. 409 – 413).
**Ivory J.** (1825), On the method of least squares. *London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.*, vol. 65, pp. 1 – 10, 81 – 88, 161 – 168.
--- (1826a), On the ellipticity of the Earth as deduced from experiments with the pendulum. Там же, vol. 68, pp. 3 – 10, 92 – 101.
--- (1826b), On the methods proper to be used for deducing a general formula for the length of the seconds pendulum. Там же, pp. 241 – 245.
--- (1828), Letter to the Editor relating to the ellipticity of the Earth as deduced from experiments with the pendulum. Там же, New Ser., vol. 3, pp. 241 – 243.
**---** (1830), On the figure of the Earth. Там же, vol. 7, pp. 412 – 416.
**Jennings J.** (1985), *The Journeyer*. London. This is a translation of Marco Polo's book of 1298.
**Johnson N. L., Kotz S.,** редакторы (1997), *Leading Personalities in Statistical Sciences.* New York. Сборник биографий, частично перепечатанных из Kotz & Johnson (1982 – 1989). Второе издание последнего источника: *Enc. of Statistical Sciences*. Hoboken, New Jersey, 2006.
**Jorland G.** (1987), The Saint Petersburg paradox 1713 – 1937. In *The Probabilistic Revolution*, vols 1 – 2. Cambridge (Mass.), 1987, vol. 1, pp. 157 – 190. Редакторы, L. Krüger, G. Gigerenzer, M. S. Morgan.
**Junkersfeld J.** (1945), *The Aristotelian – Thomistic Concept of Chance*. Notre Dame, Indiana.
**Juskevic A. P., Winter E., Hoffmann P.,** редакторы (1959), *Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften in Briefwechsels Eulers*, Bd. 1. Berlin.
**Kac M.** (1939), On a characterization of the normal distribution. В книге автора *Probability, Number Theory and Statistical Physics.* Cambridge (Mass.), 1979, pp. 77 – 79.
**Kamke E.** (1933), Über neuere Begründungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Jahresber. Deutsche Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 42, pp. 14 – 27.
**Kant I., Кант И.** (1755), Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels. *Ges. Schriften*, Bd. 1. Berlin, 1910, pp. 215 – 368. [Erlangen, 1988.] [Всеобщая естественная история и теория неба. *Сочинения*, т. 1. Москва, 1963, с. 117 – 262.]
--- (1763), Der einzig mögliche Beweisgrund zu einer Demonstration des Daseins Gottes. Там же, т. 2, 1912, с. 63 – 163. [Erlangen, 1984.] [Единственно

возможное основание для доказательства бытия Бога. *Сочинения*, т. 1, с. 393 – 508.]
**Kapteyn J. C.** (1906a), *Plan of Selected Areas.* Groningen.
--- (1906b), Statistical methods in stellar astronomy. [*Reports*] *Intern. Congr. Arts & Sci. St. Louis 1904*. Б.м., vol. 4, 1906, pp. 396 – 425.
--- (1909), Recent researches in the structure of the universe. *Annual Rept Smithsonian Instn* за 1908, pp. 301 – 319.
--- (1912), Definition of the correlation-coefficient. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, vol. 72, pp. 518 – 525.
**Karn M. Noel** (1931), An inquiry into various death-rates and the comparative influence of certain diseases on the duration of life. *Annals of Eugenics*, vol. 4, pp. 279 – 326.
**Kendall D. G.** (1975), The genealogy of genealogy: branching processes before (and after) 1873. *Bull. London Math. Soc.*, vol. 7, pp. 225 – 253.
**Kendall M. G. (Sir Maurice)** (1951), George Udny Yule, 1871 – 1951. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. 115A, pp. 156 – 161.
**---** (1956), The beginnings of a probability calculus. *Biometrika*, vol. 43, pp. 1 – 14. Перепечатка: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 19 – 34).
--- (1960), Where shall the history of statistics begin? *Biometrika*, vol. 47, pp. 447 – 449. Перепечатка: там же, pp. 45 – 46.
--- (1968), F. Y. Edgeworth. *Biometrika*, vol. 55, pp. 269 – 275. Перепечатка: там же, pp. 257 – 263.
--- (1971), The work of Ernst Abbe. *Biometrika*, vol. 58, pp. 369 – 373. Перепечатка: M. G. Kendall & Plackett (1977, pp. 331 – 335).
**Kendall M. G., Doig A. G.** (1962 – 1968), *Bibliography of Statistical Literature*, vols 1 – 3. Хронологический охват: т. 3, 1968, – литература до 1940 г. с дополнениями к тт. 1 и 2 за последующие годы; т. 2, 1965, – период 1940 – 1949; т. 1, 1962, – период 1950 – 1958. Edinburgh.
**Kendall M. G., Moran P. A. P.** (1963), *Geometrical Probabilities.* London. [Кендалл М., Моран П. (1972), *Геометрические вероятности*. М.]
**Kendall M. G., Plackett R. L.,** редакторы (1977), *Studies in the History of Statistics and Probability*, vol. 2. London. Сборник перепечаток статей по истории теории вероятностей, математической статистики и статистики.
**Kepler J.** (1596, латин.). Второе изд., 1621. *Weltgeheimnis.* Augsburg, 1923.
--- (1604, латин.), Thorough description of an extraordinary new star. *Vistas in Astron.*, vol. 20, 1977, pp. 333 – 339.
--- (1606, in Latin), *Über den neuen Stern im Fuß des Schlangenträger*. Würzburg, 2006.
--- (1609, латин.), *New Astronomy.* Cambridge, 1992.
--- (1610), Tertius interveniens. Das ist Warnung an etliche Theologos, Medicos und Philosophos. *Ges. Werke*, Bd. 4. München, 1941, pp. 149 – 258.
--- (1619, in Latin), *Welt-Harmonik*. München – Berlin, 1939. *Harmony of the World*. Philadelphia, 1997.
--- (1620 – 1621, in Latin), *Epitome of Copernican Astronomy*, Books 4 and 5. *Great Books* (1952, vol. 16, pp. 845 – 1004).
**Keynes J. M.** (1921), *Treatise on Probability. Coll. Writings*, vol. 8. London, 1973.
**Kington J. A.** (1974), The Societas Meteorologica Palatina. *Weather*, vol. 29, No. 11, pp. 416 – 426.
**Knapp G. F.** (1872a), Quetelet als Theoretiker. JNÖS, Bd. 18, pp. 89 – 124.

--- (1872b), Darwin und die Sozialwissenschaften. Там же, pp. 233 – 247.
**Knauer K.** (1955), Grundfragen einer mathematischen Stilistik. *Forschungen und Fortschritte*, Bd. 29, pp. 140 – 149.
**Knies C. G. A.** (1850), *Die Statistik als selbstständige Wissenschaft*. Kassel. [Frankfurt, 1969.]
**Knott C. G.** (1911), *Life and Work of P. G. Tait*. Cambridge.
**Kohli K.** (1975a), Spieldauer: von J. Bernoullis Lösung der fünfte Aufgabe von Huygens bis zu den Arbeiten von de Moivre. В книге J. Bernoulli (1975, pp. 403 – 455).
--- (1975b), Aus dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Jakob Bernoulli. Там же, с. 509 – 513.
--- (1975c), Kommentar zur Dissertation von N. Bernoulli. Там же, с. 541 – 556.
**Kohli K., van der Waerden B. L.** (1975), Bewertung von Leibrenten. Там же, с. 515 – 539.
**Koopman B. O.** (1940), The bases of probability. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 46, pp. 763 – 774.
**Körber H.-G.** (1959), Über Humboldts Arbeiten zur Meteorologie und Klimatologie. *Humboldt Gedenkschrift*. Berlin, pp. 289 – 335.
**Kotz S., Johnson N. L.,** редакторы (1982 – 1989), *Enc. of Statistical Sciences*, vols 1 – 9 + Supplement volume. New York.
**Kotz S., Read C. D., Banks D. L.,** редакторы (1997 – 1999), *Update Volumes* 1 – 3 к Kotz & Johnson (1982 – 1989). New York.
**Krengel U.** (June 2011), On the contributions of G. Bohlmann to probability theory. *J. Electron. Hist. Prob. Stat.*, www.jehps.net
**Kronecker L.** (1894), *Vorlesungen über Mathematik*, Bd. 1. Leipzig.
**---** (1901), *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. 1. Leipzig.
**Kruskal W.** (1946), Helmert's distribution. *Amer. Math. Monthly*, vol. 53, pp. 435 – 438.
--- (1978), Formulas, numbers, words: statistics in prose. In: *New Directions for Methodology of Social and Behavioral Science.* San Francisco, 1981. Редактор, D. Fiske, pp. 93 – 102.
**---** (1988), Miracles and statistics: the casual assumption of independence. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 83, pp. 929 – 940.
**Kruskal W., Tanur J. M.,** редакторы (1978), *International Encyclopedia of Statistics*, vols 1 – 2. New York.
**Ku H. H.**, редактор (1969), *Precision Measurement and Calibration.* Nat. Bureau Standards Sp. Publ. 300, vol. 1. Washington.
**Lacombe H., Costable P.**, редакторы (1988), *La figure de la Terre du XVIII*$^{e}$ *siècle à l'ère spatiale.* Paris.
**Lacroix S.- F.** (1816), *Traité élémentaire du calcul des probabilités.* Последующие изд.: 1828, 1833, 1864; нем. перевод, Эрфурт, 1818.
**Lagrange J. L.** (1776), Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations. *Oeuvr.*, t. 2. Paris, 1868, pp. 173 – 236.
--- (1777), Recherches sur les suites récurrentes. *Oeuvr.*, t. 4. Paris, 1869, pp. 151 – 251.
**Lamarck J. B.** (1800 – 1811), *Annuaire météorologique*, tt. 1 – 11. Paris. Очень редкое издание.
**---** (1809), *Philosophie zoologique*, t. 2. Paris, 1873. [*Философия зоологии*. В книге автора *Избр. Произв.*, т. 1. М., 1955, с. 165 – 775.]

--- (1815), *Histoire naturelle des animaux sans vertèbres*, t. 1. Paris. [*Естественная история беспозвоночных животных*. Там же, т. 2. М., 1959, с. 8 – 296.]
--- (1817), Espèce. *Nouv. Dict. Hist. Natur.*, t. 10, pp. 441 – 451. [Вид. Там же, с. 301 – 312.]
**Lambert J. H.** (1760), *Photometria.* Augsburg.
--- (1765a), Anmerkungen und Zusätze zur practischen Geometrie. В книге автора *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, Tl. 1. Berlin, 1765, pp. 1 – 313.
--- (1765b), Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche. Там же, pp. 424 – 488.
--- (1771), *Anlage zur Architektonik*, Bd. 1. Hildesheim, 1965.
--- (1772), Anmerkungen über die Sterblichkeit, Todtenlisten, Geburthen und Ehen. *Beyträge*, Tl. 3. Berlin, 1772, pp. 476 – 569.
--- (1772 – 1775), Essai de taxéometrie ou sur la mesure de l'ordre. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci. et Belles-Lettres Berlin* 1770; pp. 327 – 342; 1773, pp. 347 – 368.
**---** (1773), Observations sur l'influence de la Lune dans le poids de l'atmosphère. *Nouv. Mém. Acad. Roy. Sci. Berlin* pour 1771, pp. 66 – 73.
**Lamont J.** (ca. 1839), Nachricht über die meteorologische Bestimmung der Königreiches Bayern. In author's *Jahrb. Kgl. Sternwarte bei München* f. 1839, pp. 256 – 264, and, with wrong paging, 247 – 249
**---** (1867), Über die Bedeutung arithmetischer Mittelwerthe in der Meteorologie. *Z. Öster. Ges. Met.*, Bd. 2, No. 11, pp. 241 – 247.
**Langevin P.** (1913), La physique du discontinu. In collected articles *Les progrès de la physique moléculaire*. Paris, 1914, pp. 1 – 46.
**Laplace P. S.** (1774), Sur la probabilité des causes par les événements. OC, t. 8. Paris, 1891, pp. 27 – 65.
--- (1776), Recherches sur l'intégration des équations différentielles aux différences finies. Там же, pp. 69 – 197.
--- (1781), Sur les probabilités. OC, t. 9. Paris, 1893, pp. 383 – 485.
--- (1786), Suite du mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres. OC, t. 10. Paris, 1894, pp. 295 – 338.
--- (1789), Sur quelques points du système du monde. OC, t. 11. Paris, 1895, pp. 477 – 558.
--- (1796, франц.), *Изложение системы мира.* СПб, 1861. Л., 1982.
--- (1798 – 1825), *Traité de mécanique céleste.* OC, tt. 1 – 5. Paris, 1878 – 1882. Англ. перевод (N. Bowditch): *Celestial Mechanics* (1832), vols 1 – 4. New York, 1966.
--- (1810a), Sur les approximations des formules qui sont fonctions de très grands nombres et sur leur application aux probabilités. OC, t. 12. Paris, 1898, pp. 301 – 345.
--- (1810b), То же самое название, Supplement. Там же, pp. 349 – 353.
--- (1811), Sur les intégrales définies. Там же, pp. 357 – 412.
--- (1812), *Théorie analytique des probabilités.* OC, t. 7, No. 1 – 2. Paris, 1886. Монография состоит из двух частей, Введения (1814) и дополнений, см. ниже. Собственно теории вероятностей посвящена вторая часть.
--- (1814), *Essai philosophique sur les probabilités.* В книге автора (1812/1886, No. 1, отдельная пагинация). Русский перевод 1908 г. перепечатан в книге Прохоров (1999b, с. 834 – 863).

--- (1816), *Théor. Anal. Prob.*, *Supplément 1.* OC, t. 7, No. 2, pp. 497 – 530.
--- (1818), *Théor. Anal. Prob.*, *Supplément 2.* Там же, с. 531 – 580.
--- (ca. 1819), *Théor. Anal. Prob., Supplément 3.* Там же, с. 581 – 616.
--- (1827), Sur le flux et reflux lunaire atmosphérique. OC, t. 13. Paris, 1904, pp. 342 – 358.
**Laurent H.** (1873), *Traité du calcul des probabilités.* Paris.
**Le Cam L.** (1986), The central limit theorem around 1935. *Stat. Sci.*, vol. 1, pp. 78 – 96.
**Legendre A. M.** (1805), *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes.* Paris.
--- (1814), Méthode des moindres quarrés. *Mém. Acad. Sci. Paris, Cl. Sci., Math. et Phys.*, t. 11, pt. 2, année 1810, pp. 149 – 154.
**---** (1820), *Nouvelles méthodes* …, Suppl. 2. Paris.
**Lehmann-Filhès R.** (1887), Über abnorme Fehlervertheilung und Verwerfung zweifelhafter Beobachtungen. *Astron. Nachr.*, Bd. 117, pp. 121 – 132.
**Leibniz G. W., Лейбниц Г. В.** (1704), *Neue Abhandlungen über menschlichen Verstand.* Hamburg, 1996. [*Новые опыты о человеческом разуме.* М. – Л., 1936.]
--- (1960, рукопись 1686), Allgemeine Untersuchungen über die Analyse der Begriffe und wahren Sätze. В книге автора *Fragmente zur Logik.* Berlin, 1960, pp. 241 – 303.
--- (1970), *Sämmtl. Schriften und Briefe*, 8. Reihe, Bd. 1. Berlin.
--- (1971a, рукопись 1668 – 1669(?)), Demonstrationum Catholicarum conspectus. *Sämmtl. Schriften und Briefe*, 6. Reihe, Bd. 1. Berlin, 1971, pp. 494 – 500.
--- (1971b), *Math. Schriften*, 1. Reihe, Bd. 3. Hildesheim.
--- (1986), *Sämmtl. Schriften und Briefe*, 4. Reihe, Bd. 3. Berlin.
--- (2000), *Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik.* Berlin. Редакторы, E. Knobloch и др.
**Levi ben Gerson** (1999), *The Wars of the Lord*, vol. 3. New York.
**Lévy, M.** (1844), *Traité d'hygiene.* Paris, 1862.
**Lévy P.** (1925), *Calcul des probabilités.* Paris.
**Lexis W., Лексис В.** (1874, доклад), Naturwissenschaft und Sozialwissenschaft. В книге автора (1903, pp. 233 – 251).
--- (1876), Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. JNÖS, Bd. 27, pp. 209 – 245. Reprinted in author's book (1903, pp. 130 – 169).
--- (1877), *Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft.* Freiburg i/Bayern.
--- (1879, нем.), О теории стабильности статистических рядов. В книге Четвериков (1968, с. 5 – 38).
--- (1886), Über die Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendung auf die Statistik. JNÖS, Bd. 13 (47), pp. 433 – 450.
--- (1903), *Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik.* Jena.
--- (1913), Рецензия на книгу А. А. Кауфмана *Theorie und Methoden des Statistik.* Tübingen, 1913. [Ср. Кауфман (1922).] *Schmollers Jahrbuch f. Gesetzgebung, Verwaltung u. Volkswirtschaft in Deutschen Reiche*, Bd. 37, pp. 2089 – 2092.
**Libri-Carrucci G. B. I. T., Lacroix S. F., Poisson S.-D.** (1834), Отчет о рукописи Bienaymé (1838). *Procès verbaux des séances, Acad. Sci. Paris*, t. 10, pp. 533 – 535.

**Liebermeister C.** (ca. 1876), Über Wahrscheinlichkeitsrechnung in Anwendung auf therapeutische Statistik. *Sammlung klinischer Vorträge* No. 110 (Innere Medizin No. 39). Leipzig, pp. 935 – 961.
**Lindeberg J. W.** (1922a), Über das Exponentialgesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Annales Acad. Scient. Fennicae*, t. A16 за 1920, No. 1, pp. 1 – 23.
--- (1922b), Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Z.*, Bd. 15, pp. 211 – 225.
**Lipschitz R.** (1890), Sur la combinaison des observations. *C. r. Acad. Roy. Sci. Paris*, t. 111, pp. 163 – 166.
**Louis P. C. A.** (1825), *Recherches anatomico-pathologiques sur la phtisie*. Paris.
**Loveland J.** (2001), Buffon, the certainty of sunrise, and the probabilistic reductio ad absurdum. AHES, vol. 55, pp. 465 – 477.
**Lubbock W., Drinkwater Bethune J. E.** (1830), *Treatise on Probability*. Appended to Jones D. (1844), *On the Values of Annuities*, vol. 2. London.
**Lueder A. F.** (1812), *Kritik der Statistik und Politik.* Göttingen.
**Mach E.** (1897), *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*. Leipzig. Third edition.
**Maciejewski C.** (1911), *Nouveaux fondements de la théorie de la statistique.* Paris.
**Maennchen Ph.** (1930), Gauss als Zahlenrechner. В книге Gauss, *W*-10/2, No. 6. Отдельная пагинация.
**Mahalanobis P. C.** (1936), Note on the statistical and biometric writings of K. Pearson. *Sankhya*, vol. 2, pp. 411 – 422.
**Maimonides M.** (1975), *Introduction to the Talmud*. New York.
**Maire [C.], Boscovich [R. J.]** (1770), *Voyage astronomique et géographique dans l'État de l'Église.* Paris.
**Malthus T. R.** (1798), *Essay on the Principle of Population*. *Works*, vol. 1. London, 1986. [*Опыт закона о народонаселении*. М., 1895.]
**Mansion P.** (1904), Sur la portée objective du calcul des probabilités. *Mathesis*, sér. 3, t. 4. Suppl. 2, separate paging.
**Marsden B. G.** (1995), 18- and 19-th century developments in the theory and practice of orbit determination. В книге *General History of Astronomy*, vol. 2B. Editors, R. Taton, C. Wilson. Cambridge, pp. 181 – 190.
**Matthiesen L.** (1867), Vermischtes aus dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Arch. Math. Phys.*, Bd. 47, pp. 457 – 460.
**Maupertuis P. L. M.** (1738), Relation du voyage fait par l'ordre du Roi au cercle polaire pour déterminer la figure de la Terre. *Œuvres*, t. 3. Lyon, 1756, pp. 68 – 175. [Lyon, 1768.]
--- (1745), Venus physique. *Oeuvres*, t. 2. Lyon, pp. 1 – 133.
--- (1756a), Sur la divination. Там же, pp. 298 – 306. [Lyon, 1768.]
--- (1756b), Opérations pour déterminer la figure de la Terre et les variations de la pesanteur. *Œuvres*, t. 4. Lyon, pp. 285 – 346. [Lyon, 1768.]
**Maxwell J. C.** (1860), Illustrations of the dynamical theory of gases. В книге автора (1890, vol. 1, pp. 377 – 410). [Пояснения к динамической теории газов. В книге *Основатели кинетической теории материи*. М. – Л., 1937, с. 187 – 220.]
--- (1867), On the dynamical theory of gases. Там же, vol. 2, pp. 26 – 78.
--- (1871), Introductory lecture on experimental physics. Там же, pp. 241 – 255.
--- (1873a), Molecules. In Maxwell (1890, vol. 2, pp. 361 – 378).
--- (1873b, доклад), Does the progress of physical science tend to give any advantage to the opinion of necessity over that of the contingency of events. В книге

Campbell & Garnett (1882, pp. 357 – 366).
--- (1873c), *Matter and Motion*. London.
--- (1875), On the dynamical evidence of the molecular constitution of bodies. In Maxwell (1890, vol. 2, pp. 418 – 438).
--- (1879), On Boltzmann’s theorem. В книге автора (1890, vol. 2, pp. 713 – 741).
--- (1890), *Scientific Papers*, vols 1 – 2. [New York, 1965.]
**---** (1990 – 2002), *Scientific Letters and Papers*, vols 1 – 3. Cambridge.
**May K. O.** (1972), Gauss. *Dict. Scient. Biogr.*, vol. 5, pp. 298 – 315.
**Mayer T.** (1750), Abhandlung über die Umwälzung des Mondes um seine Axe. *Kosmograph. Nachr. u. Samml.* за 1748, pp. 52 – 183.
**Meadowcroft L. V.** (1920), On Laplace’s theorem on simultaneous errors. *Messenger Math.*, vol. 48, pp. 40 – 48.
**Méchain P. F. A., Delambre J. B. J.** (1810), *Base du système métrique décimal*, t. 3. Paris. [Мешен П. Ф. А., Деламбр Ж. Б. Ж. (1926), *Основы метрической десятичной системы*. М. − Л.]
**Mendelsohn M.** (1761), Über die Wahrscheinlichkeit. *Phil. Schriften*, Tl. 2. Berlin, pp. 189 – 228.
**Merian P.** (1830), D. Huber. В книге *Verh. Allg. schweiz. Ges. ges. Naturwiss. in ihrer 16. Jahresversamml. 1830.* St. Gallen, pp. 145 – 152.
**Merrington M. et al** (1983), *List of the Papers and Correspondence of Karl Pearson*. London.
**Meyer Hugo** (1891), *Anleitung zur Bearbeitung meteorologischer Beobachtungen.* Berlin.
**Michell J.** (1767), An inquiry into the probable parallax and magnitude of the fixed stars. *Phil. Trans. Roy. Soc. Abridged*, vol. 12, 1809, pp. 423 – 438.
**Mises R. von, Мизес Р.** (1919), Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Math. Z.*, Bd. 4, pp. 1 – 97. Частично перепечатано в книге автора (1964a, pp. 35 – 56).
--- (1928), *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit.* Wien. Последующие изд., например, Вена, 1972. *Вероятность и статистика.* М., 1930.
--- (1964a), *Selected Papers*, vol. 2. Providence, Rhode Island.
--- (1964b), *Mathematical Theory of Probability and Statistics.* New York. Редактор, H. Geiringer.
**Molina E. C.** (1930), The theory of probability: some comments on Laplace’s Théorie analytique. *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 36, pp. 369 – 392.
--- (1936), A Laplacean expansion for Hermitian – Laplace functions of high order. *Bell Syst. Techn. J.*, vol. 15, pp. 355 – 362.
**Mondesir E.** (1837), Solution d’une question qui se présente dans le calcul des probabilités. *J. math. pures et appl.*, t. 2, pp. 3 – 10.
**Montmort P. R.** (1708), *Essay d’analyse sur les jeux de hazard.* Второе издание, 1713. New York, 1980. Опубл. анонимно.
**Montucla J. E.** (an X, 1802), *Histoire des mathématiques*, t. 3. Paris.
**Moreau de Jonnès A.** (1847), *Eléments de statistique.* Paris.
**Moore P. G.** (1978), Runs. В книге Kruskal & Tanur (1978, vol. 1, pp. 655 – 661).
**Morant G. M. et al** (1939), *Bibliography of the Statistical and Other Writings of Karl Pearson*. London.
**Mouat F. J.** (1885), History of the Statistical Society of London. *Jubilee Volume of the Stat. Soc. London*, pp. 14 – 71.
**Muncke G. W.** (1837), Meteorologie. *Gehler’s Phys. Wörterbuch*, Bd. 6/3. Leipzig,

pp. 1817 – 2083.
**Needham J.** (1962), *Science and Civilisation in China*, vol. 4, pt. 1. Cambridge.
**Neugebauer O.** (1948), Mathematical methods in ancient astronomy. В книге автора (1983, pp. 99 – 127).
--- (1950), The alleged Babylonian discovery of the precession of the equinoxes. Там же, pp. 247 – 254.
--- (1975), *History of Ancient Mathematical Astronomy*, pts 1 – 3. Berlin. [Berlin, 2004.]
--- (1983), *Astronomy and History. Sel. Essays.* New York.
**Newcomb S.** (1859 – 1861), Notes on the theory of probability. *Math. Monthly*, vol. 1, pp. 136 – 139, 233 – 235, 331 – 335; vol. 2, pp. 134 – 140, 272 – 275; vol. 3, pp. 119 – 125, 343 – 349.
--- (1860), [Discussion of the principles of probability theory]. *Proc. Amer. Acad. Arts and Sciences*, vol. 4 за 1857 – 1860, pp. 433 – 440.
**---** (1861a), On the secular variations and mutual relations of the orbits of the asteroids. *Mem. Amer. Acad. Arts and Sciences*, new ser., vol. 8, pt. 1, pp. 123 – 152.
--- (1861b), Solution of problem. *Math. Monthly*, vol. 3, pp. 68 – 69.
--- (1862), Determination of the law of distribution of the nodes and perihelia of the small planets. *Astron. Nachr.*, Bd. 58, pp. 210 – 220.
**---** (1867), Investigation of the orbit of Neptune. *Smithsonian Contr. to Knowledge*, vol. 15. Отдельная пагинация.
--- (1872), *On the Right Ascensions of the Equatorial Fundamental Stars.* Washington.
--- (1874), Investigation of the orbit of Uranus. *Smithsonian Contr. to Knowledge*, vol. 19. Отдельная пагинация.
--- (1878), Researches of the motion of the Moon, pt. 1. *Wash. Observations* за 1875, Appendix 2.
--- (1881), Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers. *Amer. J. Math.*, vol. 4, pp. 39 – 40.
--- (1886), A generalized theory of the combinations of observations. Там же, vol. 8, pp. 343 – 366.
--- (1892), On the law and the period of the variation of terrestrial latitudes. *Astron. Nachr.*, Bd. 130, pp. 1 – 6.
--- (1895), *The Elements of the Four Inner Planets and the Fundamental Constants of Astronomy.* Washington.
--- (1896), On the solar motion as a gauge of stellar distances. *Astron. J.*, vol. 17, pp. 41 – 44.
--- (1897a), A new determination of the precessional constant. *Astron. Papers*, vol. 8, pp. 1 – 76.
--- (1897b), A new determination of the precessional motion. *Astron. J.*, vol. 17, pp. 161 – 167.
--- (1900), On the distribution of the mean motions of the minor planets. *Astron. J.*, vol. 20, pp. 165 – 166.
--- (1901), On the period of the Solar spots. *Astrophys. J.*, vol. 13, pp. 1 – 14.
--- (1902a), On the statistical relations among the parallaxes and the proper motions of the stars. *Astron. J.*, vol. 22, pp. 165 – 169.
--- (1902b), The Universe as an organism. В книге автора *Sidelights on Astronomy.* New York – London, 1906, pp. 300 – 311.

--- (1904a), *On the Position of the Galactic.* Carnegie Instn of Wash., *Publ.* No. 10.
--- (1904b), *Statistical Inquiry into the Probability of Causes of Sex in Human Offsping.* Там же, *Publ.* No. 11. **S, G,** 95.
**Newcomb S., Holden E. S.** (1874), On the possible periodic changes of the Sun's apparent diameter. *Amer. J. Sci.*, ser. 3, vol. 8 (108), pp. 268 – 277.
**Newton I.** (1704, англ.), *Оптика* (1927). М., 1954. [London, 1931.]
--- (1728), *Chronology of Ancient Kingdoms Amended.* London. [London, 1770.]
--- (1687/1729, латин.), *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Berkeley, 1960. [*Математические начала натуральной философии* (1915 – 1916). М., 1989.]
--- (1958), *Papers and Letters on Natural Philosophy.* Cambridge.
--- (1967), *Mathematical Papers*, vol. 1. Cambridge.
**Newton R. R.** (1977), *The Crime of Claudius Ptolemy.* Baltimore.
**Neyman J.** (1934), On two different aspects of the representative method. *J. Roy. Stat. Soc.*, vol. 97, pp. 558 – 625. Перепечатка в книге автора (1967, pp. 98 – 141).
--- (1938a, англ.), Статистическая оценка как проблема классической теории вероятностей. УМН, т. 10, 1944, с. 207 – 229.
--- (1938b), *Lectures and Conferences on Mathematical Statistics and Probability*. Washington, 1952.
--- (1967), *Selection of Early Statistical Papers.* Berkeley.
**Olbers W.** (1816), Über den veränderlichen Stern … *Z. f. Astron*., Bd. 2, pp. 181 – 198.
**Ore O.** (1960), Pascal and the invention of probability theory. *Amer. Math. Monthly*, vol. 67, pp. 409 – 419.
**---** (1963), *Cardano, the Gambling Scholar.* Princeton.
**Oresme N.** (1966), *De proportionibus proportionum* и *Ad pauca respicientes.* Редактор E. Grant. Madison. С английским переводом. Написано в XIV в.
**Öttinger L.** (1843), Untersuchungen über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. *J. reine angew. Math*., Bd. 26, pp. 217 – 267, 311 – 332.
**Pannekouk A.** (1961), *History of Astronomy*. New York, 1989.
**Parisot S.-A.** (1810), *Traité du calcul conjectural*. Paris.
**Pascal B.** (1654a), [Переписка с П. Ферма] (франц.). OC, t. 1, pp. 145 – 166.
--- (1654b, латин. и франц.), A la très illustre Académie Parisienne de Mathématique. Там же, с. 169 – 173.
--- (1665), *Traité du triangle arithmétique.* Там же, с. 282 – 327.
**---** (1669). *Pensées.* Сборник рукописных отрывков. OC, t. 2, pp. 543 – 1046. [*Мысли.* М., 1899.]
--- (1998 – 2000), *Oeuvres complètes*, tt. 1 – 2. Paris.
**Paty M.** (1988), D'Alembert et les probabilités. В книге Rashed R., редактор, *Sciences à l'époque de la Révolution française.* Paris, pp. 203 – 265.
**Pearson E. S.** (1936 – 1937), K. Pearson: an appreciation of some aspects of his life and work. *Biometrika*, vol. 28, pp. 193 – 257; vol. 29, pp. 161 – 248.
**---** (1990), *"Student". A Statistical Biography*. Editors, R. L. Plackett, G. A. Barnard. Oxford.
**Pearson E. S., Kendall M. G.,** редакторы (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability* [vol. 1]. London. Сборник перепечаток статей по истории теории вероятностей, математической статистики и статистики.
**Pearson K.** (1887), On a certain atomic hypothesis. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol.

14, pp. 71 – 120.
--- (1891), Atom squirts. *Amer. J. Math.*, vol. 13, pp. 309 – 362.
--- (1892, англ.), *Грамматика науки.* СПб, 1911. [Англ. изд.: New York, 2004.]
--- (1894), On the dissection of asymmetrical frequency curves. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A185, pp. 71 – 110.
**---** (1896), Skew variation in homogeneous material. Там же, vol. A186, pp. 343 – 414.
--- (1898), Cloudiness. *Proc. Roy. Soc.*, vol. 62, pp. 287 – 290.
--- (1900), On a criterion that a given system of deviations … can be reasonably supposed to have arisen from random sampling. *London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag.*, ser. 5, vol. 50, pp. 157 – 175.
--- (1904), On a generalized theory of alternative inheritance … *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A203, pp. 53 – 86.
--- (1905), Das Fehlergesetz und seine Verallgemeinerung durch Fechner und Pearson: a rejoinder. *Biometrika*, vol. 4, pp. 169 – 212.
--- (1907), On correlation and methods of modern statistics. *Nature*, vol. 76, pp. 577 – 578, 613 – 615, 662.
--- (1914 – 1930), *Life, Letters and Labours of Fr. Galton*, vols 1, 2, 3A, 3B. Cambridge.
--- (1919), Peccavimus! *Biometrika*, vol. 12, pp. 259 – 281. Опубл. анонимно.
--- (1920), Notes on the history of correlation. *Biometrika*, vol. 55, pp. 459 – 467. Перепечатка: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 185 – 205).
--- (1923), *Darwin*. London.
--- (1925), James Bernoulli’s theorem. *Biometrika*, vol. 17, pp. 201 – 210.
--- (1926), A. De Moivre. *Nature*, vol. 117, pp. 551 – 552.
--- (1928a), On a method of ascertaining limits to the actual number of marked individuals … from a sample. *Biometrika*, vol. 20A, pp. 149 – 174.
--- (1928b), The contribution of G. Plana to the normal bivariate frequency surface. Там же, pp. 295 – 298.
--- (1934), *Tables of the Incomplete Beta-Function*. Cambridge, 1968.
--- (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries against the Changing Background of Intellectual, Scientific and Religious Thought.* Лекции 1921 – 1933. Редактор E. S. Pearson. London.
**Peters [C. A. F.]** (1856), Über die Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers einer Beobachtung. *Astron. Nachr.*, Bd. 44, pp. 29 – 32.
**Petruszewycz M.** (1983), Description statistique de textes littéraires russes par les méthodes de Markov. *Rev. Études Slaves*, t. 55, pp. 105 – 113.
**Pettenkofer M.** (1865), Über die Verbreitungsart der Cholera. *Z. Biol*., Bd. 1, pp. 322 – 374.
--- (1873), *Über den Werth der Gesundheit für eine Stadt*. Braunschweig.
**---** (1886 – 1887), Zum gegenwärtigen Stand der Cholerafrage. *Arch. f. Hyg.*, Bd. 4, pp. 249 – 354, 397 – 546; Bd. 5, pp. 353 – 445; Bd. 6, pp. 1 – 84, 129 – 233, 303 – 358, 373 – 441; Bd. 7, pp. 1 – 81.
**Petty W., Петти У.** (1662), A treatise on taxes and contributions. В книге автора (1899, т. 1, с. 1 – 97). [Трактат о налогах и сборах. В книге автора (1940, с. 3 – 78).]
--- (1674), *Discourse Read before the Royal Society*. London.
--- (1690), Political Arithmetic. В книге автора (1899, т. 2, pp. 239 – 313). [Политическая арифметика. В книге автора (1940, с. 154 – 205).]

--- (1899), *Economic Writings*, vols 1 – 2. Редактор, C. H. Hull. Cambridge. [London, 1997.]
--- (1927), *Papers*, vols 1 – 2. London, 1997.
--- (1940), *Экономические и статистические работы*. М.
**Pfanzagl J., Sheynin O.** (1996), см. Шейнин (1996a).
--- (1997), см. Шейнин (1997c).
**Picard J.** (1693), Observations astronomiques faites en divers endroits du royaume en 1672, 1673, 1674. *Mém. Acad. Roy. Sci. 1666 – 1699*, t. 7, 1729, pp. 329 – 347.
**Pitman E. J. G.** (1939), Estimation of the location and scale parameters. *Biometrika*, vol. 30, pp. 391 – 421.
**Plackett R. L.** (1949), Historical note on the method of least squares. *Biometrika*, vol. 36, pp. 458 – 460.
--- (1958), The principle of the arithmetic mean. *Biometrika*, vol. 45, pp.130 – 135. Перепечатка: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 121 – 126).
--- (1988), Data analysis before 1750. ISR, vol. 56, pp. 181 – 195.
**Plato J. von** (1983), The method of arbitrary functions. *Brit. J. Phil. Sci.*, vol. 34, pp. 37 – 47.
**Poincaré H., Пуанкаре А.** (1892a), *Thermodynamique.* Paris.
--- (1892b), Réponse à P. G. Tait. *Œuvres*, t. 10. Paris, 1954, pp. 236 – 237.
--- (1894), Sur la théorie cinétique de gaz. Там же, pp. 246 – 263.
--- (1896), *Calcul des probabilités.* Paris, 1912, перепечатка 1923 и 1987. Перевод: *Теория вероятностей*. Ижевск, 1999.
--- (1902), *La science et l'hypothèse.* Paris, 1923. [Paris, 1968.]
--- (1905), *La valeur de la science.* Paris, 1970.
--- (1921), Résumé analytique [собственных работ]. In *Mathematical Heritage of H. Poincaré.* Providence, Rhode Island, 1983. Редактор F. E. Browder, pp. 257 – 357.
--- (1983), *О науке*. М. Содержит русские переводы брошюр (1902), на с. 7 – 152 и (1905), на с. 153 – 282.
**Poisson S.-D.** (1812), Review of Laplace (1812)**.** *Nouv. Bull. des Sciences. Soc. Philomatique de Paris*, t. 3, pp. 160 – 163.
**---** (1824 – 1829), Sur la probabilité des résultats moyens des observations. *Conn. des temps*, pour 1827, pp. 273 – 302; pour 1832, pp. 3 – 22.
--- (1825 – 1826), Sur l'avantage du banquier au jeu de trente-et-quarante. *Annales math. pures et appl.*, t. 16, pp. 173 – 208.
--- (1830), Formules des probabilités … qui peuvent être utiles dans l'artillerie. *Mémorial de l'artillerie* (Paris), No. 3, pp. 141 – 156. Журнал издавался также в Брюсселе с иной нумерацией страниц.
--- (1833a), *Traité de mécanique*, t. 1. Paris. Второе изд.
--- (1833b), Discours prononcé aux funérailles de Legendre. *J. f. d. reine u. angew. Math.*, Bd. 10, pp. 360 – 363.
--- (1835), Recherches sur la probabilité des jugements, principalement en matière criminelle. *C. r. Acad. Sci. Paris*, t. 1, pp. 473 – 494.
--- (1836), Note sur la loi des grands nombres. Там же, t. 2, pp. 377 – 382.
--- (1837a), *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile.* Paris, 2003. *Исследования о вероятности приговоров* … Берлин, 2013. **w**
--- (1837b), Sur la probabilité du tir a la cible. *Mémorial de l'artillerie*, No. 4, pp. 59 – 94.

--- (1981), *Poisson et la science de son temps.* Paris. Редакторы Métivier M., Costabel P., Dugac P. Сборник статей о Пуассоне.
--- (2013), *Poisson. Les mathématiques au service de la science*. Palaiseau [Paris]. Редактор Yvette Kosmann-Schwarzbach. Сборник статей о Пуассоне.
**Polya G.** (1920), Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem. *Math. Z.*, Bd. 8, pp. 171 – 181.
--- (1931), Sur quelques points de la théorie des probabilités. *Annalen Inst. H. Poincaré*, t. 1, pp. 117 – 161.
--- (1954 англ.), *Mathematik und plausibles Schließen*, Bd. 2. Basel – Stuttgart, 1963. [Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения*. М., 1975.]
--- (1984), *Collected Papers*, vol. 4. Cambridge (Mass.).
**Prevost [P.], Lhuilier [S. A. J.]** (1799), Sur l'art d'estimer la probabilité des causes par les effets. *Mém. Acad. Roy Sci. et Belles-Lettres Berlin avec l'Histoire* 1796, pp. 3 – 24 второй пагинации.
**Price D. J.** (1955), Medieval land surveying and topographical maps. *Geogr. J.*, vol. 121, pp. 1 – 10.
**Proctor R. A.** (1872), On star-grouping. *Proc. Roy. Instn Gr. Brit.*, vol. 6, pp. 143 – 152.
--- (1873), Statement of views respecting the sidereal universe. *Monthly Notices Roy. Stat. Soc.*, vol. 33, pp. 539 – 552.
--- (1874), *The Universe.* London.
***Programmes*** (1837), *Programmes de l'enseignement de l'Ecole Polytechnique … pour l'année scolaire 1836 – 1837*. Paris.
**Ptolemy** (1956, греч. и англ.), *Tetrabiblos*. London.
--- (1984, англ.), *Almagest*. London. [*Альмагест*. М., 1998.]
**Quetelet A., Кетле А.** (1829), Recherches statistiques sur le Royaume des Pays-Bas. *Mém. Acad. Roy. Sci., Lettres et Beaux-Arts Belg.*, t. 5. Отдельная пагинация.
--- (1832a), Recherches sur la loi de la croissance de l'homme. Там же, т. 7. Отдельная пагинация.
--- (1832b), Recherches sur le penchant au crime. Там же, отдельная пагинация.
--- (1836), *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale*, tt. 1 – 2. Bruxelles.[*Человек и развитие его способностей или опыт общественной физики.* СПб, 1865.]
--- (1846), *Lettres ... sur la théorie des probabilités.* Bruxelles.
--- (1848a), *Du système social*. Paris.
--- (1848b), Sur la statistique morale. *Mém. Acad. Roy. Sci., Lettres et Beaux-Arts Belg.*, t. 21. Отдельная пагинация.
--- publie par (1849 – 1857), *Sur le climat de la Belgique*, tt. 1 – 2. Bruxelles.
--- (1852), Sur quelques propriétés […]. *Bull. Acad. Sci., Lettres, Beaux-Arts Belg.*, t. 19, pt. 2, pp. 303 – 317.
--- (1853), *Théorie des probabilités.* Bruxelles.
--- (1869), *Physique sociale*, tt. 1 – 2. Bruxelles. Переиздание книги 1836 г. с измененным названием. [*Социальная физика*, тт. 1 – 2. Киев, 1911 – 1913.] [Bruxelles, 1997.]
--- (1870), Des lois concernant le développement de l'homme. *Bull. Acad. Roy. Sci., Lettres, Beaux-Arts Belg.*, 39^e^ année, t. 29, pp. 669 – 680.
--- (1871), *Anthropométrie*. Bruxelles.
--- (1974), *Mémorial.* Bruxelles.

**Quetelet A., Heuschling X.** (1865), *Statistique internationale* (*population*). Bruxelles.
**Quine M. P., Seneta E.** (1987), Bortkiewicz's data and the law of small numbers. ISR, vol. 55, pp. 173 – 181.
**Rabinovitch N. L.** (1973), *Probability and Statistical Inference in Ancient and Medieval Jewish Literature.* Toronto.
--- (1974), Early antecedents of error theory. AHES, vol. 13, pp. 348 – 358.
--- (1977), The one and the many: stochastic reasoning in philosophy. *Annals of Sci.*, vol. 34, pp. 331 – 344.
**Radelet de Grave P., Scheuber V.** (1979), *Correspondance entre D. Bernoulli et J.-H. Lambert.* Paris.
**Raimi R. A.** (1976), The first digit problem. *Amer. Math. Monthly*, vol. 83, pp. 521 – 538.
**Rao C. R.** (1965), *Linear Statistical Inference and Its Applications.* New York.
**Réaumur R. A.** (1738), Observations du thermomètre. *Hist. Acad. Roy. Sci. Paris avec Mém. Math-Phys*. за 1735, pp. 545 – 576.
**Rehnisch E.** (1876), Zur Orientierung über die Untersuchungen und Ergebnisse der Moralstatistik. *Z. Philos. u. philos. Kritik*, Bd. 69, pp. 43 – 115.
**Rigaud S. P.** (1832), *Miscellaneous Works and Correspondence of J. Bradley.* Oxford. [New York, 1972.]
--- (1841), *Correspondence of Scientific Men of the 17th Century*, vol. 2. Oxford.
**Rümelin G.** (1867), Über den Begriff eines socialen Gesetzes. В книге автора *Reden und Aufsätze*. Freiburg i/B – Tübingen, 1875, pp. 1 – 31.
**Russell B.** (1945), *History of Western Philosophy.* London, 1962. [*История западной философии*. M., 1959.]
**Särndal C.-E.** (1971), The hypothesis of elementary errors and the Scandinavian school in statistical theory. *Biometrika*, vol. 58, pp. 375 – 392. Перепечатка: M. G. Kendall & Plackett (1977, pp. 419 – 435).
**Sambursky S.** (1956), On the possible and probable in ancient Greece. *Osiris*, vol. 12, pp. 35 – 48. Перепечатка с поправками: M. G. Kendall & Plackett (1977, pp. 1 – 14).
**Scheffé H.** (1959), *Analysis of Variance*. New York.
**Schell E. D.** (1960), Pepys, Newton and probability. *Amer. Statistician*, vol. 14, No. 4, pp. 27 – 30.
**Schlözer A. L.** (1804), *Theorie der Statistik.* Göttingen.
**Schmeidler F.** (1984), *Leben und Werk des Königsberger Astronomen Bessel*. Kelkheim/T.
**Schneider I.** (1968), Der Mathematiker A. De Moivre. AHES, vol. 5, pp. 177 – 317 (весь No. 3 – 4).
---, редактор (1988), *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933.* Darmstadt. Сборник отрывков из классических сочинений почти исключительно либо немецких, либо в немецких переводах. Комментарии недостаточны.
**Schreiber [O.]** (1879), Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen. *Z. f. Vermessungswesen*, Bd. 8, pp. 97 – 149.
**Schumann R.** (1917), F. R. Helmert. *Öster. Z. f. Vermessungswesen*, Jg. 15, No. 718, pp. 97 – 100.
**Schumpeter J.** (1954), *History of Economic Analysis*. New York, 1955.
**Seal H. L.** (1967), The historical development of the Gauss linear model.

*Biometrika*, vol. 54, pp. 1 – 24. Перепечатка: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 207 – 230).
**Seidel L.** (1865), Über den … Zusammenhang … zwischen der Häufigkeit der Typhus-Erkrankungen und dem Stande des Grundwassers. *Z. Biol.*, Bd. 1, pp. 221 – 236.
--- (1866), Vergleichung der Schwankungen der Regenmengen mit der Schwankungen in der Häufigkeit des Typhus. Там же, Bd. 2, pp. 145 – 177.
**Seneta E.** (1983), Modern probabilistic concepts in the work of E. Abbe and A. De Moivre. *Math. Scientist*, vol. 8, pp. 75 – 80.
--- (1984), The central limit theorem and linear least squares in pre-revolutionary Russia: the background. Там же, vol. 9, pp. 37 – 77.
--- (1994), Carl Liebermeister's hypergeometric tails. *Hist. Math.*, vol. 21, pp. 453 – 462.
**---** (1996), Markov and the birth of chain dependence. ISR, vol. 64, pp. 255 – 263.
--- (1998), Bienaymé (1798 – 1878); criticality, inequality and internationalization. ISR, vol. 66, pp. 291 – 301.
--- (2001a), Ostrogradsky as probabilist. *Украинск. математич. ж.*, т. 53, с. 1038 – 1047.
--- (2001b), A. A. Markov. In Heyde & Seneta (2001, pp. 243 – 247).
**---** (2006), Slutsky. *Enc. Stat. Sciences*, vol. 12, pp. 7794 – 7796. 2nd ed. Hobokan, New Jersey.
**Seneta E., Parshall K. H., Jongmans F.** (2001), Nineteenth-century developments in geometric probability. AHES, vol. 55, pp. 501 – 524.
**Sentemann K.** (1907), Ulpianus als Statistiker. *Jahrb. Gesetzgebung, Verwaltung u. Volkswirtschaft*, Jg. 31, pp. 247 – 258.
**Shafer G.** (1978), Non-additive probabilities in the work of [J.] Bernoulli and Lambert. AHES, vol. 19, pp. 309 – 370.
**Shafer G., Vovk V.** (2001), *Probability and Finance. It's Only a Game.* New York. См. также Вовк В. Г., Шафер Г. Р. (2005).
**Shaw N., Austin E.** (1926), *Manual of Meteorology*, vol. 1. Cambridge, 1942.
**Shoesmith E.** (1985a), N. Bernoulli and the argument for Divine Providence. ISR, vol. 53, pp. 255 – 259.
--- (1985b), T. Simpson and the arithmetic mean. *Hist. Math.*, vol. 12, pp. 352 – 355.
--- (1986), Huygens' solution to the gambler's ruin problem. Там же, vol. 13, pp. 157 – 164.
--- (1987), The Continental controversy over Arbuthnot's argument for Divine Providence. Там же, vol. 14, pp. 133 – 146.
**Short J.** (1763), Second paper concerning the parallax of the Sun. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 53, pp. 300 – 342.
**Simon, J.** (1887), *Public Health Reports*, vols 1 – 2. London.
**Simpson J. Y.** (1847 – 1848), Anaesthesia. *Works*, vol. 2. Edinburgh, 1871, pp. 1 – 288.
**---** (1869 – 1870), Hospitalism. Там же, pp. 289 – 405.
**Simpson T.** (1740), *Nature and Laws of Chance.* London.
--- (1756), On the advantage of taking the mean of a number of observations. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. 49, pp. 82 – 93.
--- (1757), Расширенный вариант той же статьи. В книге автора *Miscellaneous Tracts on Some Curious… Subjects…* London, pp. 64 – 75.
--- (1775), *Doctrine of Annuities and Reversions*. London.

**Snow J.** (1855), On the mode of communication of cholera. В книге *Snow on Cholera*. New York, 1965, pp. 1 – 139.
**Sofonea T.** (1957a), Leibniz und sein Projekt zur Errichtung staatlicher Versicherungsanstalten. *Schweiz. Versicherungs-Zeitschrift*, Jg. 25, pp. 144 – 148.
--- (1957b), E. Halley (1656 – 1742) und seine Sterbetafel 300 Jahre nach seiner Geburt. *Het Verzerkerings Archief*, t. 34, pp. 31* – 42*.
**Spieß O.** (1975), Zur Vorgeschichte des Petersburger Problems. В книге J. Bernoulli (1975, pp. 557 – 567).
**Spieß W.** (1939), Kann man für D. Huber Ansprüche als Erfinder der "Methode der kleinsten Quadrate" geltend machen? *Schweiz. Z. Vermessungswesen u. Kulturtechnik*, Bd. 37, pp. 11 – 17, 21 – 23.
**Sprott D. A.** (1978), Gauss's contributions to statistics. *Hist. math.*, vol. 5, pp. 183 – 203.
**Stigler S. M.** (1977), Eight centuries of sampling inspection: the trial of the pyx. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 72, pp. 493 – 500.
---, редактор (1980), *American Contributions to Mathematical Statistics in the 19th Century*, vols 1 – 2. New York. Перепечатка работ американских авторов. Сквозная пагинация отсутствует.
--- (1981), Gauss and the invention of least squares. *Annals of Statistics*, vol. 9, pp. 465 – 474.
--- (1983), Who discovered Bayes's theorem? *Amer. Statistician*, vol. 37, pp. 290 – 296.
--- (1986), *History of Statistics.* Cambridge (Mass.).
--- (1999), *Statistics on the Table.* Cambridge (Mass.). Сборник возможно переработанных статей автора.
**Stiltjes T. J.** (1885), Note a l'occasion de la réclamation de M. Markoff. OC, t. 2. Berlin, 1993, pp. 430 – 431/518 – 519.
**Strabo** (1969), *Geography*, vol. 1. London. Перевод: Страбон, *География*. Л., 1964.
**Strecker H., Strecker R.** (2001), Anderson. В книге Heyde & Seneta (2001, pp. 377 – 381).
**Struve F. G. W.** (1827), *Catalogus novus*. Dorpati [Tartu].
**Struve L. O.** (1887), *Bestimmung der Constante der Praecession* […]. *Mém. Acad. Imp. Sci. St. Pétersbourg*, ser. 7, t. 35, No. 3.
**Student (W. S. Gosset)** (1942), *Collected Papers*. Editors, E. S. Pearson, J. Wishart. Cambridge, 1958.
**Süssmilch J. P.** (1741), *Die Göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben.* Berlin, 1765. Несколько последующих изданий.
--- (1758), Gedancken von dem epidemischen Krankheiten. В книге Wilke J., редактор (1994), *Die königliche Residenz und die Mark Brandenburg im 18. Jahrhundert*. Berlin, pp. 69 – 116.
**Tait, P. G.** (1892), Poincaré's Thermodynamics. *Nature*, vol. 45, pp. 245 – 246.
**Takácz (Takács) L.** (1969), On the classical ruin problems. *J. Amer. Stat. Assoc.*, vol. 64, pp. 889 – 906.
--- (1982), Ballot problems. В источнике Kotz & Johnson (1982 – 1989, vol. 1, pp. 183 – 188). Второе издание 2006 г.
--- (1994), The problem of points. *Math. Scientist*, vol. 19, pp. 119 – 139.
**Taqqi M. S.** (2001), Bachelier and his times; a conversation with B. Bru. *Finance*

*Stoch.* vol. 5, pp. 3 – 32.
**Thatcher A. R.** (1957), A note on the early solutions of the problem of the duration of play. *Biometrika*, vol. 44, pp. 515 – 518. Перепечатка: E. S. Pearson & Kendall (1970, pp. 127 – 130).
**Thomson W., Tait P. G.** (1867), *Treatise on Natural Philosophy*, vol. 1. New York, 2002.
**Timerding H. E.** (1915), *Analyse des Zufalls.* Braunschweig.
**Toaldo J.** (1775, итал.), *Witterungslehre für den Feldbau*. Berlin, 1777.
--- (1777), Essai de météorologie. *J. Phys.*, t. 10, pp. 249 – 279, 333 – 367.
**Todhunter I.** (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to That of Laplace.* New York, 1949, 1965.
**Toomer G. J.** (1974), Hipparchus on the distances of the sun and moon. AHES, vol. 14, pp. 126 – 142.
**Truesdell C.** (1984), *An Idiot's Fugitive Essays on Science.* New York. Сборник перепечаток предисловий и рецензий автора по истории и философии естествознания.
**Virchow R.** (1868 – 1869), Über Hospitäler und Lazarette. *Ges. Abh.*, Bd. 1 – 2. Berlin, 1879, pp. 6 – 22.
**Waerden van der B.L., Ван дер Варден Б. Л.** (1968), Mendel's experiments. *Centaurus*, vol. 12, pp. 275 – 288.
--- (1976), Переписка между Паскалем и Ферма по вопросам теории вероятностей. ИМИ, т. 21, с. 228 – 232.
**Wallis J.** (1685), *Treatise of Algebra.* London.
**Weil A., Truesdell C., Nagel F.** (1993), *Der Briefwechsel von J. Bernoulli.* Basel.
**Weiling F.** (1975), Mendel sowie die von Pettenkoffer angeregten Untersuchungen von des Zusammenhanges Cholera- und Typhus- Massenerkrankungen mit dem Grundwasserstand. *Sudhoffs Arch.*, Bd. 59, pp. 1 – 19.
**Wesley W. G.** (1978), The accuracy of Tycho Brahe's instruments. *J. Hist. Astron.*, vol. 9, pp. 42 – 53.
**White A. D.** (1896), *History of the Warfare of Science with Theology in Christendom*, vols 1 – 2. London – New York, 1898. Many later editions up to 1955.
**Whittaker E. T., Robinson G., Уиттекер Э., Робинсон Г.** (1924), *Calculus of observations.* London, 1949. [London, 1952.] [*Математическая обработка результатов наблюдений.* М., 1935.]
**Whitworth W. A.** (1867), *Choice and Chance.* New York, 1959 (перепечатка издания 1901 г.).
**Wilson C.** (1980), Perturbations and solar tables from Lacaille to Delambre. AHES, vol. 22, pp. 53 – 304.
**---** (1984), The sources of Ptolemy's parameters. *J. Hist. Astron.*, vol. 15, pp. 37 – 47.
**Winkler W.** (1931), Ladislaus von Bortkiewicz. *Schmollers Jahrbuch f. Gesetzgebung, Verwaltung u. Volkswirtschaft im Deutschen Reich*, 55. Jg., pp. 1025 – 1033.
**Winslow C.-E. A.** (1943), *The Conquest of Epidemic Disease*. New York – London, 1967.
**Wishart J.** (1927), On the approximate quadrature of certain skew curves with an account of the researches of Bayes. *Biometrika*, vol. 19, pp. 1 – 38, 442.
**Wittstein Th.** (1867), *Mathematische Statistik*. Hannover.
**Wolf Abr.** (1935), *History of Science, Technology and Philosophy in the 16th and*

*17th Centuries*. London, 1950.
**Woolhouse W. S. B.** (1873), On the philosophy of statistics. *J. Inst. Actuaries*, vol. 17, pp. 37 – 56.
**Woytinsky W. S.** (1961), *Stormy Passage*. New York.
**Yamazaki E.** (1971), D'Alembert et Condorcet: quelques aspects de l'histoire du calcul des probabilités. *Jap. Studies Hist. Sci.*, vol. 10, pp. 60 – 93.
**You Poh Seng** (1951), Historical survey of the development of sampling theories and practice. *J. Roy. Stat. Soc*., vol. A114, pp. 214 – 231. Перепечатка: M. G. Kendall & Plackett (1977, pp. 440 – 458).
**Youshkevitch A. A.** (1974), Markov. *Dict. Scient. Biogr*, vol. 9, pp. 124 – 130.
**Yule G. U.** (1900), On the association of attributes in statistics. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. A194, pp. 257 – 319. Также в книге автора *Statistical Papers.* London, 1971, pp. 7 – 69.
**Yule G. U., Kendall M. G., Юл Дж. Э., Кендалл М. Дж.** (1937), *Introduction to theory of statistics.* London, 1958. [*Теория статистики*. М., 1960.]
**Zabell S. L.** (1988a), The probabilistic analysis of testimony. *J. Stat. Planning and Inference*, vol. 20, pp. 327 – 354.
--- (1988b), Buffon, Price and Laplace: scientific attribution in the 18th century. AHES, vol. 39, pp. 173 – 181.
--- (1989), The rule of succession. *Erkenntnis*, Bd. 31, pp. 283 – 321.
**Zach F. X. von** (1805), Versuch einer auf Erfahrung gegründeten Bestimmung terrestrischer Refractionen. *Monatl. Correspondenz*, Bd. 11, No. 5, pp. 389 – 415 ; No. 6, pp. 485 – 504.
--- (1813), Sur le degré du méridien. *Mém. Acad. Imp. Sci., Littérature, Beaux-Arts Turin* за 1811 – 1812. Sci. math. et phys., pp. 81 – 216.
**Zermelo E.** (1900), Über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf dynamische Systeme. *Phys. Z.*, Bd. 1, pp. 317 – 320.
**Zoch R. T.** (1935), On the postulate of the arithmetic mean. *Annals Math. Stat.*, vol. 6, pp. 171 – 182.

## Именной указатель

Указатель не покрывает общего списка источников, и наше собственное имя также отсутствует. Ссылки даны не на страницы, а на параграфы. Сокращения: предисл. – предисловие; прим. – примечания (к соответствующей главе). Одна единственная цифра не означает главу; например, 9 относится лишь к общему введению к главе 9; исключение – цифры 13 и 17.

Несколько слов о трудностях транскрипции имен собственных, которая во многом зависит от традиций. Когда-то Блеза Паскаля называли в России Власом, а сравнительно недавно Уильям Шекспир был еще Вильямом; и быть может Гальтон станет, как положено, Гóлтоном. Особые неприятности возникают при транскрипции фамилии, скажем, француза, живущего в Германии, – вспомним хотя бы в этой связи Владислава Борткевича, который стал Ладислаусом фон Борткиевичем. Некоторые случаи транскрипции просто отвратительны. Так, по неведомому нам правилу С. Н. Бернштейн, который много публиковался во Франции и подписывался, разумеется, Bernstein, теперь превратился за рубежом России в уродливого Bernshtein, а в новых изданиях перевода справочника по математике И. Н. Бронштейна и К. А. Семендяева первый автор теперь оказался Bronshtein. Надеемся, что читатели простят нам неизбежные ошибки в транскрипции имен, включенных в наш список.