ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ ХРЕСТОМАТИЯ

По истории теории вероятностей и статистики

составитель и переводчик О. Б. Шейнин

Берлин

2018

Содержание

От переводчика
I. И. Кеплер, Описание новой звезды, 1604/1938
II. Дж. Айвори, О методе наименьших квадратов. 1825 – 1826
III. Дж. Айвори, Основания для принятия сжатия Земли, 1826
IV. Р. Л. Эллис, О принципе теории вероятностей, 1856
V. Р. Л. Плекетт, Принцип среднего арифметического, 1958
VI. Дж. У. Л. Глейшер, Ошибки наблюдения и метод наименьшихквадратов, 1872
VII. М. У. Крофтон, Закон ошибок наблюдения, 1870
VIII. Л. фон Борткиевич, Лексис и Дормуа, 1930
IX. К. Притчард, Багатель как источник вдохновения Гальтона, 2006
X. А. В. Васильев. Законы случайного, 1892
XI. А. Л. Вайнштейн, Г. И. Ханин, Памяти Г. А. Фельдмана, 1968
XII. Дж. К. Гош, Махаланобис, 1994
XIII. С. Саркар, Дж. Б. С. Холдейн, Р. Э. Фишер и биография К. Пирсона, 1995
XIV. А. А. Марков, Предисловия к его руководству 1913 и 1912 гг.

От составителя

Ниже мы приводим общие соображения об отдельных статьях, которые мы обозначили римскими цифрами в соответствии с Содержанием. Библиографические сведения включены в надлежащие пристатейные библиографии.

Вот обозначение, принятое во всём сборнике:

S, G, i: скачиваемый документ i на русском языке есть на нашем сайте www.sheynin.de. Сайт перепечатывает Google, см. Oscar Sheynin.

МНКв = метод наименьших квадратов

Мы очень часто ссылаемся на наши книги

Шейнин О. Б. (2013), *Теория вероятностей. Исторический очерк*. Берлин. **S, G,** 11.

Sheynin O. (2017), *Theory of Probability. Historical Essay*. Berlin. **S, G,** 10.

Общий комментарий к некоторым статьям

[i] Мы (1974, § 7) описали астрологическую деятельность Кеплера, но в основном по его более поздним сочинениям, в которых он сообщил о своих зрелых воззрениях на эту *сумасбродную доченьку астрономии.* Здесь мы полнее использовали его ранние работы (1601; 1604).

[iv] Статья Эллиса убеждает, что, по крайней мере для математики его философия не имела смысла. *Фундаментальный принцип* он не пояснил и не усовершенствовал (и его оговорка *пока что* не оправдалась), а затемнил до неузнаваемости. Этот принцип Эллис наверно сформулировал для схемы Бернулли (но с несколькими возможными событиями). Для случая одного события принцип Эллиса следует из закона больших чисел Бернулли.

[v] Эту статью следует дополнить нашими публикациями (1973; 1984; 1993).

[vi] Автор, как и многие математики и даже астрономы, не был достаточно знаком с теорией ошибок теоретически и явно не принимал участия в полевых геодезических работах. Он недостаточно обращался к Гауссу, совершенно пренебрегал Бесселем, хотя и сослался на него, и многие его утверждения ошибочны. Он так и не указал, что в геодезии, которая обходится небольшим числом наблюдений, теория ошибок Лапласа почти бесполезна (то же можно теперь сказать про физику, метрологию и, наверное, про несколько других дисциплин/наук). В астрономии наблюдения растянуты во времени и нет никакой уверенности в их следовании хотя бы нормальному закону (см. Прим. 29), тем менее закону с постоянной мерой точности. Общую характеристику трудов Лапласа см., например, в обзоре Гнеденко и Шейнин (1978).

Более конкретные замечания. **1.** Вопреки мнению автора отбраковка уклоняющихся наблюдений является исключительно тонкой процедурой ввиду действия неизбежных систематических ошибок (которыми автор почти пренебрегал) и любой критерий следует принимать с особой осторожностью. Автор почему-то выделил слишком сложный критерий Пирса, а не Шовене (на которого сослался). **2.** Изучение причин ошибок. Автор уделил внимание этой теме, но намного меньшее, чем Крофтон [vii]. Мы уже останавливались на этом вопросе в общем комментарии к его статье. **3.** О статье Эдрейна достаточно написано уже после публикации Аббе (Шейнин 1965; Кулидж 1926; Дутка 1990). В частности, мы обратили внимание на то, что Эдрейн должным образом применил принцип наименьших квадратов к обработке геодезических построений.

[vii] В основном тексте мы заметили, что в истории астрономии Крофтон был дилетантом, и что его описание этой истории никуда не годится. Неудивительно, что он вообще не упомянул геодезию, история которой была бы крайне уместной. Он потерпел неудачу и ввиду своей попытки (видимо, единственной в своём роде) связать распределения вероятностей с причинами. Соответственно, мы опустили многие рассуждения автора.

Причины явлений исследовались статистиками, но независимо от этих распределений. Точнее, определяли, вызвано ли некоторое явление случаем, или божественным промыслом, или же оно отражало закон природы. Позднее причины ошибок начали изучаться с целью уравнивания их воздействия на ошибки и тем самым исключения одной из помех появлению нормального распределения. Систематические влияния изучались особо и по возможности смягчались, например, целесообразными программами наблюдений.

Доказательство центральной предельной теоремы у Крофтона, конечно же, не было строгим. Достаточно заметить, что на с. 184 он дважды применил приближённые равенства, но не исследовал возникших погрешностей.

[viii] В Примечаниях 11 и 15 мы отметили серьёзные недостатки этой статьи, вообще же следовало изложить её материал более чётко. Так, утверждения вида *такой-то коэффициент мал* (или *велик*) никак не пояснены. И в начале § 5 следовало указать, что Дормуа не обосновал применения КР к абсолютным числам. Косвенные и явно недостаточные замечания Борткевича мы выпустили.

Особо укажем утверждение Борткевича (конец § 4 и начало § 5): независимые события подчиняются общим причинам, а не *статистической неизбежности*, и Лексис действенно возражал против ошибочной точки зрения Кетле и его направления. На самом деле ошибался сам Борткевич, см. Кетле (1911, с. 12):

Каждый социальный строй предполагает определённое количество и определённый порядок преступлений, которые вытекают из его организации как необходимое следствие.

И вот крохотный пример (Кетле 1848, с. 169):

В Баварии попытались воспрепятствовать опрометчивым бракам. […] *Число внебрачных детей почти сравнялос*ь [там] *с числом рождённых в браке*.

Вообще же противопоставление общих причин и (статистической) неизбежности представляется неверным.

[ix] Мы значительно сократили эту статью и даже чуть изменили текст автора, опять-таки для сокращения письма. Прибор Гальтона действительно заслуживает краткого описания его истории.

[x] Автор был весьма известным и многосторонним учёным. Его неоднократно упоминал Юшкевич (1968), а Бажанов (2002) посвятил ему обширную статью со списком его сочинений (более двухсот наименований), хотя забыл про длительную и плодотворную переписку Васильева с Марковым. Из списка Бажанова мы поместили несколько статей Васильева в нашу Библиографию.

Вместе с тем Васильев не был достаточно знаком со своей темой, допустил ошибки (см. наши Примечания) и поверхностные суждения, а его литературный стиль был совсем неважным; мы чуточку выправили его текст. Тем не менее, мы сочли возможным перепечатать *Очерк* Васильева хотя бы для того, чтобы показать как, видимо, вообще в России (и может быть не только в ней) плохо представляли себе теорию вероятностей и статистику и как крупный учёный может спотыкаться на чуждом поле. Но, конечно, некоторые приведённые им сведения очень интересны; где ещё, например, мы могли бы узнать о тогдашнем исследовании страхования посевов в России?

Васильев особо рассматривал проблему случайности, но ни слова не сказал, ни о диалектике случайного и необходимого, о которой было известно уже Канту, ни об ожидании (до сих пор называемом во французской и русской литературе математическим, хотя давно забыто моральное ожидание, из-за которого Лаплас и ввёл уже ненужное прилагательное). Он не имел понятия о статистических законах природы, ничего не знал о приложении статистики в естествознании. Статистику в социологии Васильев считал нужным дополнить изучением романов, хотя надо было назвать психологию. В § 3 он отнёс теорию вероятностей к чистой математике, хотя в то время она ещё была ветвью прикладной математики, в § 6 просто к математике, а в § 5 к логике. О случайности см. нашу статью (2011).

[xi] Между строк авторы сообщают, что Фельдман много претерпел, потому что был Фельдманом, а не, скажем, Фёдоровым. Ныне он в России забыт. За рубежом его помнят, но в основном в связи с двухсекторной моделью экономики

[xii] Эту статью следует читать совместно с двумя другими (Gosh и др. 1999; Rao 1993), что позволит неплохо ознакомиться с малоизвестной историей статистики в Индии. В нескольких Отмеченных нами случаях данная статья противоречит статье 1999 г., и доверять, видимо, следует последней. Специально заметим, что при планировании экономики страны (§ 1.7) Махаланобис применял методы эконометрики. Серьёзным недостатком статьи являются крайне небрежные библиографические ссылки, особо см. § 2.1.2.

Бросается в глаза разительное различие между положением науки в Индии и СССР. В Индии, полная свобода общения с Западом, в Советском Союзе – *тащить и не пущать*. Можно вспомнить о жизни В. И. Романовского (Боголюбов и Матвиевская 1997) и, в геодезии, Ф. Н. Красовского (Шейнин 2013).

[xiii] Фишер относился к Пирсону главным образом как к недостаточно умелому математику, что было односторонне и потому недопустимо. Возможно, что в своей неопубликованной биографии Пирсона он смягчил свою точку зрения, но смог ли он быть достаточно объективным? Мы (2010) опубликовали биографию Пирсона и сослались там на многих комментаторов. В частности, С. Н. Берштейн отозвался о нём весьма положительно.

[xiv] Заметно резкое отличие предисловий к книгам, вышедшим одна за другой. Немецкое издание руководства Маркова по существу оставалось неизвестным в России, а её лучшее оформление (например, введение названий её параграфов) не было использовано в посмертном издании руководства 1924 г. Это наводит на мысль о том, что Марков не успел закончить его подготовку.

I

Иоганн Кеплер

Подробное описание удивительной новой звезды, которая впервые появилась в октябре этого 1604-го года

Johannes Kepler, Thorough description of an extraordinary new star
which first appeared in October of this year 1604.
Ges. Werke. München, 1938, Bd. 1.
Translated by Judith V. Field and Anton Postl.
Vistas in Astronomy, vol. 20, 1977, pp. 333 – 339

[Пробелы между некоторыми абзацами мы заменили числами.]

[1] Прошло 32 года с тех пор, когда астрономы увидели чудесное небесное явление, подобное которому не сообщалось ни в одной дошедшей до нас книге. В высших сферах неба, среди неподвижных звёзд, в созвездии Кассиопеи в Млечном Пути появилась новая, сильно светящаяся, сверкающая звезда. Там она и оставалась 16 месяцев и, наконец, снова померкла.

Об особом влиянии этой звезды было написано больше книг, чем когда-либо публиковалось о любой другой. Некоторые авторы издавна предвкушали появление подобной звезды, другие говорили, что она всегда существовала, но была слаба и незаметна, подобно семени. И снова четыре года назад появилась обычная звезда третьей величины в груди Лебедя, в Млечном Пути, и вот уже некоторое время её яркость не изменяется и её положение остаётся неизменным в том месте, в котором никакой звезды никогда не было видно. Это мы можем доказать убедительным доводом, равно как и достаточным свидетельством наблюдений. На самом деле, её не видел ни Гиппарх 1800 лет назад, ни Птолемей 1400 лет назад, ни какой-нибудь позднейший математик.

И вот снова, 9-го или 10-го октября нынешнего 1604-го года очень яркая, блестящая, сверкающая звезда появилась в созвездии Змееносца, в 17°43' от первой точки Стрельца[1] в меридианном склонении, т. е. на северной широте 1°55', фактически не в Млечном Пути, а в части неба между двумя его ответвлениями и по существу очень близко к западной ветви.

Наблюдения 17-го, 18-го, 21-го и 28-го октября показали, что эта звезда не перемещалась кроме как в суточных восходах и заходах. И если нам следует избежать нелепостей, мы должны будем признать, что эта новая звезда, как и остальные две упомянутые выше, принадлежит самой верхней сфере неба, к тверди небесной вместе с другими неподвижными звёздами. Её не следует искать ниже, где находятся кометы и планеты и тем более ниже Луны, т. е. в сфере воздуха. Это подтверждается ясностью звезды и её блестящим небесным светом.

[2] По значению этого удивительного создания рук Божьих она намного превосходит звезду 1572 г. Не станем упоминать, что несколько выдающихся человек, которые видели звезду 1572 г., утверждают, что нынешняя звезда намного ярче и светлее (почти вдвое ярче, чем близлежащая планета Юпитер). Но мы должны будем учитывать проблему, возникшую потому, что звезда 1572 г. была расположена в отдалённом созвездии Кассиопеи, вдалеке от зодиака, в созвездии, в котором никогда не была обнаружена ни одна планета. Наша звезда, однако, так близка к общему пути Солнца, Луны и всех планет, что почти все планеты должны пройти мимо неё, Сатурн же пройдёт так близко, что почти совпадёт с её положением.

Звезда 1572 г. была расположена среди некоторых ярких и светящихся, однако обычных, совсем не специальных звёзд, которые не обладали никаким особым движением. Наша же звезда протиснулась между тремя внешними планетами и выбрала себе место позади Марса и Юпитера и оставила позади Сатурн. Звезда 1572 г. появилась в созвездии Bull[2] [Тельца], в котором в то время не было никакого Великого соединения [соединения Сатурна и Юпитера]. Наша звезда, однако, находится в созвездии Ориона, в одном из знаков огня, в том, в котором в прошлом декабре началось давно уже возвещённый огненный тригон[3], т. е. событие, которое происходит только один раз в 800 лет.

Звезда 1572 г. появилась в обычное время и пришла в мир без каких-либо особых указаний, без предупреждения, как неприятель, ночью ворвавшийся в город и появившийся на рынке даже прежде, чем горожане узнали о нём. Наша звезда появилась в том самом году, про который так много написали астрологи, потому что в нём начался огненный тригон, и в том самом месяце, в котором Марс близко подходит к двум высшим планетам и таким образом завершает Великое соединение, которое описал Cyprianus[4]. Наконец, она появилась в тот день, в котором Марс всего ближе к Юпитеру и в точности при этом соединении.

Мы должны заметить, что из наблюдений следует, что 9-го октября Юпитер находился в 19°30’ от первой точки Стрельца и несколько секунд к северу, а Марс, в соответствии с исправленным вычислением, в 19°14’ от первой точки Стрельца на широте 1°36’ к югу, так что соединение Юпитера с Марсом произошло 9-го октября примерно в полдень. 8-го октября эта новая звезда не была видна, но 10-го октября её ясно увидели после заката. Она была ярка и находилась вблизи Юпитера и

Марса, примерно в 2°26’ от Юпитера, считая вдоль большого круга.

Милосердная планета Юпитер была почти в точности на полпути между этой звездой, которая находилась над ним, и Марсом под ней. Все математики[5] наверняка обратят своё экспертное внимание на момент и место этого соединения. Появление нашей звезды не было крадущимся подходом супостата, подобным появлению звезды 1572 г. Оно напоминало открытый спектакль, торжество или вход могущественного властелина. Перед ним появляется квартирмейстер, чтобы отыскать подходящее помещение, и молодые люди нетерпеливо ожидают прихода его командира. Затем подъезжает обоз с вооружением, полковые кухни и повозка с деньгами для выплат солдатам.

И вскоре становится слышным топот лошадиных копыт и звуки авангарда, марширующего по улицам. Они привлекают горожан к окнам, и, наконец, глазеющие зрители зрят целую роту рыцарей, а трубачи, телохранители и слуги объявляют о приходе монарха, чтобы никто не засомневался, что он явился.

Звезда 1572 г. была высоко на северном небе. Она не заходила и действительно была видна даже днём, когда Солнце начинало опускаться. Ввиду её яркости и расположения люди оборачивались, чтобы посмотреть на неё, будто кто-то повернул их головы, взявшись за оба уха. И те, кто обычно не интересовались подобными явлениями, первыми объявляли своё мнение.

Нынешняя звезда, видимо, несколько теснее сопутствует учёным (особенно тем, кто изучал астрономию), которые охотнее смотрят на неё, чем обычные люди, потому что она ближе к Солнцу, сияет в лучах заката, а вскоре после него окружается другими яркими звёздами.

[3] Значение звезды трудно установить, и мы можем быть уверены только в одном: либо звезда вообще не означает ничего для человечества, либо означает что-то такое величественное, которое не может быть воспринято и понято[6].

Эта звезда настолько выше всех планет, что, в соответствии с учением Коперника, с её места не только сами планеты будут невидимы, но даже их круговые орбиты покажутся такими же малыми, как очень слабые звёзды. Поэтому, из всего, что могут сказать нам астрологи и всего, что нам известно о Великом соединении Сатурна, Юпитера и Марса, мы не сможем ничего вывести о вспышке или сущности этой звезды.

Как бы мне хотелось, чтобы те многочисленные зеваки, которые наверняка начнут сообщать свои бесполезные мнения о происхождении этой звезды и намереваться опубликовать их, –

чтобы они вначале прочли *Progymnasmata* Тихо Браге о звезде 1572 г[7]. Это заставило бы их держать при себе свой негодный ребяческий вывод о том, что эту звезду зажгли естественным и обычным путём Юпитер и Марс, особенно Марс, который ввиду своего красноватого цвета издали выглядит как раскалённый тлеющий огонь.

Поскольку эта аксиома Коперника верна, я считаю просто басней, что Юпитер и Марс зажгли эту звезду. Я могу играть с иносказательным истолкованием так же свободно и изящно, как другие и объяснить, что математики искали три яркие звезды, но неожиданно нашли четыре и обратили больше внимания на новую, которая появилась неожиданно, чем на действительные прочные планеты.

И этот старый и упрямый Сатурн, этот великолепный Юпитер и воинственный Марс сошлись, чтобы в доме и храме Юпитера устроить парламент. Там Юпитер и Марс отошли в сторону и избрали новую звезду, установили её намного выше себя, а затем, склонившись перед Сатурном, завершили свои обязанности, и каждый из них пошёл своим путём.

Сатурн, однако, вооружился с ног до головы и подготовился придвинуться поближе к новой звезде. Ибо если она продержится достаточно долго, ему придётся преклониться перед ней и пройти почти точно под ней. Но это положение временно, планеты отойдут, а новая звезда, напротив, останется на месте. Однако, планеты вернутся и несомненно обнаружат, что ни новая звезда, ни что-либо иное не остались прежними.

Но я не хочу отрицать, что эта звезда связана с соединением Юпитера и Марса быть может в такой степени, что наверное следует признать, что сам Господь[8], который любит род людской, проживающий на этой крохотной невидимой точке, Земле, любит как свой образ, любит его сильнее, чем любую звезду, хоть была бы она в сто тысяч раз больше, чем весь земной шар, – что сам Господь хотел указать что-то существенное для рода людского и потому отметил время и место этого соединения Юпитера и Марса, чтобы оно запомнилось навсегда. Таким образом, Он указал расположение вещей в невообразимо высоких местах, чтобы, когда люди будут смотреть вверх, они увидели там очень яркую звезду.

[4] Но кто же не знает, что для меня и мне подобным такие предположения представляются слишком возвышенными и не разрешают нам заключить, что то, что может быть столь верно, действительно верно?

[5] С другой стороны, я не могу присоединиться к тем, кто совершенно исключает всякую связь звезды с соединением и заявляет, что слепой случай предопределил точное совпадение года, месяца, дня и расположения этой новой звезды с моментом и положением Великого соединения. Ибо, например, верно, что хорошо изготовленная игральная кость может упасть на одну из граней с той же вероятностью, как на другую. Но если несколько игроков один раз бросают зараз четыре или пять костей, и один из них выбрасывает шестёрку на каждой, то не будет неразумно заподозрить какой-то обман. В самом деле, трудно приписать этот бросок случаю, потому что второй такой же возможно произойдёт лишь после ста тысяч попыток.

Я не склонен приписывать это удивительное совпадение по времени и месту слепому случаю, особенно потому, что появление новой звезды само по себе, без учёта времени и места, представляет собой громадное чудо.

Но я пока что оставлю этот сомнительный вопрос; пусть его решают другие. Однако, так как я собираюсь подготовиться к исследованию его значимости, то ныне считаю, что эта звезда – планета своего рода. Я верю, что в соответствии с природой эта звезда, пока она остаётся, будет схожа с планетами по своему влиянию на погоду и гороскопы людей так же, как она схожа с ними по свету.

Ибо вся природа и все её способности (естественные возможности) обладают тайными средствами, при помощи которых она рассматривает вид небесных лучей и соответственно регулирует эти средства. Они будут также несомненно отзываться на лучи этой звезды. Поэтому мы должны отмечать дни, в течение которых эта звезда находится в конфигурации[9] с планетами. 10-го октября, когда она была впервые замечена, она находилась в точности в секстильном аспекте по отношению к Солнцу.

В то время был очень сильный дождь. Никакого особого аспекта не было (?), и имеет смысл рассмотреть, не появление ли этой звезды побудило природу так обильно пропотеть и вызвать дождь. Мы поэтому специально отметим, что 9-го декабря следующего года Солнце и Сатурн будут близки к новой звезде, хотя оба тела пройдут под ней. Сатурн окажется ближе всего 13-го и 14-го декабря, когда Солнце уже будет немного впереди. И ввиду положения Солнца эта звезда не будет видна, начиная с вечера 1-го декабря.

[6] Аналогично, с 23-го или 24-го декабря, если звезда останется так надолго, Меркурий будет очень близок к ней и к Сатурну, и следует ожидать, что с того времени новую звезду будет видно всё лучше и лучше непосредственно перед восходом Солнца. И поэтому она будет влиять на естественные вещи в основном в указанные мной дни. Каждый, кто был рождён в этом году 9-го или 10-го декабря по новому, или 29-го или 30-го ноября по старому стилю, должен обращать внимание на суточное обращение новой звезды и на её состояние. Более того, по старинному поверью, которое признают уважаемые авторы, выдающиеся личности рождаются при появлении кометы или новой звезды. Есть ещё в живых некоторые из тех, кто был рождён в 1572-м, 1573-м и 1574-м году[10].

[7] По поводу качеств, которые эта звезда может выказать в своём влиянии, их придётся выводить по её свету и цвету. Она, видимо, довольно схожа с ярким Сириусом, хоть и более красновата и светла. Но обе эти звезды подобны ценному бриллианту, который выбрасывает свой цвет многими лучами. А поскольку Сириус, по мнению астрологов, обладает той же природой, что и Юпитер и Марс, новая звезда будет такой же, хотя и склонной несколько больше напоминать Марс, тем более, что она появилась в том же месте и в день соединения Юпитера и Марса.

[8] В политических делах и людской деятельности новая звезда будет иметь громадное значение, хотя в действительности не ввиду её собственной природы, но случайно, по причине человеческих чувств. Прежде всего, она указывает на существенную активность и некоторую прибыль типографов, ибо каждый богослов, философ, медицинский работник и математик и каждый, кому нравится наука, но профессионально не обязанный заниматься ей, – каждый из них захочет опубликовать свои собственные возникшие мысли об этой звезде. Другие, учёные и необученные, захотят узнать, что указывает эта звезда, и купят то, что о ней написано.

Я сообщаю об этом как правдоподобном, потому что не нужно быть особо проницательным, чтобы угадать, что так оно и будет. И равным образом легко предвидеть, что обычные люди и всякий другой, кто только склонен делать поспешные выводы, будет вести себя как сумасшедший, который считает себя великим прорицателем. И могущественный владыка, сильно продвинувшийся к большему величию, будет поощрён появлением этой звезды к каким-либо новым подвигам, как будто Господь зажёг эту звезду в темноте, чтобы он увидел её. Или же какие-то люди, тайно согласившиеся заняться чем-то опасным, могут быть испуганы, представив себе, что эта звезда указывает на определённую неудачу, которая будет вызвана их опрометчивостью.

[9] В 1284 г., в ночь после дня Св. Амвросия Медиоланского, как сообщают богемские хроники, в верхнем роге Луны появилась очень яркая звезда, видимая по всей Богемии. В то время королевство Богемии и его молодой наследный принц [Св.] Вацлав были в жёсткой власти маркграфа Бранденбургского, которого назначил император Рудольф. Богемцы вообразили, что звезда предвещала страстно желаемое освобождение своего принца, усилили свои попытки добиться своей цели и, в конце концов, преуспели.

Тем не менее, появившаяся звезда по своей природе не знаменовала этих событий. Действительно, астрономические вычисления указывают, что в ночь после 6-го апреля в созвездии Стрельца произошло соединение Юпитера на севере и Луны на юге. И таким образом появившаяся звезда не была новой, то была старенькая планета Юпитер. Сами богемцы признали, что их истолкование было подсказано рвением, которое новая звезда пробудила в них. Но будь всё это сказано для подготовки. Время покажет нам истинное и действительное значение этой звезды. Пока же, если это доставит удовольствие всемогущему Богу, мы должны ожидать с истинной чистой верой в Него, отбросив все опасения, как этому можно научиться у некоторых Его созданий.

Официально утверждено

Примечания

1. В тексте не были приняты издавна уже применяющиеся обозначения для градуса и минуты дуги.

2. Тихо (1573) указал, что новая звезда имела долготу в седьмом градусе созвездия Тельца и широту около 54°. Переводчики

3. Астрологический термин, о котором нам ничего не известно.

4. Cyprianus Leovitius (1564). Переводчики

5. Сам Кеплер официально назывался математиком. Математики в смысле *астрономы* упоминаются и в самом начале статьи.

6. См. также самый конец статьи.

7. См. в Библиографии полное название этого сочинения.

8. В тексте сказано: Господь *accounts nothing in the world*. Это можно перевести либо как *не учитывает ничего*, либо как *не отвечает ни за что*, но ни один вариант не представляется правдоподобным.

9. Конфигурация: характерное взаимное положение небесных тел. Почти то же значение (примечательное положение …) имеет астрологический термин *аспект*. Секстиль – один из аспектов. Строго говоря, отделение примечательных событий от обычных является исключительно трудной задачей. Вот характерный эпизод. Кеплер (1601/1979, с. 97): *добавил* три аспекта к тем пяти, которые признавали древние астрологи.

10. Непонятное добавление.

Библиография

Шейнин О. Б., Sheynin O. (1974), On the prehistory of the theory of probability. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 12, pp. 97 – 141. **S, G,** 30.

Cyprianus Leovitius (1564), *De conjunctionibus magnis insigniorum planetarum* etc. Laugingae ad Danubium.

Kepler J. (1601, Latin), On the more certain fundamentals of astrology. *Proc. Amer. Phil. Soc.*, vol. 123, No. 2, 1979, pp. 85 – 116. Translated by Mary Ann Rossi.

Tycho Brahe (1573), De Nova Stella. *Opera omnia*, t. 1, 1913, p. 21.

--- (1598, 1602), *Astronomiae instauratae progymnasmata.* Stockholm, 1901. Английский перевод: Копенгаген, 1946, под иным названием.

II

Дж. Айвори

О методе наименьших квадратов

J. Ivory, On the method of least squares. *London, Edinb. and Dublin Phil. Mag.*, vol. 65, No. 321, Jan. 1825, pp. 3 – 10, 81 – 88, 161 – 168; vol. 68, No. 341, 1826, pp. 161 – 165

Нет никакого смысла переводить эту работу, потому что автор не ознакомился с мемуаром Гаусса (1823) и приписал Коутсу определённый метод уравнивания непосредственных наблюдений (т. е. наблюдений одной неизвестной величины); о неопределённой рекомендации Коутса 1722 г. см. Gowing (1923) и Шейнин (2017, § 6.3.1). Далее, Айвори ошибочно считал, что МНКв, а не неизвестный ему метод минимакса, обеспечивает наиболее тесные пределы возможных ошибок (точнее, остаточных свободных членов исходных уравнений) и потому является наилучшим. Наконец, он полагал, что единственным условием для верности центральной предельной теоремы является многочисленность наблюдений. На с. 162 он утверждал, что МНКв, этот наилучший метод обработки наблюдений, неразрывно связан с [нормальным] распределением погрешностей наблюдений, но в другом месте заявил, что эта обработка не должна зависеть от распределения погрешностей.

В 1825 – 1830 гг. Айвори определял сжатие земного эллипсоида по маятниковым наблюдениям (Шейнин 2013, § 11.9.1), но так и не овладел методом наименьших квадратов. Однако, в связи с его другими результатами Гаусс (в переписке, в 1827 г.) назвал его *тонким* математиком. Но там же, по поводу данного мемуара (возможно по поводу обеих его частей):

Какая же запутанность, неясность и полное отсутствие логической убедительности.

Во второй части мемуара Айвори подчёркивает, что исключает из рассмотрения систематические ошибки и что случайные ошибки должны быть взаимно независимы и подчиняться определённому закону. Но затем, после весьма простых алгебраических действий, заключает, что исключил МНКв от действия законов случая и что этот метод почему-то является единственным, который сохраняет независимость наблюдений.

Gowing R. (1923), *Roger Cotes – Natural Philosopher*.

III

Дж. Айвори

Основание для принятия сжатия Земли, выведенного капитаном Сабиным по его недавно опубликованным маятниковым наблюдениям

James Ivory, On the grounds for adopting the ellipticity of the Earth
deduced by Captain Sabine from his experiments with the pendulum etc.
London, Edinb. and Dublin Phil. Mag.,
vol. 68, No. 343, Nov. 1826, pp. 321 – 326

Маятниковые наблюдения стали весьма многочисленными. Из их различных сочетаний могут быть выведены различные значения сжатия, и поэтому возник важный вопрос: как выделить истинное сжатие из остальных его значений, которые возможно появились только ввиду случайных неправильностей. Мы здесь не подразумеваем небольшие изменения сжатия того же порядка, что неизбежные ошибки наблюдений, которые должны проявляться в различных сочетаниях самых точных наблюдений. Нет, мы имеем в виду такие существенные изменения, которые могут привести к различным мнениям о фигуре Земли.

Пусть имеется 25 независимых наблюдений. Это то их число, которое получили Био, Кэтер и Сабин. МНКв приводит к сжатию, которое по нашему мнению представит все эти наблюдения лучше любого иного метода.

Но этих наблюдений намного больше, чем необходимо для вывода фигуры Земли. Если Земля – эллипсоид вращения, то для вывода сжатия достаточно двух наблюдений, возле экватора и на существенном расстоянии от него. Сочетание большого числа наблюдений, если они согласуются друг с другом, несомненно окажется благоприятным, потому что неизбежные уклонения наблюдений друг от друга в какой-то степени уравновешиваются и средний результат должен будет хорошо аппроксимировать истинную фигуру Земли.

Но если многие наблюдённые величины сочетаются в едином вычислении, трудно отделить те из них, которые согласуются друг с другом и действительно относятся к истинной фигуре Земли, от тех, которые ввиду случайных аномалий не могут быть приведены в соответствие с той же самой фигурой, по крайней мере без признания в них весьма крупных ошибок. Можно действительно сказать, что после применения к каждому отдельному случаю общей формулы для длины маятника, который был выведен по всем наблюдениям, отклонения в вычислениях укажут на согласование наблюдений и позволят судить о степени точности, с которой они представлены единой фигурой. Но, с другой стороны, можно утверждать, что средняя фигура, выведенная из очень большого числа наблюдений, существенно отличается от истинной фигуры, которая только соответствует согласующимся наблюдениям. И аналогично, заявлять, что уклонения в вычислениях являются обычным средством для установления верного понятия о распределении силы тяжести на поверхности Земли и об аномалиях, которым оно подвержено.

Только в одном случае несомненно, что средняя фигура совпадает с истинной, а именно, когда все погрешности вычислений [обработки] невелики и имеют тот же порядок, что и ошибки наблюдений. Но если эти ошибки значительнее, среднее сжатие, выведенное из очень многих наблюдений, не может быть принято в качестве безопасного определения фигуры Земли без дальнейших исследований.

Чтобы установить это на безусловных принципах необходимо, видимо, подразделить все наблюдения на части, исследовать сжатие по каждой из них и определить, согласуются или нет все результаты друг с другом. В первом случае, если притом эти результаты согласуются с полученными по всем наблюдениям, мы будем уверены в том, что верно определили фигуру Земли. Но во втором случае следует заключить не то, что единого сжатия не существует, а что наблюдённые результаты не согласуются и что точное знание о распределении силы тяжести по поверхности Земли можно получить, только отделив согласующиеся наблюдения, которые подходят к средней фигуре Земли, от аномальных.

Я показал, что из 32 независимых маятниковых наблюдений с наиболее усовершенствованными приборами, выполненных различными наблюдателями по самым совершенным методам, 26 согласовывались друг с другом и приводили к одной и той же фигуре Земли. Сжатие оказалось примерно равным 1/303, что согласуется и со значением, которое выводится по неравенствам движений Луны. Применение надлежащего математического метода к любому сочетанию наблюдений в моей таблице каждый раз приводит к одному и тому же результату или по крайней мере к небольшим расхождениям между ними того же порядка, что и неизбежные ошибки наблюдения.

Но остальные шесть наблюдений не приводят к тому же самому сжатию, во всяком случае, без признания их серьёзной ошибочности. Это расхождение не удастся пояснить той величиной, которая придаётся сжатию, оно является действительным несоответствием, которое нельзя устранить никаким вероятным изменением сжатия. Для доказательства достаточно сравнить длины [секундных] маятников на указанных шести станциях с теми, которые были установлены на соседних широтах.

И теперь, указав некоторые принципы для руководства наших исследований, мы рассмотрим основания для принятия сжатия, которое назначил Сабин. Заметим, что мы не обсуждаем ни заслуги наблюдателя, ни точность его работы[1]. Наше рассуждение основано на опубликованных наблюдениях. Факты не изменятся, и мы не думаем, что наши доводы могут быть оспорены.

В конечном счёте выводы Сабина основаны на его наблюдениях возле экватора. Семь его станций были расположены менее, чем в 20° от него. [Приведены широты (λ) и соответствующие длины (секундных) маятников (в дюймах).] Сразу же заметна исключительная беспорядочность наблюдений, но для более чёткого суждения о расхождениях длин уместно вычислить длины маятника на экваторе, соответствующие каждому наблюдению, т. е. определить L из уравнений

$$l = L + f\sin^2\lambda.$$

Величина f [равная разности длин маятника на полюсе и на экваторе] известна только приближённо, но она не может быть ни меньше 0,2, ни больше 0,21[2]. [Приведены длины маятника на экваторе, вычисленные по указанной формуле при $f = 0{,}2$ и 0, 21.]

При согласованных и относящихся к одному и тому же сжатию наблюдениях числа этой таблицы должны были бы почти совпадать, но этого нет и в помине. Мы можем различить три различные системы, в соответствии с которыми длины маятника на экваторе равны около 39,02; 39,015; и 39,0117. Приняв последнее значение и сопоставив его с наблюдениями на станциях тригонометрической съёмки Великобритании, мы выведем сжатие, очень мало отличающееся от обычно принятого. Второе значение приведёт подобным образом почти к тому результату, который вывел сам Сабин. Наконец, значение 39,02 приводит к ещё большему сжатию.

Но можно подумать, что следует принять среднее из всех семи экваториальных наблюдений[3], т. е. 39,0156, чуть отличающееся от второго из трёх значений и почти совпадающее с результатом Сабина, которое он вывел из всех сочетаний своих наблюдений. Приведённые соображения проясняют всю таинственность исследований Сабина и указывают действительную причину однородности и согласованности результатов, которые сохранились в их кажущихся существенных отличиях при вычислениях. Этот вывод является важнейшим доводом в пользу предложенного сжатия.

Следует заметить, что он применил только свои собственные тропические наблюдения и что они составили часть всех его вычислений. Не нужно быть проницательным, чтобы обнаружить, что его результаты могли лишь немного измениться при сочетании среднего из экваториальных наблюдений с северными. Если исключить Тронхейм [Норвегия], то наблюдения на северных станциях будут довольно хорошо согласованы, и, следовательно, почти то же самое сжатие будет выведено из каждого вычисления, которое включит все тропические наблюдения.

Поэтому, хоть арифметические операции многочисленны, но свидетельства в пользу результата не накапливаются. Всегда выводится одно и то же сжатие, потому что можно утверждать, что основа для вычислений, а именно длина среднего экваториального маятника, выведенная по тропическим наблюдениям, в любом случае остаётся неизменной. Наши замечания достаточно очевидны, но для их подтверждения можно добавить, что при исключении какого-либо тропического наблюдения сжатие также изменится.

При учёте всех 13 станций Сабин вывел длину экваториального маятника, равную 39,01568 и сжатие 0,0346 [1/289,0], но при исключении станций St. Thomas [на Ямайке] и Ascencion [на острове в Южной Атлантике] длина маятника по 11 станциям окажется равной 39,01374 и сжатие 0,00340 [1/294,1]. Наконец, при исключении пяти станций, в том числе двух упомянутых, мы получим 39,01213 и 0,00336 [1/297,6], что очень близко к обычно принятому значению.

Если же добавить к 13 станциям Сабина наблюдения других исследователей возле экватора, например, на станциях Мадрас [Индия] и Рио-де-Жанейро, то и длина маятника, и сжатие уменьшатся. Нелишне добавить, что на с. 353 своего исследования Сабин утверждает:

Если каждую из моих тропических станций отдельно сочетать с каждой станцией, расположенной в пределах 45° от полюса, ни один результат, который включает все неправильности местного притяжения, не приведёт к такому же малому сжатию, как в предыдущем случае.

Это совершенно верно по отношению к пяти из его тропических станций, но я (1826, с. 96) показал, что при сочетании станций Maranham и Тринидад с семью наблюдениями Кэтера сжатие в среднем оказывается равным 0,00329 [1/304,0], что вряд ли можно считать отличным от 0,00327 [1/305,8], которое приняли французские философы.

Всё наше обсуждение показывает, что сжатие, приведённое Сабиным, выводится только, если все тропические наблюдения без добавления других наблюдений сочетаются с северными наблюдениями. При любом изменении средней длины экваториального маятника либо ввиду отклонения некоторых длин, либо после добавления наблюдений, сделанных другими исследователями, сжатие изменится. При средней длине, равной 39,0156, выведенной по тропическим наблюдениям, сжатие равно 0,00346, в противном же случае оно изменится. Мы должны признать, что семь тропических наблюдений Сабина исключительно беспорядочны и аномальны. Среднему, выведенному по столь малому числу подобных наблюдений, нельзя доверять.

Но на с. 359, на основе более обширного сравнения фактов, Сабин заявил, что длина экваториального маятника равна 39,01 дюйма, а не 39,0156. При сочетании этой новой длины с северными наблюдениями сжатие оказывается равным примерно 0,00326, т. е. совпадает с обычно принятым значением. И если это значение длины маятника установлено и определённо, естественно полагать, что зависящее от него число 0,00326 является сжатием предпочтительнее, чем 0,00346, которое выведено из определённых сочетаний наблюдений и изменяется при выборе других сочетаний.

Но тропические наблюдения Сабина не согласуются ни друг с другом, ни со всеми доброкачественными наблюдениями других исследователей. При теперешнем уровне наших знаний пять из них, или по крайней мере четыре могут считаться только аномалиями, которые не соответствуют средней фигуре Земли. Их беспорядочность существенна и очевидна.

Станции Maranham и St. Thomas можно считать расположенными на экваторе, их небольшие широты вряд ли влияют на длину маятника. Но если секундный маятник перевести с первой станции на вторую, чтобы остаться секундным он должен быть удлинён на 86/10 000 дюйма[4], а если его перевести на полюс, удлинён менее, чем на 21/10 000 дюйма. Таким образом, между этими двумя станциями существует местная аномалия, которая составляет 1/24 всего возрастания силы тяжести от экватора до полюса. Следует признать, что когда будет неоспоримо доказано, что в распределении силы тяжести существуют подобные неравенства, мы не сможем надеяться на возрастание точности исследования фигуры Земли по маятниковым наблюдениям.

Примечания

1. Напрасно автор не исследовал точность наблюдений Сабина.

2. Странное отличие в количестве значащих цифр, которое проявляется и ниже. Указанная точность определения длины маятников была явно фиктивной, но подобный образ действий был обычен.

3. Ни в коем случае не полагалось осреднять результаты трёх различных *систем*, притом плохие наблюдения вдруг стали хорошими.

4. Удлинение (притом не на 86, а на 860/10 000) следовало по результатам наблюдений, вообще же при приближении к экватору длина маятника должна была бы уменьшиться. Оценка местной аномалии не объяснена.

Ivory J. (1826), On the ellipticity of the Earth as deduced from experiments made with a pendulum. *London, Edinb. and Dublin Phil. Mag.*, vol. 68, No. 339, pp. 3 – 10; No. 340, pp. 92 – 101.

IV

Р. Л. Эллис

Замечания о фундаментальном принципе теории вероятностей

R. L. Ellis, Remarks on the fundamental principle of the theory of probabilities. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 9, pp. 605 – 607; перепечатка в книге автора *Mathematical and Other Writings*. Cambridge – London, 1863, pp. 49 – 53.

1. Я хочу добавить некоторые соображения к своим замечаниям о фундаментальном принципе теории вероятностей, которые я представил этому Обществу несколько лет назад. Я попытаюсь наиболее ясно и приемлемо выразить то, что считаю фундаментальным принципом теории вероятностей. Пока что этот принцип можно сформулировать так.

В длинном ряду схожих испытаний каждое возможное событие [как бы] *имеет склонность в конце концов повторяться с определённой частотой.*

Полагаю, что наше доверие к этому положению интуитивно. Это слово непременно употребляется во всех подобных случаях. Интуиция разума ясно и полностью постигает нечто, доходит и понимает, что доходит до истины. Таковы нераздельные элементы одного и того же действия мысли.

При попытке перевести указанный принцип на обычный философский язык мы можем в первую очередь заметить, что *схожие испытания* выражает родовое понятие явлений, к которому относятся отличающиеся друг от друга результаты различных видов [событий]. Пусть испытанием является бросок игральной кости. Его можно считать общим, родовым событием, а выпадение одного, двух, … очков, – его различными видами.

Менее понятно как выразить *длинный ряд* и *определённый вид испытаний* [в приведённой формулировке этого последнего выражения не было], чтобы тем самым более очевидным образом выразить аналогию между фундаментальными принципами теории вероятностей и других наук.

Без труда эту идею (?) никак не удастся выразить, потому что по своей сути она отрицательна и неопределённа. Упомянутые мной фразы просто имеют в виду отсутствие ограничений, которые были бы нераздельны от конкретных случаев или от их конечного числа либо будут пояснены и развиты в течение определённых времени и пространства (?).

При рассмотрении отдельных случаев у нас нет уверенности в том, что частота появления [событий] зависит от обстоятельств,

общих для всех испытаний. Напротив, [в каждом случае] мы усматриваем в определяющих обстоятельствах их появления посторонний элемент, т. е. посторонний для идеи рода и его видов.
Совместно, так сказать, вторгаются случайность и ограниченность и вместе исчезают при рассмотрении рода в целом или (что то же самое и может быть названо идеалом и практически невозможным) изучением всего того, что в нём скрытно содержится. Если согласиться с этим, то видимо окажется, что фундаментальный принцип теории вероятностей можно включить в следующее утверждение.

Понятие рода содержит в себе численные соотношения между включёнными в него видами.

2. Но можно спросить: как эти понятия соотносятся с внешним миром? Как они могут служить основанием настоящей науки, а именно науки о том, что реально существует? Такие вопросы уводят нас обратно к тому, что длительное время было великим философским спором между реалистами и номиналистами. Первые утверждали, что при использовании общего термина мы мыслим о действительно существующей вещи. Как и всякий другой, они признавали, что в некотором смысле существовать может только индивидуальное, но что общие понятия не являются просто вымыслом, а существуют сами по себе.

Более того, они служат основанием истинности общих положений. Поэтому утверждение о том, что фундаментом теории вероятностей служит утверждение о родах и их видах, но что она в то же время является реальной наукой, означает признание реалистического взгляда на природу. И по размышлению я полагаю, что мы не можем от этого уклониться.

Если же сказать, то группировка явлений происходит лишь в уме, полностью отрезана от внешней реальности и произвольна, то можно будет ответить, что никакое умственное действие не может быть таким. Почему и как факты и идеи соответствуют друг другу несомненно является одним из великих вопросов философии. Ответ конечно должен быть разработан с учётом мысли о том, что человек по отношению ко вселенной не является посторонним наблюдателем, но в некотором смысле частичкой того, что он обдумывает. Rebus avolsa ratio [размышление, не терпящее сущностей?], что, по правде говоря, является фундаментальным постулатом номинализма, поэтому немыслимо.

Наши мысли, конечно, наши, но они содержат какую-то частицу истинности и разумности, что-то, и даже больше того, из себя представляют. Veritas essendi (истина существования), если воспользоваться языком учёных, это источник, из которого выводится veritas cognoscendi [истина понимания?]. Значение указанной фразы, которое они старались передать, на более современном языке выразил Лейбниц:

Бог есть заключительная причина вещей, и Его познание является не менее принципом науки, чем Его сущность и желания являются принципом живых созданий. [Следует упоминание немецкого философа И. Э. Эрдмана (1805 – 1892) без указания источника. Становится непонятным: кого же цитирует автор, Лейбница или Эрдмана? Далее он [кто именно?] добавляет:[…]

Факт и идея соответствуют друг другу в каждой науке, потому что факт есть реализация идеи [не наоборот ли?]. Эта реализация, однако, по необходимости частична и неполна. Точнее, это происходит потому, что один и тот же факт одновременно реализуется в ряде отдельных (в нашем понимании) идей.

Только мысленно отдалив действие возмущающих сил на неопределённое расстояние, мы сможем представить абсолютное подтверждение какого-либо априорного закона. Факт и идея встречаются только на горизонте как земля и небо, хотя в реальности всюду существует среда, всюду она окружает и истолковывает λη μεαινα [твёрдую землю?], на которой мы стоИм. Она взращивает и поддерживает все бесчисленные формы структур и жизни.

Бесконечно продолженный ряд испытаний, включающийся в обычное утверждение фундаментального принципа теории вероятностей, аналогичен бесконечной и бесконечно гладкой горизонтальной плоскости, которая позволит нам подтвердить первый закон движения.

3. Простое отрицательное понятие отсутствия возмущающих сил всё время смешивается с понятием склонности, присущей ряду последовательно разрабатываемых результатов, восстановить равновесие частоты появления [событий], которое было временно нарушено случайными обстоятельствами.

Обычно полагают, что это понятие, которое, как известно, является основой многих неудачных попыток перехитрить случай, достаточно опровергается утверждением о том, что прошлое не может влиять на предстоящее. Но на самом деле прошлое влияет на будущее тысячью различными путями.

И обеспечить возможность бесконечного ряда испытаний мы можем только мысленно. Те из них, которые мы считаем постоянными обстоятельствами, не изменяются постоянно в одном и том же направлении даже как угодно медленно. Так, коробочка для игральных костей сглаживается, а рёбра костей округляются[1]. В этом примере мы не можем определить, какой результат облегчится подобными изменениями, но это не всегда так. Схожие изменения могут склонить частоты появлений к такому изменению, которое восстановит нарушенное прошедшими испытаниями равновесие. И поэтому нет ничего нелепого в понятии восстанавливающей и уравновешивающей тенденции.

Впрочем, основание, на котором это обычно предполагается, указывает на серьёзное смешение мыслей. К примеру, совершенно разумно выяснять, не чаще ли последовательность жарких лет сменяется холодными, а холодных – жаркими, чем наоборот. Подобные вопросы указывают на ветвь теории методов наблюдения, на которую до сих пор обращали мало внимания.

Примечание

1. Разве ни сглаживание, ни округление не действуют постоянно и, возможно, в одном и том же направлении?

V

Р. Л. Плекетт

Принцип среднего арифметического

R. L. Plackett, Principle of the arithmetic mean.
Biometrika, vol. 45, 1958, pp. 130 – 135.
Перепечатка: Pearson & Kendall (1970, pp. 121 – 126)

Впервые с оцениванием параметров по наблюдениям столкнулись, видимо, вавилонские астрономы в последние три столетия до н. э. Их успехи записаны в клинописной форме на глиняных табличках, и исследовал их (Neugebauer 1951). Позже он (1955) опубликовал сборник их текстов, и ниже мы [в частности] приводим сводку его работы.

Между 500 – 300 гг. до н. э. вавилоняне разработали систематическую математическую теорию движения Солнца, Луны и планет, равно как и простые арифметические схемы для определения мест этих небесных тел через регулярные интервалы времени. Нам только известно, что основные параметры представляли собой компромисс наблюдений и требований вычислений. Ничего не сохранилось о методе их оценки по первоначальным данным, которые также почти полностью отсутствуют.

Несколько больше сведений имеется о методах исследования данных наблюдения греческих астрономов, потому что их открытия стали возможны частично ввиду развития математических методов, и частично потому, что примерно с 300 г. до н. э. непрестанно накапливались ряды наблюдений мест звёзд и планет градуированными инструментами.

Птолемей представил полный отчёт о том, что было им известно, и почти всё, что сохранилось о работе их величайшего предшественника, Гиппарха. Мы будем ссылаться на переведённое и комментированное издание его труда (Manitius 1913).

Гиппарх (т. 1, с. 133) заметил неравенство интервалов времени между последовательными прохождениями Солнца через одну и ту же точку солнцестояния. Это навело его на вопрос о том, является ли тропический год постоянным или нет. Впрочем, он решил, что погрешность его наблюдений и в основанных на них вычислениях могла достигать 1/4 дня, и заключил, что любое возможное изменение длины года было совсем незначительно.

[И тем не менее] он позднее заявил, что наибольшее изменение длины года составляло 3/4 дня. Видимо, Гиппарх приравнял эту оценку половине размаха своих наблюдений (т. 1, с. 136 – 137).

Гиппарх вычислял на основе некоторых затмений Луны, которые он наблюдал в непосредственной окрестности неподвижных звёзд. Именно, он определял, насколько звезда Спика (α Девы) находилась западнее точки осени при каждом затмении и установил некоторые указания на то, что в его время её наибольше расстояние составляло $6\frac{1}{2}$ градусов и наименьшее – $5\frac{1}{4}$ градуса. Вряд ли было возможно, чтобы за такое короткое время Spica настолько изменила своё место, и Гиппарх решил, что вероятно Солнце, от которого он определял положение звёзд, не возвращалось на своё прежнее место через равные промежутки времени.

Но выбор среднего арифметического из сравнимых наблюдений ещё не стал общим принципом. Это видно по оценке Гиппарха длины года (т. 1, с. 134 – 135).

[Автор выписывает разности (длина года – 365 дней) для наблюдений шести осенних и двух весенних равноденствий, но без всяких вычислений.]

Птолемей (т. 1, с. 142) добавил своё собственное единственное наблюдение в момент осеннего равноденствия в 139 г. н. э. и сравнил его с четвёртым наблюдением Гиппарха в 147 г. до н. э. За 285 египетских лет осеннее равноденствие ушло вперёд на 70 дней 7 часов (в его записи на 70 + 1/4 + 1/20 дней). Затем (т. 1, с. 143) он добавляет своё единственное наблюдение весеннего равноденствия […]. Его оценка длины года: ($365\frac{1}{4}$ – 1/300) дней, что в точности совпадает с оценкой Гиппарха (т. 1, с. 145).

Аналогичный пример птолемеева преклонения перед Гиппархом усматривается в его обсуждении прецессии, т. е. явления, открытого Гиппархом и вызванного движением полюса экватора около полюса эклиптики (примерно 50" в год). По оценке Гиппарха (т. 2, с. 15) изменение положений солнцестояний и равноденствий составляло не менее сотой доли градуса в год.

Птолемей (т. 2, с. 18 – 20) приводит список склонений 18 звёзд по (1) Тимохарису и Аристиллу; (2) Гиппарху; (3) и по своим собственным наблюдениям. Он выбрал 6 звёзд из 18 и показал, что по этим наблюдениям константа прецессии равна примерно сотой доли градуса в год, тогда как для Гиппарха это значение было нижней границей.

Несколько комментаторов начиная с Деламбра (1817, с. 254 – 255) исследовали эти уникальные данные. Деламбр показал, что среднее значение этой константы, выведенное по всем 18 звёздам, примерно равно верному [?] значению, вычислено ли оно по разности наблюдений (1) и (2) или (2) и (3).

Недавно Pannekoek (1955) подтвердил точность вычислений Птолемея и предположил, что тот выбрал 6 звёзд, которые лучше других соответствовали бы оценке в сотую долю градуса в год, но которые на самом деле слишком мало изменяли своё склонение.

Метод повторения и сочетания наблюдений одной и той же величины видимо ввёл Тихо Браге в конце XVI в. (Dreyer 1890, с. 350)[2]:

Каждое наблюдение […] *обеспечивало прямое восхождение звезды* α *Овна. В течение шести лет Тихо повторял их по возможности чаще, а для исключения параллакса и рефракции сочетал результаты попарно, так чтобы один был основан на наблюдении Венеры восточнее, а второй – западнее Солнца. Наблюдения выбирались так, чтобы эти небесные тела находились как можно дальше друг от друга, имели бы в обоих случаях те же самые альтитуды, склонения и расстояния до Земли.*

Из наблюдений 1582 *г. Тихо отобрал три одиночных, а из* 1582 – 1588 *гг.* – 12 *результатов, каждый из которых был средним из двух, выбранных так, как описано выше. Эти* 15 *наблюдений чудесно соответствовали друг другу, вероятная ошибка среднего оказалась равной всего* ± 6”, *хотя* 24 *отдельных результатов в* 12 *группах довольно сильно отличались друг от друга с размахом в* 16’30”. *Так или иначе, принятый Тихо окончательный результат исключительно хорош. Он хорошо согласуется с лучшими современными определениями: на конец* 1585 *г. он принял* 26° 0’30”, а современное значение на ту же дату – … 45”.

Вот эти наблюдения (Brahe 1915, т. 2, с. 170 – 197). [Автор выписывает указанные наблюдения и цитирует на латинском языке описание процесса сочетания наблюдений первой пары.]

Среднее из 12 средних было равно 26° 0’27” , а из всех 15 – … 29”, а как он получил 30” не описано. Но заметим, что координаты девяти главных звёзд в его каталоге приводятся с шагом в 5”, что было более, чем достаточно для целей наблюдения[3].

В 15 случаях из 18 координаты этих звёзд отличались от их точных значений менее, чем на минуту, и в своём знаменитом высказывании Кеплер (1609/1992, с. 286) описал, как он смог вычислить элементы круговой орбиты для Марса, отличающиеся от значений Тихо на 8’ и менее, но отказался от них, потому что погрешность в 8’ не могла пренебрегаться столь тщательным наблюдателем.

Итак, Тихо применил среднее арифметическое для исключения систематических ошибок. Его же применение как более точного значения, чем у отдельного наблюдения, не так далеко, и определённо появилось примерно в конце XVII в[4]. Это доказывает выдержка [опущена в переводе] из обсуждения действия погрешностей настенного инструмента на прямое восхождение звёзд (Flamsteed 1725, т. 3, с. 137).

Третий пример поясняет сочетание данных различных наблюдений. В 1736 – 1737 гг. французская экспедиция под руководством Мопертюи была послана в Лапландию для измерения дуги меридиана, чтобы по её сравнению с длиной соответствующей дуги во Франции решить, сплюснута ли Земля у полюсов, как утверждал, например (??) Ньютон, или у экватора, как заявляла семья Кассини[5]. Метод наблюдений в экспедиции Мопертюи был таков (Clarke 1880, с. 5):

Каждый наблюдатель сам измерял углы и записывал результаты отдельно от других, затем они (!) *осредняли результаты каждого угла и сообщали только эти средние*.

Оказалось, что градус в Лапландии был длиннее, и Вольтер поздравил Мопертюи за сплющивание и Земли, и семьи Кассини.

Примерно в то же время вычисление дискретных вероятностей было приведено в определённую форму (?), а появление дифференциального исчисления позволило обобщать вычисления на непрерывные вероятности. Распределение среднего арифметического стало привлекать математиков, знакомых с новой техникой, и за пионерным исследованием Симпсона последовал длинный мемуар Лагранжа (1776).

Симпсон (1756) определил вероятность среднему из t наблюдений в двух случаях быть ошибочным не более, чем на m/t

1. Если возможные ошибки $-v, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, v$ происходят с равными вероятностями

2. Если те же ошибки происходят с вероятностями, пропорциональными $1, 2, \ldots, v+1, \ldots, 2, 1$

Проблему в азартной игре для случая (1) решил Муавр (1712). В случае (2) производящая функция равна квадрату этой функции в случае (1), и поэтому суть статьи Симпсона в основном ограничивалась физическим истолкованием математического результата[6].

Новое у него появилось в 1757 г., когда он обобщил второе распределение на предельный случай. Он получил непрерывное распределение в форме равнобедренного треугольника и при помощи интегрирования определил, что вероятность погрешности среднего арифметического ниже, чем у одиночного независимого наблюдения.

Долг Симпсона Муавру ясен[7], а распространённое в то время уважение *Учения о случае* примечательно удостоверяется письмом Лагранжа Лапласу в 1776 г. (Lagrange 1892, с. 66):

Это верно, что я иногда помышлял перевести труд Муавра [на французский язык], *снабдив его примечаниями и добавлениями и* *даже уже перевёл некоторую его часть, но давно отказался от этого замысла. Я был восхищён, узнав, что Вы* [Лаплас] *берётесь выполнить это и убеждён, что* [Ваш перевод] *будет соответствовать тому высокому мнению, которое* [сложилось] *обо всём, что выходит из-под Вашего пера. И я со своей стороны также призываю Вас продолжать эту работу и заранее от всего сердца рукоплещу Вашему успеху.*

[Ответ Лапласа 1780 г. см. там же, с. 95.]

На первых 50 страницах своего мемуара Лагранж подробно рассмотрел дискретные распределения в том же духе, что и Симпсон [на которого не сослался]. Он снова широко пользовался производящими функциями и снова обобщил результаты на непрерывный случай. В Задаче 6 Лагранж вывел, как можно сейчас сказать, оценки наибольшего правдоподобия для параметров при полиномиальном распределении, а в задачах 4 и 5 пытался показать, что мода распределения выборочных средних та же, что у средних для совокупности.

Основное значение для вероятности среднего арифметического находится в последних 12 страницах. Здесь Лагранж описывает метод непосредственного получения результатов для непрерывных распределений. Он оценивает интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{a^x}dx = \frac{(m-1)!}{(\ln a)^m},\ a > 1 \qquad (1)$$

и замечает, что коэффициент при a^{p-x} в выражении

$$(Pa^p + Qa^{p-1} + \ldots) \div (\ln a)^m \qquad (2)$$

может быть вычислен при замене знаменателя (2) по формуле (1) и что этот знаменатель равен

$$[Px^{m-1} + Q(x-1)^{m-1} + \ldots]dx \div (m-1)!$$

Далее Лагранж утверждает, что дифференциал функции распределения суммы n независимых переменных, каждая из которых обладает плотностью $y(x)$, является коэффициентом при a^x в интеграле

$$[\int ya^x dx]^n\ . \qquad (3)$$

Здесь термин *коэффициент* понимается в указанном выше смысле. Следует несколько примеров, в которых область определения погрешностей конечна, так что интеграл (3) без показателя степени является суммой членов подобных (2), а потому допускает только что описанные процессы. Последнее распределение задано косинусоидой[8] и мемуар заканчивается рядом остроумных преобразований.

Сегодня мы можем признать последнюю часть мемуара Лагранжа начальной точкой теории интегральных преобразований. Эту заслугу вряд ли мог увидеть Тодхантер (1865), но её сразу же оценил Лаплас (1780): *Ваш превосходный метод*. Впоследствии он включил этот метод в качестве основного при исследовании сочетания наблюдений.

Признательность. Я весьма благодарен доктору Флетчеру за бесценные предложения, руководство в астрономической области и существенное исправление моих переводов.

Примечания

1. Теперь можно сослаться на новые переводы Птолемея 1984 и 1998 гг.

2. О наблюдениях в древности см. Шейнин (2013, § 2.1.4). Наблюдения уже в то время проводились регулярно. Выше автор косвенно утверждал, что градуировка инструментов повышала точность наблюдений. Намного более важным было стремление наблюдать в оптимальные моменты времени, например, во время *стояния* небесного тела.

3. Тихо назначил один и тот же вес всем 15 наблюдениям, так что одиночные наблюдения почему-то учитывались наравне с осредняемыми. С другой стороны, он таким образом применил обобщённое среднее арифметическое.

4. Кеплер (1609/1992, с. 200/63) также принял обобщённое среднее арифметическое. Намного важнее: он пояснил, что поступил *по добру и справедливости*, а это выражение встречается у Цицерона и заканчивается фразой: *а не по букве закона*. Это означает, что среднее арифметическое уже считалось буквой закона. См. Шейнин (2017, с. 32).

5. На самом деле длина градуса измерялась и в Перу (Буге, Кондамин). Северная и южная части французского градусного измерения не годились для поставленной цели, поскольку соответствующие длины градуса мало отличались друг от друга. Измерения там производили не только члены семьи Кассини, и последнее: при обработке измерения была допущена ошибка (Bessel 1841).

6. Статья Симпсона окончательно ввела теорию ошибок в теорию вероятностей.

7. Pearson (1978, с. 145 и 184) решительно заявил по поводу приоритетного спора Муавра и Симпсона, что (с. 184) Симпсон был *бесстыдным лжецом и низким мошенником*.

8. Вряд ли косинусоида имела практическое значение как закон распределения.

Библиография

Шейнин О. Б., Sheynin O. (1973), Mathematical treatment of astronomical observations. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 11, pp. 97 – 126.

--- (1984), On the history of the statistical method in astronomy. Там же, vol. 29, pp. 151 – 199. **S, G,** 30.

--- (1993), Treatment of observations in early astronomy. Там же, vol. 46, pp. 153 – 192. **S, G,** 30.

Bessel F. W. (1841), Über einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluss auf die Bestimmung der Figur der Erde. *Abhandlungen*, Bd. 3. Leipzig, 1876, pp. 55 – 62.

Clarke A. R. (1880), *Geodesy*. Oxford.

Delambre J. B. J. (1817), *Histoire de l'astronomie ancienne*, tt. 1 – 2. Paris.

De Moivre A. (1712, латин.), De mensura sortis or the measurement of chance. *Intern. Stat. Rev*., vol. 52, 1984, pp. 236 – 262.

Dreyer J. L. E. (1890), *Tycho Brahe* etc. Edinburgh.

Flamsteed J. (1725), *Historia coelestis Britannica*, tt. 1 – 3. London.

Kepler J. (1609, латин.), *New Astronomy*. Cambridge, 1992, 2015.

Lagrange J. L. (1776), Sur l'utilité de la méthode de prendre le milieu les résultats de plusieurs observations etc. *Oeuvres*, t. 2. Paris, 1868, pp. 173 – 234.

--- (1776), Письмо Лапласу 30 дек. *Oeuvres*, t. 14. Paris, 1892, p. 66.

Lambert J. H. (1760, латин.), *Photometria*. Augsburg. Неполный немецкий перевод: *Ostwald Klassiker*, NNo. 31 – 33, 1892.

Laplace P. S. (1780), Письмо Лагранжу 11 авг. В книге Lagrange J. L. *Oeuvres*, t. 2. Paris, 1868, p. 95.

Manitius K. (1913), *Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie*, Bde 1 – 2. Leipzig.

Neugebauer O. (1951), *The Exact Sciences in Antiquity*. Copenhagen, 1955. Нейгебауер О. (1968), *Точные науки в древности*. М. Перевод второго издания 1955 г.

--- (1955), *Astronomical Cuneiform Texts*, vols. 1 – 3. London.

Pannekoek A. (1955), Ptolemy's precession. *Vistas in Astronomy*, vol. 1, pp. 60 – 66.

Pearson E. S., Kendall M. G., редакторы (1970), *Studies in the History of Statistics and Probability*. London.

Pearson K. (1978), *History of Statistics in the 17th and 18th Centuries* etc. Лекции 1921 – 1933 гг. Редактор E. S. Pearson. London.

Ptolemy, Птолемей (1984), *Almagest*. London.

--- (1998), *Альмагест*. М. Перевод И. Н. Веселовского.

Simpson T. (1756), On the advantage of taking the mean of a number of observations etc. *Phil. Trans. Roy. Soc*., vol. 49, pt. 1, pp. 82 – 93. **S, G,** 14.

--- (1757), An Attempt to show the advantage etc. В книге автора *Misc. Tracts on Some Curious and Very Interesting Subjects* etc. pp. 64 – 75. **S, G,** 14.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

Tychonis Brahe Dani (1915), *Opera omnia*, t. 2. Hauniae.

VI

Дж. У. Л. Глейшер

О законе лёгкости ошибок наблюдения и методе наименьших квадратов

J. W. L. Glaisher, On the law of facility of errors of observation
and on the method of least squares.
Mem. Roy. Astron. Soc., vol. 39, No. 2, 1872, pp. 75 – 124

Предисловие переводчика

Мы значительно сократили текст автора, исключив повторения и дополнительный материал, не относившийся к его теме. Мы также были вынуждены отказаться от печатания многих формул и потому выпустили многие математические рассуждения. Нам также помешали многочисленные небрежные выражения и ошибки автора и слишком мелкий шрифт формул. Звёздочками * мы пометили многочисленные места, к которым мы в заключительном комментарии возвращаемся только обобщённо.

[1] Abbe (1871) указал, что профессор Роберт Эдрейн независимо опубликовал МНКв в 1808 г.[1] Хорошо известно, что все обоснования этого метода содержат по крайней мере некоторые трудные места, а потому новое исследование этой проблемы необходимо вызывает большой интерес. Некоторые исследования закона лёгкости exp($-h^2x^2$) далеко не строги, но все они в какой-то мере важны, поскольку бросают свет на свойства этого закона. Можно ожидать, что новое исследование, притом, что указанный закон не был заранее известен автору, окажется действительным добавлением к известным процессам[2] или по крайней мере их подтверждением.

Доказательство Эдрейна представляется мне намного худшим по строгости и убедительности, чем любое обычное исследование. И всё же по указанным выше причинам представляется полезным отметить логический ход мыслей, который привёл его к закону лёгкости.

С тех пор, как МНКв был впервые предложен Лежандром и Гауссом, появилось несколько [новых] его доказательств. Некоторые стремились доказать закон лёгкости, другие только имели в виду обоснование метода сочетания уравнений по МНКв. Ellis (1849b) тщательно исследовал и исправил многие важнейшие сочинения, но без особого упора на закон лёгкости. Немало написали Дж. Гершель, тот же Эллис, Буль, Де Морган и др. Поэтому после обзора доказательств Эдрейна я постараюсь рассмотреть, как [нормальный] закон следует из различных предположений о природе ошибок и т. д. (?) и исследовать насколько эти предположения согласуются друг с другом.

Будет также необходимо остановиться на способе, который применили Гаусс и Энке, Лаплас, Пуассон, Эллис, Донкин и др. при рассмотрении этой темы и в какой-то мере обсудить априорные свидетельства в пользу того, что среднее арифметическое из некоторого числа несогласующихся наблюдений видимо равной доброкачественности является их вероятнейшим результатом. Мы будем в основном ссылаться на главные принципы и предложения, однако при обращении к методу Лапласа, который равно своеобразен и в анализе, и в предположениях, окажется необходимым исследовать математическую часть нашей темы. Мы закончим несколькими замечаниями о вероятнейших результатах в случае закона лёгкости в виде $\exp(-m\sqrt{x^2})$, который априорно весьма естественен и был предложен Лапласом в одном из его ранних мемуаров[3].

Будет удобно описать доказательство Эдрейна как можно короче, притом в дифференциальных обозначениях, а не при помощи флюксий, и отметить его интересные места. Боюсь, что подумают, что мои комментарии слишком пространны, но несколько таких мест видимо заслуживают обсуждения независимо от самогО доказательства.

Вот вопрос Эдрейна: Пусть AB – истинное, а Ab – измеренное с погрешностью Bb значение некоторого расстояния. Какова вероятность Bb? *Мы принимаем в качестве самоочевидного принципа, что погрешности x, y пропорциональны измеренным расстояниям a, b.* Поэтому для вероятнейшего результата следует принять, что

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}. \qquad (1)$$

Пусть вероятности этих погрешностей равны $\varphi(a, x)$ и $\varphi(b, y)$. При определении x и y из соотношений

$$x + y = E,\ \varphi(a, x)\varphi(b, y) = \max \qquad (2)$$

мы, очевидно, должны получить уравнение (1), но, поскольку x и y – простейшие рациональные функции a, b и E, это уравнение должно быть простым. Из (2) следует, что

$$\frac{\varphi'(ax)}{\varphi(ax)}dx + \frac{\varphi'(by)}{\varphi(by)}dy = 0,\ dx + dy = 0,\ \frac{\varphi'(ax)}{\varphi(ax)} = \frac{\varphi'(by)}{\varphi(by)}.$$

Последнее уравнение должно быть равносильно (1), и это выполняется проще всего, если

$$\frac{\varphi'(ax)}{\varphi(ax)} = \frac{mx}{a}, \frac{\varphi'(by)}{\varphi(by)} \frac{my}{b},$$

причём *m* произвольно. Далее,

$$\varphi(ax) = \exp(a' + \frac{mx^2}{2a}).$$

Эдрейн замечает, что $m < 0$ и что более общий закон будет соответствовать вероятностям погрешностей *x, y, z, ...* в расстояниях *a, b, c, …* Он заканчивает интегрирование замечанием о том, что при должном выборе константы оказывается, что для *кривой вероятности* (!)

$$y = \exp(f^2 - x^2), \text{ или, при } f = 0,\ y = \exp(-x^2). \qquad (3).$$

Аббе ссылается на две другие статьи Эдрейна (1818a, 1818b), написанные в том же 1808 [1809] г. В другом источнике я обнаружил, что Эдрейн ссылался лишь на эти собственные статьи, т. е., что он не знал ни о Лежандре, ни о Гауссе.

[2] Вот рассуждение Эдрейна (1818a). По теореме Клеро широта эллипсоида λ и длина секундного маятника *r* связаны в некоторой точке уравнением

$$r = x + y\sin^2\lambda$$

с двумя постоянными. Эдрейн определяет их, полагая, что

$$(x + y\sin^2\lambda_1 - r_1)^2 + (x + y\sin^2\lambda_2 - r_2)^2 + \ldots = \min.$$

Аналогично МНКв применил Puissant (1805/1819, т. 2, с. 341).

Вернёмся к первому мемуару Эдрейна. Уравнение (1) совсем не очевидно: вряд ли погрешность расстояния пропорциональна ему, скорее она меньше [см. ниже], и вернее было бы считать, что

$$\frac{x}{\sqrt{a}} = \frac{y}{\sqrt{b}}. \qquad (4)$$

В общем же

$$\frac{x}{f(a)} = \frac{y}{f(b)}. \qquad (5)$$

Итак, предположение о вероятнейшем уравнении (1), обосновываем ли мы его опытом или принимаем априорно, остаётся туманным и произвольным. Если же исходить из уравнения (3), то мы никак не сможем определить вероятнейшее значение *f*. Но выбор простейшей алгебраической функции из множества возможных и видимо равновероятных оказывается верным не только для удобства вычислений. Ведь по опыту известно, что менее сложные формулы встречаются чаще, чем сложные (например, линейные уравнения чаще квадратных). Поэтому, если нет никакой причины (например, аналогии) для предпочтения какой-либо формы, то теория вероятностей, понимаемая как теория, формулирующая выводы из опыта, более или менее обосновывает выбор простейшей алгебраической формы. Впрочем, это рассуждение весьма поверхностно, потому что мы встречаемся здесь с фундаментальными трудностями понятия *вероятность*: из какого класса следует выбирать и рассматривать наблюдённые результаты?

И даже, если вероятнейшие ошибки пропорциональны расстояниям, остаётся ещё одно обстоятельство, заслуживающее внимания. Поскольку положительные и отрицательные ошибки равновероятны, или поскольку так следует предположить, мы можем написать

$x - y = E$, а не $x + y = E$,

так что x и y будут значительно больше, чем в предыдущем случае, а поскольку вероятность погрешности убывает с её возрастанием, предыдущий случай вероятнее[4].

Представляется, далее, что истинность уравнения (1) вовсе не является необходимой для дальнейшего рассуждения Эдрейна, и потому предыдущие замечания, хоть и имевшие отношения к делу, не требуются для конечного результата.

Во второй части исследования Эдрейн определял φ из единственного условия экстремума в (2) при соблюдении равенства (1). [Следует малопонятное (в частности ввиду плохо напечатанных промежуточных обозначений) рассуждение, которое притом оказывается бесполезным.]

Странно, что Эдрейн видимо не представлял себе, что вероятность любой ошибки бесконечно мала: он непременно указывал, что она равна значению некоторой экспоненциальной функции. Ту же ошибку допустили другие авторы, включая

Айвори. Это обстоятельство может объяснить, почему соотношение между константами не было определено интегрированием в бесконечных пределах и закон лёгкости не был выведен в форме

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\exp(-h^2x^2). \qquad (6)$$

Весьма поверхностная и неубедительная суть доказательства Эдрейна подведёт нас к мысли о том, что он первым заметил удобство обработки уравнений по МНКв и попытался обосновать этот метод при помощи теории вероятностей. Но в любом случае нам следует (Аббе) признать, что Эдрейн независимо открыл и применил полезнейший арифметический (?) процесс, который способствовал продвижению точных наук.

[3] Я перехожу к другим существующим исследованиям закона лёгкости и МНКв. Хорошо известно, что этот метод предложил Legendre (1805, 1806) в качестве удобного средства обработки наблюдений без ссылки на теорию вероятностей. В предисловии он заметил:

Метод, который мне представляется простейшим и самым общим, состоит в том, чтобы привести к минимуму сумму квадратов ошибок […] *и который я назвал методом наименьших квадратов*.

И на с. 72 – 73:

Из всех принципов, которые могут быть предложены [для решения избыточных линейных систем] *нет, как я полагаю, более точного или простого в применении, чем тот, который мы использовали в настоящей работе. Он состоит в том, чтобы привести к минимуму сумму квадратов ошибок* [точнее, остаточных свободных членов].

Заметим, что Лежандр рекомендовал исключать слишком уклоняющиеся наблюдения*.

При исследовании различных обоснований МНКв удобно распределить их следующим образом.

1. Первоначальное исследование Гаусса и рассуждения Энке, Де Моргана и Эллиса о принципе среднего арифметического
2. Доказательство Дж. Гершеля и его критика Эллисом и Булем
3. Доказательство Тейта и аналогичные ему
4. Доказательство Донкина

Кроме того, Ivory [ii] предложил три доказательства, и Эллис (ссылка отсутствует), кажется, уделил им столько внимания, сколько они заслуживали, и вполне ясно указал, что они неудовлетворительны. Айвори пытался установить принцип наименьших квадратов без обращения к теории вероятностей и его рассуждения поэтому неубедительны. Его первое обоснование зависело от аналогии этого принципа и принципа рычага в механике, а два других, кажется, характеризовались неразберихой мыслей. Поскольку Эллис достаточно обсудил их, мы оставим Айвори, хотя иногда будем ссылаться на него.

Гаусс (1809, § 186), как он сам заявил, применял МНКв уже в 1795 г. В 1809 г. он впервые вывел теорию МНКв из принципов теории вероятностей. […] Итак, если можно доказать, что среднее арифметическое является вероятнейшим результатом, (6) окажется единственным законом лёгкости. Но ясно, что мы не имеем права применять это свойство среднего арифметического в качестве аксиомы. И вообще безусловно возможно представить себе наблюдения, подчиняющиеся другому закону лёгкости[5].

Но это рассуждение не доказывает, что предположение Гаусса не приведёт в конце концов к самым точным результатам. Пусть будет произведена только одна серия наблюдений, тогда совсем не обязательно, что их среднее арифметическое окажется лучшей оценкой. Но если таких серий десять тысяч, их средние арифметические в целом окажутся ближе к истине, чем любая другая серия результатов, полученная независимо от самих наблюдений[6].

В § 177 Гаусс не пытался доказать принцип среднего арифметического (*как аксиома должна быть принята гипотеза* […] *всегда будет надёжнее всего придерживаться* [среднего арифметического]).

[4] Encke (1834 – 1836) пытался доказать гипотезу Гаусса: при двух наблюдениях a и b следует принять как вероятнейший результат $x = (a + b)/2$, поскольку нет причины предпочесть одно из двух, коль скоро положительные и отрицательные ошибки равновероятны [поскольку нет смещения]. Пусть теперь сделано три наблюдения a, b, c. Тогда (1835, с. 265) следует выбрать их симметричную функцию. При двух наблюдениях мы имели бы 1/2 суммы каких-либо двух из трёх наблюдений, но для всех трёх

$$x = \psi[(a+ b)/2, c], = \psi[(a+ c)/2, b] = \psi[(b + c)/2, a].$$

Пусть $a + b + c = s$, тогда

$$x = \psi[(s - c)/2, c] = \psi[(s, c), \ldots$$

Но $\psi(s, c)$, $\psi(s, b)$ и $\psi(s, a)$ могут совпадать, только если $x = \psi(s)$. При $a = b = c$, $a = \psi(3a)$, $x = (a + b + c)/3$ и по индукции это рассуждение обобщается на n наблюдений.

Возражение очевидно[7]. Почему вероятнейший результат трёх наблюдений должен быть функцией вероятнейшего результата из *a* и *b* и из *c*? Что можно подумать о предположении о том, что положение точки, находящейся на равных расстояниях от A, B и C, зависит только от точки, расположенной в середине AB и от положения C?

Chauvenet (1863, т. 2, с. 425) с полным доверием воспроизвёл исследование Энке и заключил:

Доказанный здесь принцип, что среднее арифметическое из наблюдений равного достоинства является вероятнейшим значением измеренной величины, всеобще признан как простейший и очевидный и его вполне можно считать аксиомой.

Доказательство Энке ценно в основном потому, что оно несколько яснее выражает суть предположения, которое лежит в основе этого принципа: при схожих обстоятельствах положительные и отрицательные ошибки той же абсолютной величины равновероятны.

Энке заметил, что принцип среднего арифметического можно считать обоснованным либо его математическим доказательством, либо опытом, так как он соответствует методу сочетания простых наблюдений и был всеобще принят с непременным успехом. Но вряд ли имеет смысл указывать, что опыт не мог установить, что принцип среднего арифметического является наилучшим возможным.

Гаусс считал, что среднее арифметическое является *практически* лучшим методом сочетания наблюдений и что точность полученных результатов обосновала его применение, но мы разумно удовлетворились бы равно благоприятным методом [этого у Гаусса нет]. Он, однако, вовсе не утверждал, что вероятнейшее значение наблюдённой величины, доставленное средним арифметическим, было обосновано теорией вероятностей.

[5] Эллис (1849b, с. 205) утверждал, что правило среднего арифметического приводит к результату, который наверняка совпадает с истинным значением наблюдённой величины при бесконечном числе наблюдений[8], но точно такое же рассуждение, продолжал Эллис, покажет, что для любой нечётной функции f имеет место $\Sigma f(\varepsilon_i) = 0$[9] и $\Sigma f(x - a_i) = 0$.

Эти результаты не противоречивы. Оба верны в пределе и неверны в противном случае, и

Нет удовлетворительной [теоретической] *причины кроме удобства для выделения среднего арифметического из других правил, которые включены в* [последнее] *уравнение.*

Тейт (1865, с. 140) показал, к чему может привести предположение, принятое для упрощения дела: принцип среднего арифметического был принят так же, *Как мы можем предположить, что вычислитель настаивал на том, что сила притяжения убывает обратно пропорционально расстоянию, а не его квадрату, потому что тогда проблема трёх тел станет настолько простой, насколько она сейчас сложна, а её решение настолько точным, насколько оно сейчас в лучшем случае приближённо*.

Эллис указал, что Айвори предложил три доказательства МНКв, на самом же деле четыре, но рассуждение о втором из них [ii, часть 1, с. 6 и 7] настолько неважное, что Эллис может быть преднамеренно опустил его. Айвори, впрочем, несомненно считал его доказательством. Вряд ли оно заслуживало упоминания, но последние строки выражали мнение автора о правиле среднего арифметического.

Сумма ошибок некоторого числа наблюдений при его возрастании будет стремиться к нулю, но среднее из квадратов этих ошибок будет стремиться к какому-то числу, которое можно считать мерой точности наблюдений. Из нескольких серий наблюдений

Предпочтительнее та, у которой наименьшее среднее из квадратов ошибок наименьшая,

откуда и следует МНКв.

Нет надобности указывать, что можно было бы с таким же успехом сразу вывести МНКв. Айвори признаёт, что всё, сказанное про квадраты ошибок, можно было бы сказать о любой чётной степени ошибок. Принцип, которым он обосновывает выбор квадратов, в простейшем виде можно выразить так. […]

Важнейшее сочинение о теории среднего арифметического представил Де Морган (1864, с. 416 и след.). Он указал, что среднее из всех значений является в то же время средним предположением из всех возможных, необходимых для выбора[10].

В заключение этой темы следует сообщить о замечании Энке, которое он заимствовал у Ламберта (1760). Если рассмотреть периметры вписанных и описанных n-угольников в качестве двух наблюдений длины окружности, их среднее арифметическое не будет её вероятнейшим значением. Лучшее приближение доставит периметр вписанной фигуры плюс третья часть разности периметров. Но возражение очевидно: периметры не являются наблюдениями.

Что бы ни думать о строгости метода, который привёл Гаусса к признанию истинности [нормального] закона в общем случае [ничего подобного], обработка наблюдений по МНКв (включая определение средней [квадратической] ошибки) является его заслугой, тогда как чисто философское обоснование метода следует приписать Лапласу, который доказал обычные теоремы сочетания большого числа наблюдений без предположения о законе лёгкости отдельных наблюдений*.

Его исследование трудно для понимания, частично ввиду неполных объяснений, а частично по причине необычных обозначений и новизны методов. Несмотря на громадное аналитическое умение Лапласа, они теперь настолько отличаются от естественного хода при рассмотрении темы, что с первого раза нелегко особо доверять его результатам. Соответственно появились комментарии, которые намного облегчили части его трудов[11].

Очень большая доля сочинения Де Моргана (1845) является упрощённым переводом Лапласа, обогащённым замечаниями.

Приём, который привёл Лапласа к МНКв в случае более двух неизвестных, и отношение второго обоснования этого метода у Гаусса к Лапласу, заметно легче понятен в упомянутой статье Эллиса, а комментарий ко всей работе Лапласа см. у Тодхантера (1865).

Лаплас доказал МНКв только для случая двух неизвестных и заметил, что тот же приём доказательства применим в общем случае. Эллис обобщил анализ Лапласа, но показал, что МНКв выводится только после апостериорной проверки (?). Этот небольшой недостаток легко устраняется при помощи определителей[12], см. Тодхантер (1865, с. 578 – 588), притом независимо от анализа, от которого зависит закон лёгкости ошибок.

[6] Мы теперь исследуем вероятность того, что линейная форма погрешностей заключена в пределы $c - \eta$, $c + \eta$.

Я (1972) несколько упростил исследование Эллиса, заменив двойной интеграл Фурье однократным, который Дирихле применил для оценки [других] интегралов. Я доказываю общую теорему Пуассона при помощи того же [его же] принципа.

Требуется вычислить

$$\int\int\dots\int \varphi_1(\varepsilon_1)\varphi_2(\varepsilon_2)\dots\varphi_n(\varepsilon_n)d\varepsilon_1 d\varepsilon_2\dots d\varepsilon_n\,, \qquad (7)$$

в котором ε_i принимают любые значения при условии

$$c - \eta < \mu_1\varepsilon_1 + \mu_2\varepsilon_2 + \dots + \mu_n\varepsilon_n < c + \eta.$$

Функции лёгкости $\varphi(\varepsilon_i)$ могут быть различными, разрывными, и иметь различные области определения. Такой случай характеризует неравные вероятности положительных и отрицательных ошибок.

Интеграл [разрывный множитель] Дирихле имеет вид

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}\cos\gamma\theta d\theta.$$

Он равен 1 при γ в пределах – 1, 1 и 0 в противном случае. При умножении интеграла (7) на

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\eta\theta}{\theta}\cos(\mu_1\varepsilon_1+\mu_2\varepsilon_2+\ldots+\mu_n\varepsilon_n-c)\theta d\theta$$

все интегралы в (7) можно вычислять в бесконечных пределах и в конце концов появляется интеграл, который получил Пуассон (1824, § 8)

$$\int_0^\infty \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\cos(r_1+r_2+\ldots+r_n-c\theta)\frac{\sin\eta\theta}{\theta}d\theta.$$

[Обозначение η пояснено явно неверно.] Интеграл оказывается равным

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty[\int_{-\eta}^{\eta}\cos(l-c+t)\theta dt]\exp(-x^2\theta^2)dt,$$

$x^2 = [\mu^2h^2]$, $l = [\mu k]$, h_i^2 и k_i – константы, зависящие от закона лёгкости**13**. [Глейшер преобразует этот интеграл, но верхний предел выведенного интеграла невозможно прочитать.] Если положительные и отрицательные ошибки равновероятны, $l = c = 0$.

Исследование МНКв весьма схоже; к минимуму должна быть приведена сумма $[\frac{1}{h^2}(\varepsilon-k)^2]$, так что обычная обработка уравнений по МНКв предполагает, что наблюдения равноточны, а положительные и отрицательные ошибки равновероятны.

Мы не обсуждаем дополнительных теорем о МНКв, но их привёл Лаплас (1812/1886, Первое Дополнение). Тодхантер (1865 – 1869) обобщил метод Лапласа.

Эллис и Тодхантер (1865) упомянули, что Лаплас не указывает, что МНКв приводит к вероятнейшим значениям неизвестных, о чём Лаплас сам сказал. Обычно он называет МНКв наиболее благоприятным, и вот окончание его гл. 4 той же книги:

Этот метод […] *даёт наиболее точные* (?) *поправки, по крайней мере, если применять только линейные окончательные* [нормальные] *уравнения. Если рассматривать большое число наблюдений, это является необходимым условием, иначе* [последовательное] *исключение неизвестных* [из этих уравнений] *станет неосуществимым*.

Айвори [ii, часть 1, с. 165] пытался доказать, что в своих исследованиях Лаплас молчаливо принял [нормальный] закон, и что

Какими иными достоинствами этот закон ни обладало бы, он был не более и не менее общ, чем другие решения этой задачи.

Эллис не обсуждал его критику, и поэтому необходимо это сделать, хоть любой читатель Лапласа должен быть совершенно уверен, что никаких предположений о законе лёгкости он не вводил ни прямо, ни косвенно.

Айвори не указал, где именно Лаплас ввёл указанное ограничение и даже не рассмотрел анализ своего предшественника. Он обосновал своё утверждение тем, что из результатов Лапласа следовало, что среднее арифметическое является вероятнейшим результатом наблюдений, тогда как на самом деле это верно лишь для [нормального] распределения. Поэтому, заключил Айвори, Лаплас должен был косвенно принять соответствующее ограничение.

Ошибка здесь в том, что если указанное предположение верно для линейных уравнений, исходных для вывода окончательных [нормальных] уравнений, то оно верно вообще[14]. Кроме того, исследование Лапласа основано на существовании очень большого числа наблюдений, но это ограничение не используется при исследовании сочетания уравнений.

Совершенно очевидно, что остаточные свободные члены исходной системы не совпадают друг с другом, и мы должны принять, что достоинство уравнений [т. е. наблюдений] убывает с ростом этих членов[*]. Если же законы лёгкости, пусть даже [нормальные], отличаются друг от друга [дисперсиями], то у нас нет возможности соответственно взвешивать исходные уравнения.

Де Морган (1845, с. 456) рекомендовал определять веса исходных уравнений апостериорно, и, если они заметно отличались от первоначально принятых, повторить уравнивание заново, и при необходимости повторить этот процесс[15].

Лаплас (см. его метод ситуаций во Втором Дополнении к книге 1812 г.) ясно представлял себе различие случаев, при которых совпадение законов лёгкостей различных наблюдений было действительным или предположительным, но я не нашёл у него явного указания на этот счёт.

Эллис, видимо, имел в виду ту же идею, когда пояснял, что,

Строго говоря, результаты, доставляемые при помощи самой целесообразной, по словам Лапласа, системы множителей, не являются вероятнейшими.

Рассуждение Лапласа (там же) никак не было связано с остаточными свободными членами исходных уравнений. Будь они известны, мы могли бы сравнивать [какие?] результаты[16].

Могут быть указаны и более важные возражения. Но представляется вероятнее, что Эллис имел в виду множители, которые он сам ввёл при обобщении принципа Лапласа на случай несовпадающих законов лёгкости. Но он, видимо, не вполне аккуратно исследовал эту тему: k_i зависят от i-го закона лёгкости, который известен нам только по остаточным свободным членам исходных (?) уравнений. Вопрос стоит так: даны эти члены, определить μ_i и k_i, а не так, что даны k_i, определить μ_i.

Обычно предполагают, что величины k_i совпадают, и результат не является лучшим[17]. Из исследований Лапласа сразу же следует, что закон лёгкости среднего арифметического (быть может, взвешенного) большого числа наблюдений подчиняется [нормальному] закону. Рассматривая любое наблюдение как среднее арифметическое (или как результат линейного сочетания уравнений) большого числа наблюдений), мы обоснованно считаем, что и оно следует [нормальному] закону. То же можно сказать, если каждую действительно происшедшую ошибку считать линейным сочетанием большого числа погрешностей, вызванных различными независимыми источниками.

Последняя точка зрения представляется наиболее естественной и истинной. Любое тщательное наблюдение, которое не может быть намного ошибочным, в конечном итоге подвержено влиянию громадного числа обстоятельств, которые в свою очередь зависят от громадного числа независимых причин (состояние глаз наблюдателя и вообще его физиологическое состояние, состояние атмосферы, различных частей инструмента и пр.). Каждая из них привносит свою долю в фактическую ошибку.

Предположение, высказанное выше, представляется не только верным, оно ведь включает всё, что можно утверждать с вероятностью, стремящейся к достоверности, о природе ошибок. Заметим, что [нормальный] закон имеет место вне зависимости от величины ошибки, если только действительная ошибка $\varepsilon = [\mu\varepsilon]$, причём элементарные ошибки предположительно следуют закону лёгкости $\varphi_i(x)$[18]. [Пояснения нет, но в соответствии с предыдущим текстом (который мы выпустили), эта функция – плотность нормального закона.] Но если $\varepsilon_i\varepsilon_j$ не очень малы, мы не имеем права заменять $\varepsilon = f(\varepsilon_1, \varepsilon_{2, \ldots,} \varepsilon_n)$ на $[\mu\varepsilon]$.

Мы таким образом вывели видимо истинное понятие погрешности с [нормальным] законом лёгкости. Существенная точность, с которой погрешности наблюдений, произведённых в схожих условиях, согласуются с этим законом, действенно подтверждает эту гипотезу[19].

Иногда полагают, что ввиду неопределённости h в [нормальном] законе его можно будет уподобить любому другому закону, однако хорошее приближение, кажется, противоречит такому заключению, и наше рассуждение, видимо, несомненно означает, что [нормальная] функция действительно представляет закон лёгкости в природе. И тогда из него, конечно же, следует правило наименьших квадратов.

Но трудность в определении h остаётся, потому что наблюдатель не может сказать, совпадали ли обстоятельства, при которых он произвёл два наблюдения или нет. В качестве первого приближения безусловно считается, что они совпадали, разве только есть причина полагать противное, и результаты обычно неплохо подтверждают это. В качестве второго приближения следует вывести значения весов или h_1, h_2, …

Отсюда даже не следует, что h должно быть постоянным в серии наблюдений, произведённых в одно и то же время, потому что физическое состояние наблюдателя может изменяться от усталости и пр.

Как я указал выше, Лаплас, видимо, не относился к ошибкам подобным образом, хотя можно было бы легко подумать, что его исследования навели его на эту мысль. Иногда предполагали, что Лаплас этим способом доказывал правило наименьших квадратов.

[7] Вновь обращаюсь к его исследованиям. Вот одно очень важное свойство [нормального] закона: он постоянно воспроизводит себя, поскольку является предельным (?). Если законы лёгкости величин Х и У [нормальны] с параметрами h и k, то закон лёгкости для Х + У будет

$$\exp(-\frac{h^2k^2}{h^2+k^2}x^2).$$

Это – следствие из теоремы Лапласа [которой?]. Предположение о [нормальном] законе отдельного наблюдения приводит к тому же закону для любой линейной комбинации наблюдений, и этот факт часто считали подтверждением правильности указанного предположения[20]. Приведённое выше рассуждение полностью объясняет это примечательное свойство.

Из того, что [нормальное] распределение является предельной формой, следует, что если допустить существование единственного закона, то он должен быть [нормальным]. Действительно, при необходимости линейного сочетания исходных уравнений окончательным результатом окажется этот закон.

Пояснив способ обработки уравнений, Лаплас рассматривает вопрос с другой точки зрения. Пусть ошибка результата будет *u*. Рассмотрим это как потерю, как ущерб [выражение Гаусса], равный

$$\int_0^\infty u\varphi(u)du \div \int_0^\infty \varphi(u)du. \qquad (8)$$

Здесь $\varphi(u)$ – закон лёгкости *u*. Дробь (8) равна удвоенной *средней ошибке, которой следует опасаться* (Лаплас). Поскольку

$$\varphi(u) = A\exp(-\frac{u^2}{4[\mu^2 k^2]}),$$

то она равна

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{[\mu^2 k^2]}$$

и минимальна при наименьшей сумме $[\mu^2 k^2]$. Окончательный вывод оказывается тем же, что и раньше.

Гаусс (1823, §6)[21] перенял эту точку зрения и заметил, что она включает постулат о том, что ущерб, вызванный ошибкой $[\mu\varepsilon]$, пропорционален ей. Но строго говоря ущерб вовсе не допускает [единственной] арифметической оценки, и мы с таким же успехом представим его величиной $[\mu\varepsilon]^2$. Если ущерб является такой функцией $[\mu\varepsilon]$, которая исчезает вместе с этой суммой, различные предположения равно произвольны. Но если ущерб равен $[\mu\varepsilon]^2$, то среднее значение равно

$$[\mu_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^2\varphi_i(\varepsilon)d\varepsilon] + [[\mu_i\mu_j \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon\varepsilon_i\varphi_i(\varepsilon)\varphi_j(\varepsilon_1)d\varepsilon d\varepsilon_1]] = z[\mu^2 k^2].$$

Второй член исчезает, поскольку его положительные и отрицательные части совпадают, и результат оказывается тем же. что у Лапласа.

По поводу этого исследования Эллис замечает:

Ничто не может быть проще или более удовлетворительным. Оно нисколько не трудно в смысле анализа и применимо к любому числу наблюдений.

С этим я никак не могу согласиться. В принципе не видно никакого существенного различия между предположением минимума среднего значения $[\mu\varepsilon]^2$ и принятием метода в целом сразу же путём сведения к минимуму $(a_1x + \ldots - V_1)^2 + (a_2x + \ldots - V_2)^2 + \ldots$ Принять квадрат погрешности как меру её значимости так же произвольно, как принять сумму квадратов ошибок как меру точности наблюдений. В обоих случаях результат окажется весьма близким к истине, но априорно ничего больше сказать нельзя.

Первый метод Лапласа представляется намного предпочтительнее второго, и аналитически это тоже ясно. Действительно, если применить значение для $\varphi(u)$ первого метода, то последует тот же результат, а именно минимум $[\mu^2k^2]$, если только ущерб от ошибки ε изменяется как [измеряется величинами] ε^m или даже как $(A\varepsilon^p + B\varepsilon^q + C\varepsilon^r + \ldots)$ при положительных коэффициентах $A, B, C, \ldots$ Величины $m, p, q, r, \ldots$ могут быть целыми или дробными, но положительными. Этого последнего условия мы должны были ожидать, потому что ущерб не может убывать при возрастании ошибки. [Автор доказывает это аналитически.]

Методы анализа, принятые Лапласом и Гауссом, породили теорему об n-мерных интегралах [мы опускаем её формулировку и вывод].

[8] Мы теперь рассмотрим доказательство Гершеля (1850)[22]. Оно имеет в виду независимые уклонения камня, выпущенного из рук, во взаимно перпендикулярных направлениях x и y. Гершель несколько упростил доказательство, но Эллис (1850a, b) привёл его к аналитическому виду. Оно так хорошо известно, что воспроизводить его не нужно. Также нет нужды подробно указывать на недопустимость предположения о равной вероятности обоих уклонений, поскольку Эллис уже это заметил. Он указал, что для независимости следует показать, что уклонение y происходит с той же сравнительной частотой при различных значениях x. Положение системы координат произвольно, но её начало находится под точкой, в которой камень был выпущен из рук.

Гершель заметил, что при стрельбе по облатке на стене центр тяжести точек попадания выстрелов окажется вероятнейшим положением облатки, но Эллис попытался доказать, что при независимых x и y это неверно: поскольку

$$\frac{h^2}{\pi}\exp[-h^2(x^2+y^2)]dxdy \qquad (9)$$

есть вероятность попадания в площадку $dxdy$, а вероятность того, что полное уклонение будет находиться между r и $r + dr$ будет равна

$$2h^2 \exp(-h^2 r^2) r dr \qquad (10)$$

и *центр тяжести точек попадания не будет вероятнейшим положением облатки*.

Поэтому бесконечно малая площадь α на расстоянии r от облатки окажется попаданием с вероятностью

$$\frac{h^2}{\pi} \exp(-h^2 r^2) \alpha. \qquad (11)$$

Пусть облатка после выстрелов убрана. Требуется по точкам попадания определить её прежнее вероятнейшее положение. Пусть было три выстрела A, B и C, облатка находилась в точке O и OA = r_1, OB = r_2, и OC = r_3. Априорная вероятность попадания в кольцо между r и $r + dr$ будет равна (10), а вероятность происшедшего события равна

$$8h^6 \exp[-h^2 (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) r_1 r_2 r_3 dr_1 dr_2 dr_3 \qquad (12)$$

и апостериорное вероятнейшее положение облатки приведёт к максимуму выражение (12) без сомножителя и без дифференциалов.

Но вероятнейшее решение наверняка таково. Обведите небольшую площадку α около A, B и C. При α → 0 эта площадка становится указанными точками и априорная вероятность попаданий в них будет равна

$$\frac{h^6}{\pi^3} \exp[-h^2 (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \alpha^3.$$

Апостериорная вероятность точке O быть искомой пропорциональна предыдущему выражению без сомножителя и без α^3. Она максимальна при минимуме $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$.

Верное решение наводит на вопросы. **1.** Дано положение облатки, определить вероятность того, что точки попадания A, B и C. **2.** Обратно: если точки попадания A, B и C, каково вероятнейшее положение облатки.

Впрочем, при решении по Эллису вопрос таков: Дано положение облатки, определить вероятность того, что попадание окажется в любой точке на границе замкнутой криволинейной фигуры, образованной кругами около A, B и C. Обратной задачи здесь нет: если даны погрешности, то вероятнейшее положение O не имеет смысла[23].

Закон (10) это закон лёгкости ошибки. Если около O провести круги радиусами *k*, 2*k*, … (*k* бесконечно мало), то вероятность попадания в *r*-е кольцо пропорциональна выражению этого закона. Попадание во внутреннее кольцо минимально ввиду его малой площади. Наибольшее число попаданий окажется в $(1/hk\sqrt{2})$-м кольце. Низкая вероятность попадания в последующие кольца более чем уравнивает их возрастающую площадь.

Итак, точка O (все точки, разумеется, являются равновеликими бесконечно малыми площадками) с высшей вероятностью окажется попаданием, но попадание в соответствующее кольцо (ширина всех колец одна и та же) менее всего вероятно.

[Следует малопонятное описание другого исследования Эллиса в том же источнике.]

[9] Boole (1857, с. 628 и след.) воспроизвёл доказательство Гершеля и добавил замечания по поводу Эллиса: приняв принцип Гершеля, мы получим

$$f(x^2) = A\exp(-h^2x^2) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\exp(-h^2x^2)$$

[ср. (6)] и вероятность попадания на площадку *dxdy* будет равна (9).

Буль продолжает. Этот результат можно подтвердить примечательным образом.

Ясно, что шарик упадёт на расстоянии между x и x + δ*x от оси y с вероятностью, равной предыдущему выражению, проинтегрированному по y в бесконечных пределах. Но эта вероятность уже определена, она равна*

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\exp(-h^2x^2)\delta x \qquad (14)$$

[ср. (6)]. *Поэтому мы должны получить*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h^2}{\pi}\exp[-h^2(x^2+y^2)\delta x]dy = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\exp(-h^2x^2)\delta x,$$

т. е. верное уравнение.

Мы предполагаем, что закон лёгкости вдоль Ox записан в виде

$f(x^2)$ с множителем, при котором соответствующий интеграл равен единице. Поэтому вряд ли можно назвать примечательным подтверждение того, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2)dxf(y^2)dy = f(x^2)dx.$$

Если $a = 1$, равенство $ab = b$ названо подтверждением.

Буль возражает против утверждения Эллиса об ошибочности принципа Гершеля: согласованность результатов никак не служит доказательством ошибочности и сама по себе не даёт основания для подозрения в выводе из недоказанного предложения. Это, конечно, верно, и, как сказано выше, исследование Эллиса [в этой части] представляется излишним. Но при доказательстве вывода из недоказанного он лишь считает очевидным то, что так же должно быть доказано, как и окончательный результат[24].

Но я совершенно согласен с Эллисом в том, что предположение о [нормальном] законе является лишь выражением *нашего полного незнания причин ошибки и характера их действия*. Ничего не зная об ошибке, мы не можем ничего сделать. Впрочем, на самом деле мы что-то знаем: она является соединением многих меньших погрешностей, а этого знания достаточно, чтобы установить [нормальный] закон, который подтверждается наблюдениями.

Весьма примечательно, что такая обобщающая и важная теорема следует из столь скудных предположений. В чисто аналитическом плане поразительно, что кратный интеграл (7) обладает постоянной предельной формой при любых $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

[10] Tait (1865) видимо основывает своё исследование на том принципе, что погрешность, возникающую ввиду любого источника, можно сравнить с уклонением от вероятнейшего результата извлечений с возвратом белых и чёрных шариков из урны после большого числа тиражей. Пусть доли шариков известны и относятся как $p:q$ ($p + q = 1$). После n извлечений и появления α белых и β чёрных шариков окажется, что $\alpha:\beta = p:q$, $\alpha = pn$, $\beta = qn$. Разность $(\alpha - pn)$ мы считаем уклонением от вероятнейшего результата, мерилом ошибки. Тогда $(\alpha - pn) = mx$, где x – ошибка. Можно показать, что при очень большой ошибке[25] её вероятность окажется пропорциональной

$\exp(-\frac{m^2x^2}{2pqn}) = \exp(-\mu x^2)$. Поэтому, приняв аналогию между результатом действия причины погрешности и подобными извлечениями, вероятности ошибки от различных причин будет следовать законам $A\exp(-\mu x^2)$, $A_1\exp(-\mu x^2)$, …, так что фактическая ошибка будет следовать закону $\exp(-h^2x^2)$.

Однако, эта аналогия выглядит очень смутной, и я не вижу основания для объединения двух случаев, которые представляются весьма различными. Замечание Крофтона [vii, Прим. 10] я понимаю так, что он не считает эту аналогию убедительной. Он также указывает, что

Доказательство относится только к сочетанию некоторого числа элементарных ошибок, каждая из которых следует этому закону. Но вполне очевидно, что мы никогда не сможем доказать, что ошибки, происходящие из каждого источника, следуют лишь одному закону.

Ни исследование Тейта, ни его приложение к теории ошибок не являются новыми. Всё это составляло первое положение гл. 3 Лапласа (1812/1886, с. 280)**[26]** и приведено Де Морганом (1845). Однако, хотя в сочинениях этих авторов МНКв был разработан впоследствии, никто из них не ссылался на него как предполагающего или подтверждающего [нормальный] закон. Это, видимо, прямо указывает, что по их мнению МНКв не годится для подобной цели. И по существу тоже рассуждение, что и у Тейта, с целью определения закона лёгкости содержится у Liagre (1852, с. 61, 67 и др.) в его замечаниях о *Письмах* Кетле (1846), и у F. Faà de Bruno (1867/1869, с. 42).

В предварительных замечаниях к своей статье Тейт привёл несколько утверждений, которые могут произвести неверное впечатление о сути методов Лапласа. Так, после описания его исследований Тейт указывает, что он принимает, что

Эти отдельные мемуары с той же вероятностью могли относиться к любой величине.

Но Лаплас не вводил такого предположения. Он считал, что каждый мемуар следовал закону лёгкости $\varphi(x)$ и все его выводы были основаны на этом. Частный случай $\varphi(x)$ = Const он доказал только до своей общей теоремы, и, как я полагаю, он хотел вначале показать на простом примере суть своего анализа**[27]**. Впрочем, Тейт признаёт достаточность этой теоремы.

Можно заметить, что форма $\exp(-h^2x^2)$ возникла в обоих случаях (?) при аппроксимации функций больших чисел**[28]** ввиду предположения $y = Y\exp(-t^2)$, которое содержит в частном случае теорему Стирлинга.

[11] Обратимся, наконец, к Донкину (Donkin 1857). Он замечает, что при двух наблюдениях $x = a$ и $x = b$ и отсутствии причин для предпочтения одного из них вероятнейшее значение x равно $(a + b)/2$. Это рассуждение, продолжает Донкин, без дополнительного предположения нельзя обобщить на три наблюдения. Пусть

$P(x <$ истинного $x < x + dx) = \varphi(x - a)dx$, тогда

$P = C\varphi(x - a)\varphi(x - b)dx$.

С другой стороны, учитывая случай двух наблюдений, естественно и очевидно предположить (*но я не отрицаю, что это действительно предположение*), *что P должно быть выражено в форме*

$\psi[x - (a + b)/2]dx = C\varphi(x - a)\varphi(x - b)dx.$

Решением этого функционального уравнения является

$\psi(x) = A\exp(- ax + bx^2)$.

Донкин, впрочем, указывает, что его предположение нельзя ни строго обосновать, ни даже достаточно убедительно пояснить.

Предположения, подобные приведённым Донкиным или Гершелем в качестве основы для вывода закона лёгкости, представляются негодными, но они указывают свойства этого закона и его наибольшую естественность. Донкин (1844), не вводя закона лёгкости, разработал обычные методы сочетания взвешенных наблюдений по аналогии мысли и механики (равновесие доверия и равновесие вещества), а одно его замечание (1857, с. 160) не должно быть упущено:

Наибольшее, на что любой подобный процесс осмеливается, это то, что <u>при неизвестном законе лёгкости ошибки</u> вероятнейший результат следует получить так, будто мы знаем, что он выражен экспоненциальной функцией. Но мы не можем считать, что так оно и есть на самом деле.

Я не вижу никакого [практического] отличия между указанными случаями.

На этом я заканчиваю с рядом доказательств, принципиальную сторону которых мы хотели исследовать и сравнить. Но я должен упомянуть два иных исследования: Bessel (1838)[29] и Crofton [vii]. Анализ Крофтона резко отличен от исследований Лапласа и Пуассона. Его предварительные замечания о сути ошибок выглядят вполне верными и ценными. Я не видел Hagen (1837, 1867, 1882)[30].

[12] В конце концов мне представляется, что единственным прочным философским основанием [нормального] закона лёгкости есть предположение о том, что фактическая погрешность является накоплением малых ошибок, вызванных различными независимыми источниками и следующих произвольным и различным законам лёгкости $\varphi_i(x)$. А поскольку я полагаю, что погрешность именно этим и вызвана, то [нормальный] закон для отдельной ошибки, как я считаю, установил Лаплас*. Но следует отметить два обстоятельства. **1.** Этот закон является предельным и действительно верен, только если число источников бесконечно. **2.** Он предполагает [чётность] функций $\varphi_i(x)$. Если это условие не соблюдается (такую возможность мы не можем исключить), закон лёгкости окажется равным $\exp[-h^2(x+a)^2]$. Впрочем, это обстоятельство не существенно, ибо

$$a = \mu \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$$

и окажется очень малым[31], а МНКв последует немедленно.

Если необходимо линейно сочетать наши [исходные] уравнения, исследование Лапласа укажет две причины появления МНКв при большом числе наблюдений. Надлежащий философский способ обработки наблюдений заключается в их последовательном уравнивании по МНКв с определением новых весов наблюдений. По этой причине с научной точки зрения критерий Peirce (1852) видимо неточен*.

Если некоторое наблюдение сделано так же тщательно, как остальные, то ни в коем случае оно не может быть полностью исключено. Быть может во многих случаях именно это окажется лучше, чем его сохранение с тем же весом, что и у лучших наблюдений (несомненно, что так оно и есть), но истинный метод состоит именно в этом, как указывает сам метод [повторных уравниваний?], при котором необычному наблюдению назначают очень малый вес. Представляется вполне очевидным, что ни при каких обстоятельствах у нас нет права отбросить наблюдение, хоть это, возможно, и лучше, чем придавать отклоняющемуся наблюдению такой же вес, как наилучшим. Тот факт, что подобный критерий был предложен, является сильным доводом в пользу дополнения МНКв в указанном выше порядке. На внимании к этой необходимости впервые настоял лишь Де Морган.

В раннем мемуаре Лаплас (1774) предложил закон лёгкости в виде e^{-mx}. Рассуждение[32], которым он обосновал это предположение, было банальным, но вот закон исключительно естественным. Как я полагаю, его захотел бы принять каждый без всякого анализа, поскольку он простейшим образом соответствует требованиям быстрого убывания с возрастанием x, а ось Ох является его асимптотой[33]. Поэтому стОит кратко исследовать одно или два следствия.

Чтобы закон не изменялся при замене x на $-x$, удобно записать его в виде $e^{-m|x|}$. Некоторые авторы полагали, что для достижения [чётности] закона $\varphi(x)$ следует записать его в виде $\psi(x^2)$, но, очевидно, не считали, что этому требованию удовлетворяет $|x|$.

Пусть сделано два наблюдения, a и b. Вероятность того, что x – истинное значение измеряемой величины пропорциональна $\exp[-m(|(x-a)| + |(x-b)|]$. Вероятнейшее значение x соответствует минимуму этого выражения или минимуму $|(x-a)| + |(x-b)|$. Каждое значение x между a и b равновероятно и может быть принято в качестве вероятнейшего значения x. Для трёх наблюдений вероятнейшим значением будет $x = b$, если $a < b < c$.

Эти результаты верны в общем случае, и если число наблюдений нечётное, то вероятнейшим значением будет [медиана] среднее наблюдение, а при чётном числе наблюдений – любое значение x между двумя средними.

Лаплас ограничился случаем трёх наблюдений[34].

Теория ошибок вовсе не началась с Гаусса. До его мемуаров были опубликованы работы Симпсона, Лагранжа и Даниила Бернулли [а также Ламберта и Эйлера], см. Тодхантер (1865, с. 211, 236, 237, 397 – 399) [и Шейнин (2013; 2017)].

Приписка

При обсуждении принципа среднего арифметического я случайно упустил мемуар Буля (1857), – тот самый, который я упоминал в другом месте. Результат Буля: если имеется n наблюдений $p_1, p_2, \quad, p_n$ некоторой величины, её вероятнейшее значение будет линейной функцией этих наблюдений. Буль доказывает это положение при помощи своего исчисления логики. Но его исследование столь необычно, что, затратив какое-то время для его изучения, я вряд ли способен выразить определённое мнение о его достоинствах. Впрочем, достаточно сказать, что коэффициенты при p_i в окончательном результате включают два ряда констант, a_i и c_i априорных и апостериорных вероятностей. И, если $a_i = \text{const}$ и $c_i = \text{const}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, вероятнейшим значением искомой величины оказывается среднее арифметическое наблюдений.

Примечания

1. Фактически в 1809 г. (Hogan 1977). Многие авторы упоминали *метод* вместо надлежащего *принципа* наименьших квадратов.

2. Излюбленное выражение многих авторов.

3. В дальнейшем мы отойдём от обозначения автора и будем применять символ абсолютной величины.

4. Нет слов!

5. Никакого предположения о сути ошибок не было сделано. Те, кто заявляли, что среднее арифметическое есть вероятнейшее значение и принимали это положение как основу обработки наблюдений, исходили из предположения о том, что об ошибках нам только известно, что их положительные и отрицательные значения равновероятны, и только это ограничение принято в [нашем] тексте.

Далее, представляется, что рассмотрение характера несомненного появления ошибки приводит к закону Гаусса, однако это не обосновывает приведённого выше *предположения* о том, что среднее арифметическое является вероятнейшим результатом, хотя чётко указывает (?), что это не может быть очевидным независимо от характера ошибок. Дж. Г.

О других законах лёгкости: достаточно вспомнить Бесселя, которого автор лишь упоминает в конце статьи. См. Прим. 29. О. Ш.

6. Автор способен замутить простую идею.

7. Это рассуждение представляется искусственным. Если выбирать симметричную функцию, то почему бы сразу не остановиться на среднем арифметическом? Но заметим, что Гаусс (Шейнин 2013, с. 157) благожелательно отозвался о попытке Энке. Несколько авторов повторили подобные попытки, итог которых подвёл Zoch (1935).

8. Мы (2007) отыскали математическое определение истинного значения у Фурье. И теперь неоднократное упоминание этого понятия без понимания указанного определения производит скверное впечатление.

9. Вряд ли можно сказать, что при $n \to \infty$ $\Sigma\varepsilon = 0$, но очевидно, что эта сумма бесконечно мала по сравнению с n, так что $(1/n)\Sigma\varepsilon = 0$. Этого достаточно для того, чтобы

$$a = (1/n)\Sigma x + (1/n)\Sigma\varepsilon = (1/n)\Sigma x$$

и чтобы суммой $\Sigma\varepsilon$ можно пренебрегать при $n \to \infty$ сравнительно с членами, которые включают a в сумме $\Sigma f(x - a)$. Дж. Г.

При $n \to \infty$ дисперсия среднего арифметического стремится к нулю (определение состоятельной оценки). *Отсюда, однако, ничего не следует, потому что и другие линейные средние обладают тем же свойством* (Марков 1899/1951, с. 250). О. Ш.

10. В лучшем случае это непонятно.

11. Такова была цель и у Буняковского (1846).

12. Крайне неудачная фраза.

13. Квадратные скобки: обозначение Гаусса; так, $[\mu k]$ это сумма произведений $\mu_i k_i$, а

$$k_i^2 = \int_0^\infty x^2 \varphi_i(x) dx.$$

14. Теория ошибок рассматривает только линейные или линеаризированные уравнения.

15. Эта рекомендация (которую автор повторяет ниже) более чем сомнительна. В принципе камеральная обработка наблюдений не повышает их достоинства, но апостериорные веса только вносят поправку за нарушение симметрии наблюдений (Шейнин 2013, с. 96).

16. Эллис более подробно описывает это рассуждение. Дж. Г.

17. Вряд ли Эллис подробно сообщил о недостатках, которые он сам исправил. Дж. Г.

18. Выше предполагалось, что определялась только одна величина, но замечания имеют общий характер. Дж. Г.

19. Несомненно, что именно по этой причине числа в столь многих статистических таблицах следуют этому закону, а уклонения от среднего были вызваны сочетанием действительно громадного числа причин. Дж. Г.

Хоть бы что-нибудь было понятно. О. Ш.

20. Напрасно автор не назвал никого. Описанное свойство нормального закона теперь называется устойчивостью.

21. При кратком описании второго обоснования МНКв (Гаусс 1823) я близко следовал Эллису, чьё рассуждение лишь слегка отличалось от гауссова. Дж. Г.

22. Это доказательство описали в своих сочинениях Boole (1857; 1860); Faà de Bruno (1867, с. 43); Thomson &Tait (1873, с. 373 след.), а Schlömilch (1872) назвал рассуждение Гершеля *простым и наглядным.* Дж. Г.

Максвелл (1860) установил свой знаменитый закон распределения скоростей одноатомных молекул при помощи такого же рассуждения, как у Гершеля (и Эдрейна) и также молчаливо предполагал, что составляющие скоростей независимы. Условие независимости ослабили Кас (1939) и Линник (1952).

23. Я только сейчас заметил статью Эллиса (1850b). Он сам обнаружил ошибку в своём решении и то, что центр тяжести точек попадания был вероятнейшим положением облатки. Но доказательства он не представил, а тема интересна сама по себе, и я не изменил своего текста. Вот его слова:

Я не только не заметил, что вывод Гершеля не следует из его же гипотезы, но ввёл свою собственную ошибку.

Это представляется мне несправедливым. У Гершеля центр тяжести был вероятнейшим положением облатки и его доказательство было верным (за исключением предположения о независимости уклонений в двух взаимно перпендикулярных направлениях). Впрочем, возникала путаница между законами $\exp(-h^2r^2)$ и $r\exp(-h^2r^2)$, а количества попаданий в кольца неверны, что становится очевидным при обращении к таблице Энке значений интеграла в заданных пределах от экспоненциальной функции отрицательного квадрата.

Но это единственная ошибка Гершеля. Он, однако, явно не знал про исследования Лапласа. Так, он дважды упомянул, что Кетле (1846, с. 380 – 386) освободил это исследование *от всех излишних трудностей и привёл его в простейшую и элементарную форму*. Проблему Кетле (?) можно найти у Лапласа, но с теорией ошибок она там не связана. Впоследствии ту же проблему изучал Тейт, см. ниже. Дж. Г.

Кетле был крайне легкомысленным автором и ничего подобного не смог бы осилить (Knapp 1872, с. 124; Шейнин 2013, § 10.5). О. Ш.

24. Поразительно! Глейшер описывает тот же отрицаемый им порочный круг другими словами.

25. Почему при очень большой ошибке?

26. В начале гл. 3 в издании 1886 г. мы не нашли ничего похожего, но Глейшер ссылался на предыдущее издание книги Лапласа.

27. Вот мнение Бьенеме 1853 г. (Шейнин 2013, с. 119):

Лаплас […] *сразу же осознал всю важность* […] центральной предельной теоремы […]. *В течение почти сорока лет он представлял мемуары о вероятностях, но* […] *не хотел объединять их в общую теорию*.

Но именно эта теорема, продолжал Бьенеме, позволила ему создать свою книгу (1812).

28. Лаплас (1812/1886, гл. 6 и в нескольких ранних мемуарах) ввёл эти функции при исследовании мужских и женских рождений. Смысл приведённой автором формулы ясен, но всё же её следовало пояснить.

29. Непонятно, почему Глейшер ни слова не сказал о Бесселе (1838). Он доказывал центральную предельную теорему и исследовал длинные ряды астрономических наблюдений. Бессель должен был заметить (притом ещё в 1818 г.), что наблюдения несколько отличались от нормальности, но заявил, что она проявилась бы при большем (чем несколько сот!) числе наблюдений. Почти несомненно, что он хотел спасти свою теорему. Бессель кроме того привёл примеры ошибок, которые никак не подчинялись нормальному закону. См. Шейнин (2017, § 9С).

30. В книге Хагена нет ничего интересного. Он рассматривал элементарные ошибки (которые до него ввёл Даниил Бернулли), но принял для них весьма стеснительные условия. Хаген резко возражал против исключения уклоняющихся наблюдений. О. Ш.

Faà de Bruno (1867) привёл далеко не полный список сочинений по МНКв. Дж. Г.

См. Merriman (1877). О. Ш.

31. Указанную формулу вывел Пуассон. Дж. Г.

На самом деле Гаусс (1823, § 5). Систематическая ошибка может быть значительной. О. Ш.

32. Тодхантер (1865, с. 469) назвал приведённые соображения *весьма поверхностными*. Дж. Г.

33. Кривая $y = e^{-mx}$ пересекает ось Оу под углом, тангенс которого равен $-1/m$ [$y' = -me^{-mx}$, $y'(0) = -m$, но не $-1/m$] и потому убывает под острым углом [а под каким другим углом она может убывать?]. Но [нормальная] кривая пересекает ось Оу под прямым углом, тогда как высшая точка кривой $\exp(-m\sqrt{x})$ является точкой возврата. Это указывает на то, что истинная кривая лёгкости, [нормальная кривая], лучше согласуется с ожидаемым. Действительно, естественно предвидеть, что всякое значение, немного отличающееся от наблюдённого, почти с той же вероятностью является истинным, как и само наблюдённое значение. Ограничиваясь целыми степенями x, [нормальная] кривая, которая содержит x в низшей степени в показателе степени, удовлетворяет этом условию. Дж. Г.

Слишком всё сложно, притом автор не наложил никаких ограничений на параметр m. О. Ш.

34. Автор недостаточно пояснил решение Лапласа. Мы (1971, с. 2 – 7) подробно описали мемуар 1772 г.

Библиография

Буняковский В. Я. (1846), *Основания математической теории вероятностей*. СПБ.

Гнеденко Б. В., Шейнин О. Б. (1978), Теория вероятностей. Глава в книге *Математика XIX века*. М., с. 184 – 240. Редакторы А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич.

Линник Ю. В. (1952), Замечания по поводу классического вывода закона Максвелла. *Докл. АН СССР*, т. 85, с. 1251 – 1254.

Марков А. А. (1899), Закон больших чисел и способ наименьших квадратов. В книге автора *Избр. тр.* Без места, 1951, с. 231 – 251.

Шейнин О.Б., Sheynin O. (1965), О работе Эдрейна в теории ошибок. *Историко-математические исследования*, вып. 16, с. 325 – 336.

--- (2007), The true value of a measured constant and the theory of errors. *Hist. Sientiarum*, vol. 17, pp. 38 – 48.

Abbe C. (1871), Historical note on the method of least squares. В книге Stigler (1980, vol. 1).

Adrain R. (1808, фактически 1809), Research concerning the probabilities of the errors etc. В книге Stigler (1980, vol. 1).

--- (1818a), Investigation of the figure of the Earth and of the gravity in different latitudes. Там же.

--- (1818b), Research concerning the mean diameter of the Earth. Там же.

Bessel F. W., Бессель Ф. В. (1838, нем.), Исследование о вероятности ошибок наблюдений. *Избр. геод. соч.* М., 1961, с. 226 – 258.

Boole G. (1857), On the application of the theory of probabilities to the question of the combination of testimonies or judgements. *Edinb. Phil. Trans.*, vol. 21, pp. 597 – 652.

--- (1860), *Treatise on the Calculus of Finite Differences*. Cambridge – London. Bibliobazaar, 2009.

Chauvenet W. (1863), *Manual of Spherical and Practical Astronomy*, vols 1 – 2. Philadelphia.

Coolidge J. L. (1926), Adrain and the beginnings of American mathematics. *Amer. Math. Monthly*, vol. 33, No. 2, pp. 61 – 76. **S, G,** 43.

De Morgan A. (1845), Theory of probabilities. В книге *Enc. Metropolitana*, Pure science, vol. 2. London, pp. 393 – 490.

--- (1864), On the theory of errors of observations. *Trans. Cambr. Phil. Soc*., vol. 10, pp. 409 – 427.

Donkin W. F. (1844, англ.), Заглавие в переводе с франц.: Essay on the theory of the combination of observations. *J. math. pures appl.*, t. 15, pp. 297 – 322.

--- (1857), On an analogy relating to the theory of probabilities. *Q. J. Math.*, vol. 1, pp. 152 – 162.

Dutka J. (1990), Adrain and the method of least squares. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 49, pp. 355 – 370.

Ellis R. L. (1849a), On the foundations of the theory of probabilities. *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, vol. 8, pp. 1 – 6. **S, G,** 19

--- (1849b), On the method of least squares. Там же, pp. 204 – 219.

--- (1850a), Remarks on the alleged proof of the “method of least squares”. *Lond., Edinb. and Dublin Phil. Mag.*, vol. 37, pp. 321 – 328, 462.

--- (1850b), Замечание к (1850a). Там же, с. 462.

Все статьи Эллиса перепечатаны:

--- (1863), *Mathematical and Other Writings*. Cambridge – London.

Encke J. F. (1834 – 1836), Über die Methode der kleinsten Quadrate. *Berliner Astron. Jb.*, 1834, pp. 249 – 312; 1835, pp. 253 – 320; 1836, pp. 253 – 308.

Перепечатки в сочинениях автора *Astron. Abh*., Bd. 1. Berlin, 1866; *Ges. Math. Abh*., Bd. 2. Berlin, 1888.

Faà de Bruno F. (1867, итал.), *Traité élémentaire du calcul des erreurs* etc. Paris, 1869.

Gauss C. F., Гаусс К. Ф. (1809, латин.), *Теория движения небесных тел*, кн. 2, раздел 3. В книге Гаусс (1957, с. 89 – 109).

--- (1823, латин.), Теория комбинаций наблюдений и т. д., части 1 – 2. Там же, с. 17 – 57.

--- (1957), *Избранные геодезические сочинения*. М.

Glaisher J. W. L. (1872), Remarks on certain portions of Laplace's proof of the method of least squares. *Lond., Edinb. and Dublin Phil. Mag*., vol. 43, pp. 194 – 201.

Hagen G. (1837, 1867, 1882), *Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin.

Herschel J. F. W. (1850), Quetelet on probabilities. *Edinb. Rev.*, vol. 92, pp. 1 – 57. Опубликовано анонимно.

Hogan E. R. (1977), R. Adrain: American mathematician. *Hist. Mathematica*, vol. 4, pp. 157 – 172.

Kac M. (1939), On a characterization of the normal distribution. В книге автора *Probability, Number Theory and Statistical Physics*. Cambridge (Mass.), pp. 77 – 79.

Knapp G. F. (1872), Quetelet als Statistiker. *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*, Bd. 18, pp. 89 – 124.

Lambert J. H. (1760, латин.), *Photometria*. Augsburg. Неполный немецкий перевод: *Ostwald Klassiker*, NNo. 31 – 33, 1892.

Laplace P. S. (1774), Sur la probabilité des causes par les événements. *Oeuvr. Compl*., t. 8. Paris, 1891, pp. 27 – 65.

--- (1812), *Théorie analytique des probabilités*. *Oeuvr. Compl.*, t. 7, NNo 1 – 2. Paris, 1886. Частично **S, G,** 15.

Legendre A. M. (1805, 1806), *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Paris. **S, G,** 15.

Liagre J. B. J. (1852), *Calcul des probabilités et théorie des erreurs*. Bruxelles – Paris.

Maxwell J. C., Максвелл Дж. К. (1860, англ.), Пояснения к динамической теории газов. В книге *Основатели кинетической теории материи*. М. – Л., 1937, с. 187 – 220.

Merriman M. (1877), List of writings relating to the method of least squares with historical and critical notes. В книге Stigler (1980, vol. 2). **S, G,** 71.

Peirce B. (1852), Criterion for the rejection of doubtful observations. В книге Stigler (1980, vol. 2).

Poisson S.-D. (1824), Sur la probabilité de résultats moyens des observations. Connaissance des temps за 1827, pp. 273 – 302. **S, G,** 15. Первая часть мемуара.

Puissant L. (1805), *Traité de géodésie*, t. 2. Paris, 1819, 1842.

Quetelet A. (1846), *Lettres sur la théorie des probabilités*. Bruxelles.

Schlömilch O. (1872), Über die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehler. *Z. f. Math. u. Phys.*, Bd. 17, pp. 87 – 88.

Stigler S. M., редактор (1980), *American Contribution to Mathematical Statistics in the 19th Century*, vols 1 – 2. New York. Сквозная пагинация отсутствует.

Tait P. G. (1865), On the law of frequency of error. *Trans. Roy. Soc. Edinb*., vol. 24, pp. 139 – 145.

Thomson W., Tait P. G. (1873), *Treatise on Natural Philosophy*. New York, 2002. Cambridge, 2009.

Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

Zoch R. T. (1935), On the postulate of the arithmetic mean. *Annals Math. Stat.*, vol. 6, No. 4, pp. 171 – 182.

VII

Морган У. Крофтон

О доказательстве закона ошибок наблюдений

Morgan W. Crofton, On the proof of the law of errors of observations. *Phil. Trans. Roy. Soc*. за 1870, vol. 160, pt. 1, 1870, pp. 175 – 187

1. Так много было опубликовано о теории ошибок, что новый автор, который не заявляет, что получил неизвестные ранее результаты, видимо, должен как-то извиниться. И всё же хорошо известно, что трудности этой теории очень велики и при верной оценке её принципов, и при следовании тонкому математическому анализу, который необходим для рассуждений о них. Поэтому любая работа, которая стремится упростить её процессы[1] без ослабления её логических принципов, будет вероятно признана в некоторой степени полезной.

Моей целью является математическое доказательство в самой общей форме закона отдельных ошибок наблюдения при условии, что погрешности практически возникают ввиду совместного действия большого числа их независимых источников, каждый из которых сам по себе вызовет исключительно малые ошибки по сравнению с теми, которые происходят от всех остальных источников совместно.

Такое доказательство содержится в обобщении исследования Лапласа о законе средних результатов большого числа наблюдений у Пуассона (1837), и воспроизведено в ценной книге Тодхантера (1865)[2]. Ясно, что мы должны ограничить общность доказательства и рассматривать только несколько искусственных и обычных случаев, если принять, что каждый источник с равной лёгкостью приводит к положительной и отрицательной ошибке, или предположить, что закон ошибок (даже если он неизвестен) один и тот же для всех источников.

По этой причине все процессы, содержащиеся в гл. 4 *Анал. теории вероятностей* Лапласа, недостаточно общи для нашей цели, хоть некоторые авторы так и применяли их. То же относится к Ellis (1844), метод которого основан на теореме Фурье, ввиду принятой им равной вероятности положительных и отрицательных ошибок[3]. Наше доказательство, полагаю, будет признано значительно более простым, чем пуассоново, потому что мы отказались от его утончённого и трудного анализа[4], и в то же время вполне общим. Единственное исключение – случаи, несовместимые с экспоненциальным законом[5].

2. Примечательно, что хорошо известная экспоненциальная функция, которые современные математики считают выражением закона частоты отдельной ошибки наблюдения, не была чётко указана ни одним из трёх великих философов, Лапласом, Гауссом, или Пуассоном (которых можно считать основателями теории ошибок[6]) в качестве выражения этого закона. Эллис заметил, что ошибочно предполагали, что доказательство метода [принципа] наименьших квадратов у Гаусса и Лапласа зависело от этого предположения. Верно, что первый метод Гаусса в *Теории движения* требовал этого, но он, видимо, представлял себе этот метод лишь как пробный и условный. Позднее, в *Теории комбинаций* [в начале § 13] он говорит о законе отдельных ошибок: функция [плотность]: *обычно остаётся неизвестной*[7].

Впрочем, поскольку этот закон ошибок ныне, видимо, принят по всеобщему согласию[8], исследование оснований, на которых покоится это убеждение, окажется здесь уместным. Вряд ли можно утверждать, что каждая прежняя попытка установить этот закон независимо от сформулированной мной гипотезы (§ 1), была успешной. Мы можем пренебречь доказательством Гаусса в *Теории движения*, которое показывает, что этот закон должен иметь место, если *принять за аксиому*, что арифметическое среднее из нескольких наблюдений является вероятнейшим результатом. И на самом деле это не аксиома, а лишь удобное правило, которое, в общем, близко к истине. Мы убеждаемся в этом, рассматривая любой случай, при котором мы уверены, что погрешность не следует экспоненциальному закону. Видит ли априорно наш разум, что это правило не приводит здесь к вероятнейшему результату?

Представляется достоверным, что мы должны были быть так же уверены в нём, как и в любом случае, но доказательство Гаусса показывает, что вероятнейший результат здесь не достигается, см. Эллис (там же, с. 207). И действительно, следует заключить, что сам Гаусс (как и следовало ожидать от такого проницательного и тщательного ума) очень далёк от того, чтобы утверждать, что указанное предположение является аксиомой. Доказательство он поэтому приводит лишь как условное. Он только замечает [§ 177], что правило всеобще признано (*общепринятый принцип, превосходство которого всеми признано*).

Примечательно простой метод привёл Дж. Гершель (1850)[9], который пришёл к тому же самому закону ошибок при помощи одного или двух смелых предположений. Совпадение поразительно, но его вряд ли можно всерьёз считать *доказательством*, притом, что заслуженный автор и не представил его таким образом. Тем не менее, методы Гаусса и

Гершеля весьма интересны для естественника, поскольку показывают, что некоторые априорные и очень простые математические допущения приводят к тому же закону ошибок, который указывается изучением окружающих нас фактов и притом по крайней мере приближённо выражает то, что обычно происходит в природе.

Мы не считаем необходимым, чтобы факты были именно такими, потому что очень легко *представить себе* иную структуру природы, при которой никакое подобное согласование не могло бы иметь места[10]. Априорно можно представить себе, что закон отдельных ошибок наблюдений может быть любым и притом изменяющимся от одного вида наблюдений к другому. Насколько верно, что практически один общий закон преобладает, по существу является экспериментальной проблемой, т. е. исследованием не того, что *могло быть*, а того, что действительно *имеет место*.

Названная выше гипотеза о том, что погрешности в природе вызваны совмещением большого числа меньших ошибок, возникающих от некоторого числа независимых источников, при математическом анализе приводит к всеобще принятому закону. Поскольку, стало быть, эта гипотеза соответствует фактам, постольку закон ошибок практически верен. Но вопрос о степени согласия этой гипотезы с фактами является исключительно тонкой философской проблемой. Она охватывает не только обширную область законов материальной вселенной, но и органы чувств и способности человека, эту существенный элемент появления ошибок.

Не претендуя на доказательство истинности этой гипотезы, я приведу несколько соображений о фактах, особенно в астрономии (которая главным образом является наукой наблюдения, и в которой поэтому уроки опыта яснее всего и наиболее полны) для убеждения в том, что по крайней мере наша гипотеза *разумна* для некоторых обширных классов ошибок наблюдений.

Уделив внимание истории астрономических наблюдений, мы обнаружим, что крупные ошибки ранних наблюдений в основном происходили от трёх или четырёх основных источников, например [здесь, да и в других местах следует во многом ошибочное дилетантское описание.] На самом деле представляется, что при грубых и топорных наблюдениях ошибки происходят от *весьма немногих* основных причин.

В этом случае, стало быть, наша гипотеза вероятно лишь несовершенным образом отражает факты. Частота ошибок будет лишь грубо и неясно подчиняться тому закону, который следует из неё. Но когда астрономы не удовлетворились достигнутой точностью и исследовали оставшиеся источники ошибок, они обнаружили, что существуют не три или четыре, а *большое число* малых, почти равнозначных источников ошибок. Эти источники были до тех пор скрыты и затемнены более значительными ошибками. Будто в лесу вырублено небольшое число деревьев, и остались для очистки неизмеримые заросли кустарника и подлесок. […]

Существует тысяча мелких нарушающих влияний, с которыми знакомы нынешние астрономы. Многие из них учитываются или исключаются хотя бы приближённо, но мы всё же обоснованно считаем, что остаточная погрешность является результатом большого числа мелких ошибок, каждая из которых сама по себе незначительна.

Таков краткий взгляд на природу астрономических ошибок и на выводы, которые следуют для различных схожих классов наблюдений. Но мы можем по крайней мере безопасно заключить, что наша гипотеза является не произвольным предположением, а разумным и вероятным отчётом о фактах при тщательных и утончённых наблюдениях.

Для нашей цели недостаточно показать, будь это возможно, что каждая ошибка составлена из большого числа меньших погрешностей. Мы должны также установить, что они независимы, по меньшей мере в основном. [Следует невежественный пример.] Не независимые ошибки следует математически объединять совсем иначе, чем независимые.

3. При математическом исследовании этой гипотезы мы будем считать, что каждая небольшая ошибка следует своему собственному неизвестному закону, выраженному неизвестной функцией наивысшей общности. Мы не будем считать положительные и отрицательные значения каждой ошибки равно возможными. Так, очевидно, и следует поступать по отношению к небольшим искажающим влияниям, которые всегда приводят к слишком крупным, либо слишком мелким погрешностям. Я исключаю всякое упоминание *вероятности* и рассматриваю только *частоту* или плотность ошибок.

Пусть величина, определяемая наблюдениями, подвержена влиянию ошибки (простой или составной), и представлена прямой BA. При большом числе наблюдений обозначим их результаты через BA_1, BA_2, … а отрезки AA_1, AA_2, … будут погрешностями. В общем, в окрестности A прямая будет усеяна множеством точек A_1, A_2, … Точки A_i начнутся в некоторой точке C и закончатся в некоторой точке D, которая в общем случае, но не всегда, расположится на противоположной стороне от A. Между C и D точки расположатся с переменной плотностью, и эта плотность в точке A_i представит *частоту или плотность* погрешности AA_i.

Восставим перпендикуляр A_iP, представляющий плотность в A_i и начертим кривую C_1D_1 через подобные точки P. Её уравнение

$$y = \varphi(x) \qquad (1)$$

с началом координат в точке A мы можем назвать *кривой* или *функцией* Ошибки[11]. Обычно эта кривая, разумеется, разрывна, потому что она отражает только значения x между C и D. Строго говоря, она должна исчезнуть за пределами этих точек, но мы не рассматриваем аналитических методов выражения подобных функций. Пусть число наблюдений равно N, AD = a, AC = b, а ydx обозначит число ошибок, находящихся между x и $x + dx$,

$$N = \int_{-b}^{a} \varphi(x)dx.$$

Если C константа, то

$$y = C\varphi(x)$$

будет той же функцией Ошибки, что и (1), только число наблюдений изменится.

4. Чтобы не слишком ограничивать общность исследования, следует дополнительно изучить суть возможных способов рассеивания точек наблюдения вдоль CD при различных неизвестных *простых* причинах ошибок, и в каждом таком способе заметить, что произойдёт с функцией $\varphi(x)$ и кривой C_1D_1.

Во многих случаях точки расположатся *непрерывно*, а кривая C_1D_1 вовсе не обязательно опустится на своих концах ниже, чем в середине. Иначе сказать, крайние значения простой ошибки не всегда менее вероятны, чем промежуточные. Могут быть случаи, при которых крайние значения оказываются вероятнейшими. Пример: Ошибка, происходящая от предположения неподвижности точки, которая на самом деле очень медленно и слабо колеблется около своего среднего значения[12].

Но кроме непрерывных распределений существуют и другие, не только воображаемые, но непременно происходящие, при которых функция или кривая не содействует нашим понятиям, и лучше рассматривать сами точки. Может существовать и *постоянная* Ошибка. Тогда распределение окажется просто множеством N совпадающих точек где-то в пределах CD[13]. Или же некоторая причина приводит лишь к двум или более определённым значениям ошибки, и распределение окажется двумя или более множествами с равным или неравным числом совпадающих точек.

Возможен и важный случай, при котором причины действуют *не всегда*, и если произведено N наблюдений, то некоторое их число n не испытает влияния этих причин. Мы будем иметь n совпадающих точек A[14] и $(N - n)$ точек, как-то распределённых на CD. Таковы грубые ошибки и многие иные.

[Здесь мы вынуждены закончить наш перевод ввиду большого числа формул, которые пришлось бы с великим трудом перепечатывать.]

Примечания

1. См. [vi, Прим. 2]. О. Ш.

2. Хорошо известно, что центральную предельную теорему впервые строго доказали Марков и Ляпунов (даже не Чебышев). О. Ш.

3. Гаусс также принял это ограничение. О. Ш.

4. Может показаться, что длина нашего сообщения противоречит этому утверждению, но я думаю, что изучение нашего текста покажет, что указанная длина произошла от более подробных, чем обычно пояснений. Я убеждён, что столь распространённые сомнения и недоразумения в значительной степени были вызваны исключительной краткостью и скудными пояснениями великих авторов [Лапласа]. М. У. К.

5. В дальнейшем автор рассматривает этот случай, но он остаётся плохо понятным. О. Ш.

6. Лапласов вариант теории ошибок был малопригоден, а у Пуассона вообще не было *своей* теории ошибок. О. Ш.

7. Неизвестной, но Гаусс как раз и определял её. О. Ш.

8. Сомнения в реализации нормального распределения выражались неоднократно. Для длинных рядов астрономических наблюдений Ньюком (1886) предложил смесь нормальных распределений. Отклонение от нормального распределения несомненно заметил Бессель (1818, 1838), но промолчал. Во втором случае он весьма вероятно спасал свою предельную теорему, заявив, что нормальность наступит при большем (чем несколько сотен!) числе наблюдений.

9. См. критическую статью Ellis (1850) и Thomson & Tait (1867 [с. 314]), которые были более благосклонны. Весьма полезны *Письма* Кетле (1846). Он указывает, что не только ошибки наблюдения, но и во многих других случаях (рост человека, температура воздуха и др.) уклонения от средних видимо следуют тому же закону. Если это так, наверное можно обоснованно считать, что подобные уклонения или ошибки *самой природы*, как их допустимо назвать, вызваны не одной или двумя, а бОльшим числом скрытых и совместно существующих причин. М. У. К.

Гершель, Максвелл в 1860 г., Крылов (1950, гл. 8) без всяких ссылок повторили просто негодное доказательство Эдрейна 1809 г. (Шейнин 1965), см. Шейнин (2013, с. 305). О Кетле см. там же, с. 191 – 194. В тех же *Письмах* Кетле (с. 168 и 412 – 424) заметил, что в метеорологии встречаются асимметричные распределения, да и вообще трудно всерьёз воспринимать этого крайне легкомысленного (но богатого идеями) автора. О. Ш.

Видимо, во многих случаях преобладает аналогичное явление. При последовательных усовершенствованиях в артиллерии, в машинах и механизмах и т. д., поскольку более существенные источники несовершенства и неточности осознаются и исправляются, *количество* малых расстраивающих влияний, которые становятся ощутимыми, быстро возрастает. Они всё ещё искажают результаты, хотя в меньшей степени. Мы можем даже проследить подобное в различных явлениях моральной и материальной вселенной.

[Следуют примеры про удовлетворение человека предметами первой необходимости и иными товарами; про более, а затем менее серьёзные заболевания, после чего автор без объяснений упомянул статистику преступлений.] М. У. К.

10. Исключительная простота экспоненциального соотношения, считалось бы оно законом отдельной ошибки или среднего результата большого числа наблюдений, по сравнению с канительными и трудными методами его установления, естественно привела к нескольким попыткам обходиться без этих методов или упростить их. В некоторых случаях гипотеза, которую мы приняли, была положена в основу.

Но, насколько нам известно, все эти процессы оказались неудачными кроме как у Пуассона. Недавно учёный автор, Тейт (1865) предложил, несколько колеблясь, свой метод лишь как попытку. Он решил, что каждую из сочетаемых элементарных ошибок можно сравнить с уклонением от вероятнейшего значения числа белых шариков из общего числа извлечённых из урны, которая содержала белые и чёрные шарики в заданной пропорции.

Лаплас показал в своей гл. 3, что в таком случае эта ошибка подчиняется экспоненциальному закону. Таким образом, доказательство относится к сочетанию некоторого числа элементарных ошибок, каждая из которых подчиняется этому закону. Но вполне очевидно, что мы никогда не сможем доказать, что ошибки, происходящие из каждого источника, следуют одному-единственному закону. Описанный метод вовсе не является общим.

11. Во всяком случае, о нормальном законе здесь и думать нельзя. О. Ш.

12. Мы иногда применяем слово *ошибка* для обозначения источника ошибки или множества ошибок (или соответствующую кривую) и в таких случаях пишем *Ошибка*. М. У. К.

13. Это непонятно. О. Ш.

14. Крофтон таким образом заявил, что возможны безошибочные наблюдения. Да, возможны, после дождика в четверг. О. Ш.

15. Крофтон ошибочно допустил, что наблюдения могут быть равно искажены случайными ошибками. О. Ш.

Библиография

Крылов А. Н. (1950), *Лекции о приближённых вычислениях*. М.

Шейнин О. Б. (1965), О работах Эдрейна в теории ошибок. *Историко-математические исследования*, вып. 16, с. 325 – 336.

Bessel F. W. (1818), *Fundamenta astronomiae*. Königsberg.

--- (1838, нем.), Исследования вероятности ошибок наблюдений. В книге автора *Избр. геод. соч*. М., 1961, с. 226 – 258.

Boole G. (1857), On the application of the theory of probabilities to the question of the combination of testimonies or judgements. *Edinb. Phil. Trans*., vol. 21, pp. 597 – 652.

Ellis R. L. (1844), On the method of least squares. Перепечатка в книге автора M*ath. and Other Writings*. Cambridge, 1863, pp. 204 – 219.

--- (1850), Remarks on the alleged proof of the “method of least squares”. *Lond., Edinb. and Dublin Phil. Mag*., vol. 37, pp. 321 – 328, 462.

Herschel J. (1850), Review of Quetelet (1846), *Edinb. Rev. or Critical J*., vol. 92, No. 185, pp. 1 – 57. Опубликовано анонимно.

Laplace P. S., Лаплас П. С. (1814, франц.), Опыт философии теории вероятностей. В книге Ю. В. Прохоров (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 843 – 848.

Newcomb S. (1886), Generalized theory of the combination of observations. *Amer. J. Math.*, vol. 8, pp. 343 – 366.

Poisson S.-D., Пуассон С. Д. (1837, 2003, франц.), *Исследования вероятности приговоров*. Берлин, 2013. **S, G,** 52.
Quetelet A. (1846), *Lettres sur la theorie des probabilités*. Bruxelles.
Tait P. G. (1865), On the law of frequency of error. *Trans. Roy. Soc. Edinb*., vol. 24, pp. 139 – 145.
Thomson W., Tait P. G. (1867), *Treatise on Natural Philosophy*, vol. 1. Oxford – New York, 2002.
Todhunter I. (1865), *History of the Mathematical Theory of Probability*. New York, 1949, 1965.

VIII

Л. фон Борткиевич (В. И. Борткевич)

Лексис и Дормуа

L. von Bortkiewicz, Lexis und Dormoy. *Nordic Stat. J.*, vol. 2, 1930, pp. 37 – 54

[1] Поскольку речь идёт о теории дисперсии Лексиса, нередко вместе с ним называют французского страхового математика Эмиля Дормуа. Сам Лексис обратил внимание на то, что за два года до появления его статьи (1876), в которой он начал заниматься теорией дисперсии, Дормуа во-первых, подобным же образом проверял, находятся ли временнЫе колебания различных относительных статистических чисел, и в том числе соотношение мужских и женских рождений, в границах, указанных исчислением вероятностей; и во-вторых, пришёл к схожим результатам.

Лексис (1903, с. 130 прим.) заметил, что соответствующая статья Дормуа оставалась совершенно неизвестной ему. Это замечание, естественно, не имеет значения в вопросе о заслугах Дормуа по обоснованию теории дисперсии. Намного существеннее определить, в какой степени совпадают результаты этих двух авторов. Способ квалифицированного описания этой темы мог бы содействовать представлению о том, выразил ли Дормуа существенное и имелись ли внешние причины для того, чтобы Лексис не знал о нём.

У Чупрова (1909/1959, с. 236) можно прочесть о том, какими в действительности были колебания статистических чисел с точки зрения исчисления вероятностей и что эта задача с давних пор внушала уважение статистикам. И далее: эта задача

Была почти одновременно и в основном так же само решена В. Лексисом и французским страховым математиком Дормуа. Чисто хронологический приоритет на стороне Дормуа, но его исследование, помещённое в специальном журнале, почти не было замечено даже во Франции и не оказало на изучение вопроса ни малейшего влияния. Фактически весь этот отдел теоретической статистики покоится на трудах Лексиса и его школы. Лексис сумел не только конструировать рациональные и практически удобные приёмы работы, но и показать на примерах глубокий интерес их применения к исследованию конкретных проблем. Ему удалось привлечь к работе целый ряд учеников и померить при их сотрудничестве степень устойчивости большого количества статистических рядов. Труд же Дормуа получил известность *лишь после тог, как Лексис открыл своего предшественника и обратил на него внимание статистиков*.

В подстрочном примечании Чупров упоминает весьма благоприятную рецензию A. Paolini в *Arhivio di statistica* за 1878 г. книги Дормуа (1878), но *действительного значения этой теории рецензент совершенно не замечает*.

Кейнс (Keynes 1921, с. 394) также называет личной неудачей Дормуа, то, что он, в отличие от Лексиса, привлёк так мало внимания:

Во Франции Дормуа независимо и примерно в то же время публиковал схожие теории, но последующие французские авторы обратили мало внимания на их работы.

Впечатление о том, что Дормуа может считаться со-основателем теории дисперсии будет обосновано, только если эта теория совсем кратко воспроизводится, и оба имени упоминаются наравне, см., например, Darmois (1928, с. 153 – 157)[1].

[2] По правде говоря, Лексис и Дормуа встречаются лишь в следующем: **1.** Они сравнивали действительные временнЫе колебания относительных статистических чисел с колебаниями, которых следовало ожидать в соответствии с теоретико-вероятностной схемой Бернулли. **2.** Они непременно выражали суммарные результаты подобных сравнений одним-единственным числом, коэффициентом дисперсии Q (Лексис) и коэффициентом дивергенции [расходимости, КР] (Дормуа), впоследствии обозначенным буквой C.[2] К пункту 1 следует заметить, что подобное сравнение намного раньше встречается у Бьенеме, который указал, что действительные колебания, как правило, намного значительнее предвычисленных. Он объяснил это тем, что кроме случайных причин, которые изменяются от испытания к испытанию, существуют и такие, которые сохраняются в течение большего или меньшего числа смежных испытаний.

В дальнейшем Курно, примыкая к Бьенеме, назвал эту вторую категорию случайных причин действующими *солидарно* и ещё более проникновенно подчеркнул их значимость[3]. Пояснение сверхнормальной дисперсии у Бьенеме и Курно[4] действительно схоже, но не совпадает с последующим мнением Лексиса, который привлёк схему серийно изменяющейся основной вероятности[5].

К пункту 2 я замечу, что характеристика поведения действительных колебаний относительно ожидаемых одним-единственным числом ни в коем случае не составляет главного в теории дисперсии Лексиса. Намного важнее выведенное им следствие, что коэффициент дисперсии (без учёта его собственных случайных ошибок) никогда не опустится ниже 1, и, что не менее важно, зависит определённым образом от широты поля наблюдения. Можно считать известными каковы эти следствия у Лексиса, особенно в связи с суждением Кетле и его направлением. Мы только обсуждаем, выказывал ли здесь Дормуа какое-либо сходство с Лексисом.

Если действительные уклонения отдельных значений относительного статистического числа от своего арифметического среднего в общем согласуются с вычисленными, то КР Дормуа будет мало отличаться от 1, и он заключает, что имеет место *чисто случайное* событие. Он (1878, с. 39) полагает, что причины события в различных испытаниях *независимы друг от друга*, т. е. не обладают *обратным влиянием*.

Но если C превышает 1 или становится меньше 1, это следует обосновать взаимным влиянием испытаний друг на друга. И в зависимости от величины и направления уклонения C от 1 можно судить о характере и значительности этого взаимного влияния:

Перед производством испытаний их результат, т. е. вероятнейшее число появлений события, предвидится. Если предыдущие испытания нисколько не влияют на предстоящее, то после производства их определённой части можно предвидеть сохранение результата. И КР, вычисленный после всех испытаний, окажется равным 1. Если предшествовавшие испытания повышали вероятность предвиденного результата, облегчали его, существовала более сильная тенденция закономерности, чем соответствовавшая природе независимых событий, и коэффициент становился меньше 1. Если, напротив, влияние предшествовавших испытаний понижало вероятность предвиденного результата, облегчала уклонения, имела место тенденция беспорядочности, также не соответствовавшая природе независимых друг от друга фактов, и коэффициент превышал 1.

Обратно, можно заключить, что коэффициент равный 1 указывает, что факты независимы друг от друга; меньший 1, что факты более закономерны, т. е. находятся под воздействием причины, которая благоприятствует закономерности. Наконец, коэффициент, больший 1, указывает на факты более беспорядочные, чем средние, на такие, которые, стало быть, находятся под воздействием причины, благоприятствующей уклонениям.

[3] Отсюда следует, что Дормуа обращается, скажем, на равных с обоими случаями поднормальной ($C < 1$) и сверхнормальной ($C > 1$) дисперсии. Оба случая можно объяснить взаимной зависимостью испытаний, которая либо повышает, либо понижает ожидаемую закономерность. Но пояснения подобного поведения статистических чисел соответствующей и притом правдоподобной теоретико-вероятностной схемой у Дормуа вовсе нет. Учение Бьенеме – Курно о солидарно действующих причинах поясняет случай $C > 1$, но не $C < 1$. Этот недостаток не устраняется и схемой Лексиса серийно изменяющейся основной вероятности. И таким образом и для Лексиса случай поднормальной дисперсии исключается из статистики. Прав он был или нет, мы не обсуждаем. Но определённо, что этот случай у Дормуа занимает совершенно иное положение, так что в отношении этого важнейшего обстоятельства они прямо противоположны друг другу.

Кроме того, общее и переданное дословно высказывание Дормуа (см. выше) о смысле случаев $C = 1$, больше или меньше 1 крайне убого и по поводу главного сводится к тавтологии[6]. Его неудача проявляется и там, где, в частности, он комментирует свои численные результаты. Из того, что из вычисленной доли мужских рождений следует, что C мало отличается от 1, он заключает, что пол младенцев зависит только от случая. Эта сама по себе странная мысль может всё же считаться верной, если учесть, что Дормуа ранее пояснил, что чисто случайными он назвал события, причины которых при различных испытаниях взаимно независимы. Вскоре, однако, мы покажем, что у Дормуа смысл термина *чисто случайное событие* не исчерпывается указанным выше истолкованием.

Для отношения числа рождений вне брака с их общим числом Дормуа вычислил C, которое оказалось несущественно выше 1 (от 5 до 15). По его мнению, это позволяло признать действие общей господствовавшей причины, а именно *влияния плохих примеров на общее моральное состояние*. На самом деле сверхнормальная дисперсия, вопреки мнению Дормуа, не обосновывает непосредственного влияния одного-единственного примера на аналогичный случай. Скорее достаточно временнОе соседство отдельных случаев, которые очутились под одним и тем же влиянием. И поскольку привлекается пояснение непосредственным двусторонним влиянием отдельных случаев, укажем, что влияние представляется односторонним и заразительным, притом влиянием только порока, а не добродетели (которая здесь понимается как воздержание от действий, приводящих к внебрачным рождениям [как деликатно!]).

Очень высокие значения C для чисел рождений и смертей (т. е. отношений этих чисел к населению) означает, по истолкованию Дормуа, что здесь речь идёт не об отдельных случайных фактах, что для какого-нибудь года по сравнению с другими годами того же десятилетия эти числа зависят от общих и тех же самых причин, в том числе важнейших, эпидемий, войн и неурожаев.

[4] Здесь, видимо, проявляется приближение к пояснению сверхнормальной дисперсии по Лексису. Но Дормуа, как показывает способ его выражения, по крайней мере не осознаёт своего раздвоения, допуская, либо, что некоторые случайные причины воздействуют солидарно, либо, что изменяются общие условия.

Отношение внебрачных рождений к населению характеризуется более низким значением *C*, чем отношение всех рождений к населению, и по его мнению это означает **1.** Что общие причины, действуя на рождения вообще, влияют на второе отношение сильнее, чем на первое и **2.** Что на число внебрачных рождений моральное состояние и его заражение дурными примерами действует намного сильнее, чем общие причины, которые действуют на брачную рождаемость.

На самом деле главная причина более низкого значения *C* для внебрачных рождений состоит в том, что соответствующее относительное число само очень невелико. Но о связи значений *C* с этим числом Дормуа не имеет ни малейшего понятия. Для женитьб и отношения брачных рождений к числу замужних женщин Дормуа устанавливает довольно высокое значение *C,* и заключает, что и здесь существуют явления, которые сильно зависят от общих причин. К ним можно причислить благосостояние и спокойствие, господствующие в стране.

Показательно, что Дормуа так и не сказал, что общие причины не сами по себе, а лишь постольку поясняют сверхнормальную дисперсию, поскольку изменяются от года к году (когда, как всегда оказывается в его примерах, значения относительных случаев относятся к следующим один за другим календарным годам). Считается, однако, что и при нормальной дисперсии общие причины или общие условия явления имеют значение, но в данном случае постоянны (и что в то же время случайные процессы разобщены и не действуют солидарно).

Но Дормуа так не думает. Он приводит значения *C* для определённых явлений уголовной статистики (для отношения числа подсудимых к населению; подсудимых женщин, холостых, подростков, неграмотных к общему числу подсудимых) и считает, что эти числа сравнительно низки (1,75 – 6):

Итак, такие факты, как преступления представляются почти исключительно как зависящие от свободной воли отдельных лиц, но тем не менее управляются в большой степени теми же законами, что и чисто случайные события. Так указывают приведённые выше коэффициенты: все они весьма малы. Это – серьёзный довод для тех, кто думает, что человек, по крайней мере в коллективе, подвержен законам необходимости (там же, с. 45).

Неплохо заметить тут, что *общие причины* не упомянуты, вместо них появились *законы* и притом в смысле неизбежности, которая была характерна для точки зрения Кетле и ещё более для некоторых его последователей. Случаи слабо выраженной сверхнормальной дисперсии по Дормуа подкрепляют точку зрения неизбежности, и ему представляется, как это недвусмысленно следует из приведённой выдержки, что и случаи нормальной дисперсии ($C = 1$) подвержены этой мысли. И нормальный характер дисперсии, как неоднократно Дормуа ранее утверждал, указывает, что здесь речь идёт о *чисто случайных явлениях*. И теперь ясно, что его определение этого понятия, как характеризующего явления, между которыми нет взаимозависимости, неполно передаёт его основной взгляд на события подобного рода. Они [такие события?] кроме того указывают, что не определяются *общими причинами*, а подчиняются *законам неизбежности*.

[5] Среди немецких учёных, которые в 1860-е и 1870-е годы выступали против Кетле и его направления, выделялся Лексис со своей теорией дисперсии. Она оказалась для него инструментом для опровержения статистической неизбежности. Кто признаёт неизбежность, в том числе и Дормуа, тот уже не может считаться союзником Лексиса в этой области теоретической статистики.

К нелепостям, которые встречаются у Дормуа там, где он комментирует установленные им КР, присоединяется его попытка перенести понятие об этих коэффициентах на определённые результаты наблюдений, которые уже не соответствуют схеме Бернулли[7]. Пусть, в его обозначениях, проведено S испытаний над событием, вероятность [появления которого] в каждом из них равна p. Разделим эти испытания на n рядов из s испытаний в каждом и числа появлений события в них обозначим через a_1, a_2, …, a_n. Ожидание (по Дормуа, вероятнейшее значение) этих чисел равно sp, а ожидание абсолютных значений уклонений

$$a_1 - sp,\ a_2 - sp,\ \ldots,\ a_n - sp \qquad (1)$$

равно

$$\sqrt{\frac{2sp(1-p)}{\pi}} \approx 0{,}80\sqrt{sp(1-p)}.$$

Как обычно, Дормуа заменяет (никогда не известное в статистике) p через A/S, $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и получает

$$0,80\sqrt{\frac{A(S-A)}{nS}}. \qquad (2)$$

Осталось только умножить это выражение на n, чтобы получить ожидание суммы абсолютных значений уклонений (1). Это ожидание равно

$$\mathrm{E} = |a_1 - A/n| + |a_2 - A/n| + \ldots + |a_n - A/n|. \qquad (3)$$

Разделив Е на (2), мы получим C.

Это вычисление можно, по Дормуа, с достаточным приближением применять и тогда, когда статистик записывает определённые числа и средние значения, не имея соответствующего числа испытаний, как в метеорологии. Здесь всегда можно принять, что неизвестное S очень велико относительно A, так что вместо (2), умноженного на n, можно принять

$$0,80\sqrt{nA}. \qquad (4)$$

Дормуа приводит пример распределения месячного количества осадков по дням. Так, в Вердене (Франция) в январе 1868 г. всего их выпало 630 десятых миллиметра, которые распределились следующим образом [приведена таблица]. Среднее дневное количество осадков было равно 20, а Е – 838 этих единиц. По формуле (4) КР равнялся[8]

$$\frac{838}{0,80\sqrt{30\cdot 630}} = 8. \qquad (5)$$

Подобным же образом Дормуа определил КР на оставшиеся 11 месяцев 1868 г. и установил его значения от 4 до 9. Он заметил:

Можно заключить, что от одного дня до другого в том же месяце дождь вовсе не являлся случайным, он вызывался общими причинами, которые распространили своё влияние на все дни месяца.

Это замечание явно ошибочно. Если действительно уклонения от одного дня к другому значительнее, чем соответствует ожиданиям, то это объясняется общими причинами, свойственными отдельным дням, или, говоря иначе, меняются со дня на день, но не ввиду общих причин, которые распространяют своё влияние на все дни месяца[9]. Имеется в виду, что не только случайные, но и общие причины могут быть определены.

И вообще метод Дормуа подсчёта КР даёт повод к самым серьёзным сомнениям. Количество осадков, выраженное в десятых долях миллиметра понимается как событие, а для *A* в формуле (4) соответственно её выводу возможно только одно событие, и указано 630. Но почему 1/10 миллиметра должно быть событием? Выбор единицы конечно произволен, но если вести подсчёт в сотых долях миллиметра, то в левой части формулы (5) числитель возрастёт в 10 раз, а знаменатель только в $\sqrt{10}$ раза, и КР в правой части (5) окажется равным не 8, а примерно 25. И не 8, а 2,5, если принять за единицу миллиметр. Эта связь избранной единицы измерения и вычислением КР следует […].

Кроме того, указанная связь подчёркивает, как насильственно выглядит включение этих случаев в схему Бернулли. Только ради фантазии каждое количество дождя представляется определённым числом событий. […]

[6] Если метеорологические данные обрабатывать без поддержки подобными фантастическими мерами при помощи теории дисперсии, то вначале эту теорию следует перестроить под более общую схему. Предположим, что было произведено S испытаний над произвольной величиной с результатами $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Их среднее арифметическое обозначим через m, а среднее уклонение через δ, тогда

$$\delta^2 = \frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \ldots + (x_s - m)^2}{S}. \qquad (6)$$

Разделим эти испытания на n рядов по s испытаний в каждом и арифметическими средними

$$m_1, m_2, \ldots, m_n. \qquad (7)$$

Положим

$$\sigma^2 = \frac{(m_1 - m)^2 + (m_2 - m)^2 + \ldots + (m_n - m)^2}{n}, \; Q^2 = \frac{s\sigma^2}{\delta^2}. \qquad (8; 9)$$

Тогда $Q = (\sigma/\delta)\sqrt{s}$ окажется коэффициентом дисперсии по Лексису для ряда (7). С точки зрения этой схемы, которая позволяет использовать ряд значений произвольных средних арифметических и потому может быть названа *средней схемой*, схема Бернулли является специальным случаем, при котором x_i могут быть только 1 и 0 (появление и отсутствие некоторого события).

Пусть, как у Дормуа, даны n рядов испытаний с числами появлений события a_1, a_2, …, a_n, сумма которых обозначена через A, тогда

$$x_1 + x_1 + \ldots + x_s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A,\ m = A/S,$$

$$m_1 = a_1/s,\ m_2 = a_2/s,\ \ldots,\ m_n = a_n/s,$$

$$\delta^2 = \frac{A(1-m)^2 + (S-A)m^2}{S} = \frac{A(S-A)}{S^2},$$

$$\sigma^2 = \frac{(a_1/s - A/S)^2 + (a_2/s - A/S)^2 + \ldots + (a_n/s - A/S)^2}{n} =$$

$$= \frac{(a_1 - A/n)^2 + (a_2 - A/n)^2 + \ldots + (a_n - A/n)^2}{ns^2}.$$

$$Q^2 = \frac{S[(a_1 - A/n)^2 + (a_2 - A/n)^2 + \ldots + (a_n - A/n)^2]}{A(S-A)}.$$

Это выражение совпадает с обычным

$$Q^2 = \frac{(a_1 - A/n)^2 + (a_2 - A/n)^2 + \ldots + (a_n - A/n)^2}{n} \div [s\frac{A(S-A)}{S^2}],$$

потому что $ns = S$[10].

Можно вывести и КР Дормуа, исходя из средней схемы следующим образом. Пусть

$$\theta = \frac{(m_1 - m) + (m_2 - m) + \ldots + (m_n - m)}{n} \qquad (9)$$

(здесь выписаны абсолютные значения разностей) и в отличие от формулы (10)

$$C = \frac{\theta}{\delta}\sqrt{\frac{\pi s}{2}}. \qquad (11)$$

Эта формула применима, если значения (7) до некоторой степени подчиняются закону Гаусса. Для особого случая схемы Бернулли в обозначениях Дормуа оказывается

$$\theta = \frac{E}{S},\ \delta = \frac{\sqrt{A(S-A)}}{S}$$

и формула (11) принимает вид

$$C = \frac{E}{\sqrt{A(S-A)}}\sqrt{\frac{\pi s}{2}} = E \div [0{,}80\sqrt{\frac{nA(S-A)}{S}}]\,.$$

Здесь как раз выражен приём, который предложил Дормуа для определения C.

Чтобы приложить среднюю схему к данным введённой выше таблицы, следует вначале разложить эти данные в некоторое число n рядов по s испытаний в каждом. Это возможно, если в соответствии с Дормуа не принимать во внимание 31 января. Мы получим $S = 30$ и, например, $n = 6$ и $s = 5$. Тогда $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$ и т. д. Средние арифметические по столбцам будут

5,6; 3,4; 21,2; 47,4; 37,8; 10,6.

Далее, $m = 630/30 = 21$ и по формулам (6; 8; 9) $\delta = 38{,}92$, $\sigma = 16{,}50$, $Q = 0{,}95$. Вместе с тем, по формулам (10; 11) $\theta = 14{,}47$, $C = 1{,}04$.

Полученные таким образом значения Q и C указывают на почти нормальную дисперсию (хотя, разумеется, следует учитывать, что эти значения весьма сомнительны ввиду своей малости). В этом случае нормальная дисперсия указывает, что смежные дни по отношению к осадкам независимы[11].

Равным образом можно применить теорию дисперсии к исследованию осадков в течение смежных календарных лет. [Приведённая] таблица указывает количество осадков, выпавших в Берлине в 1909 – 1928 гг[12]. В соответствии со средней схемой мы имеем $x_1 = 624$, $x_2 = 663$ и т. д., $m = 578$, $\delta = 91{,}94$. Пусть $s = 4$ и $n = 5$. Тогда

$m_i = 544{,}5;\ 575{,}5;\ 532{,}8;\ 576{,}8;\ 660{,}2$

$\sigma = 44{,}56;\ \theta = 32{,}92;\ Q = 0{,}97;\ C = 0{,}90$

Дисперсия и здесь почти нормальна (но и здесь сомнительна ввиду малости n, что нельзя упускать из вида). Следует признать, что между смежными календарными годами никакой зависимости нет[13]. Но по Дормуа здесь $C = 3{,}9$.

Дормуа не учёл как в области метеорологии можно целесообразно обрабатывать числовые ряды, но было бы неверно упрекать его. Лексис (1877, с. 33) также сомневался. Он определённо хотел ограничить теорию дисперсии относительными числами, исходя из неверного представления о том, что для них возможно вычисление среднего уклонения или *точности* двумя различными методами, *комбинаторным* и *физическим*. Для абсолютных величин он полагал возможным только второй. Но относительным числам следует противопоставлять только средние из каких-либо абсолютных чисел, потому что каждое относительное число соответствует многим отдельным случаям. Для подобных средних величин вычисление среднего уклонения σ вполне возможно двумя различными методами: непосредственно по формуле (8) и косвенно, специальным случаем которого является комбинаторный метод. Именно, выведенное по формуле (5) значение δ делится на $\sqrt{s}$. Затем σ по формуле (6) связывается с $\delta/\sqrt{s}$ и по формуле (9) определяется искомое Q.

Эта возможность распространения теории дисперсии, понятия коэффициента дисперсии Q и КР C на произвольные статистические величины, которые представлены средними арифметическими, уже была указана для поколений, но вряд ли кто-либо кроме Чубера заметил это. Так как же можно требовать от Дормуа лучшего понимания? Но есть различие: либо не применять некоторые необоснованные методы исследования к определённым случаям, либо применять их, т. е. применять сомнительные методы вместо их приспособления к своеобразным новым методам.

Это последнее и сделал Дормуа и тем самым привёл дополнительный пример своих недостатков. Из всего сказанного следует, что он так недостаточно понимает приложение теории вероятностей к опытным фактам, что, поскольку речь идёт о теории дисперсии, постановка его вровень с Лексисом противоречит исторической справедливости.

В заключение можно указать на одно обстоятельство, которое могло бы затемнить значение Лексиса как основателя теории дисперсии для теоретической статистики. Это обстоятельство относится к смыслу выражения *дисперсия*. Лексис непременно применял его в специальном смысле, чтобы тем самым различать нормальную, поднормальную и сверхнормальную дисперсии.

Для Лексиса *дисперсия* не означала распределения отдельных значений некоторой величины относительно её среднего, а распределение в связи с определённым теоретико-вероятностно обоснованным ожиданием. Напротив, ныне слово *дисперсия* обычно применяется в намного более общем смысле и стало синонимом распределения (distribution)[14].

Разумеется, не исключено, что термин *дисперсия* в этом бесцветном смысле применялся и до Лексиса. Но если так действительно было, то настолько редко, что Лексис обоснованно придал ему указанный особый смысл, новый или, во всяком случае, необычный в статистике для обозначения нового понятия. Было бы лучше уважать терминологию Лексиса. Вместо того, чтобы усвоить новое выражение, иначе истолковав его, теорию дисперсии Лексиса столкнули в сторону и уж, конечно, отвлекли внимание от её сути[15].

Примечания

1. Это непонятно. О. Ш.

2. Коэффициент *Q* впервые появился у Лексиса в 1879 г. (Lexis 1903, с. 183). Л. Б.

3. Bienaymé (1839), ср. Bienaymé (1876, с. 204), заявил, что никак не приписывает своей теоретико-вероятностной схеме всеохватывающего значения. Л. Б.

4. Cournot (1843, §§ 79 и 117). Л. Б. Также § 42: *Идея независимости или отсутствия солидарности*. О. Ш.

5. См. нашу энциклопедическую статью 1901 г. Л. Б.

6. Это утверждение следовало пояснить. О. Ш.

7. О несоответствии схеме Бернулли см. ниже. О. Ш.

8. Результат округлён и всё вычисление приближённо. Замена 31 на 30 под знаком корня не имеет ничего общего с известной поправкой Гаусса, равной [в данном случае] – 1. Л. Б.

9. Дормуа (там же, с. 47) проделал ещё одно сходное вычисление количества месячных осадков в течение года. КР снова превышал 1, и Дормуа аналогично заключил, что существовали общие причины, которые повлияли на все месяцы года. Л. Б.

10. В тексте упущено, что сумму квадратов ошибок следует делить не на n, а на $n - 1$. [Ср. Прим. 8]. Более подробно об этом см. в нашей статье (1918). Л. Б.

11. Можно привлечь и теорию итераций. Её преимущество перед теорией дисперсии состоит в том, что она исключает произвол во временнЫх ограничениях (почему изучаются отрезки в 5 дней, а не в 3 дня?). Итерацией считается последовательность влажных или сухих дней. В приведённой выше таблице число итераций равно 19, а соответствующее ожидаемое число равно 15,4. Уклонение 3,6 на 38% превышает соответствующую среднюю квадратическую ошибку 2,6, и поэтому смена сухих и влажных дней происходила бы несколько чаще, чем соответствовало предположенной независимости. См. формулы (21) и (22) в нашей книге (1917, с. 90). О приложении теории итераций к метеорологическим данным см. Schmidt (1921). Л. Б.

8. Борткевич не был знаком с историей метеорологии и не знал, что несколько учёных, в том числе Кетле, пришли к выводу о зависимости погоды от её предшествовавшего состоянии. Они применяли элементы теории серий (а не итераций). См. Шейнин (1984, § 5).

12. Числа взяты из соответствующих лет *Jahrgängen des statistischen Jahrbuchs für das Deutsche Reich*. Там отсутствуют полные данные за 1918 г., и их пришлось взять из *Statistische Jahrbuch für den Preussischen Staat*, Bd. 16. Л. Б.

13. Чтобы применить теорию итераций к этому случаю можно считать итерацией последовательность уклонений одного и того же знака от среднего арифметического. Тогда ожидаемых и действительных итераций будет 10,5 и 11. Подобная согласованность имеет то же значение, что и мало отличающиеся от 1 величины *Q* и *C*. Л. Б.

14. В учебниках по статистической методологии Bowley (1901), Yule (1911), T. L. Kelley, *Principles and Methods of Statistics*, H. Jerome, F. C. Mills (1965), E. E. Day, R. E. Cheddock (1926) более или менее подробно рассматривается измерение дисперсии, но теория Лексиса совершенно не упоминается. Yule (1911, с. 144) лишь сообщает, что Лексис ввёл выражение präzision, но это неверно: задолго до Лексиса этот термин широко применялся в теории ошибок наблюдений. Совершенно неверно о соотношении *Q* Лексиса и пирсоновского критерия хи-квадрат описывает Фишер (1925, с. 79), см. нашу книгу (1917, с. 60 – 66). Л. Б. Борткевич назвал только авторов учебников; мы установили неполные дополнительные данные. О. Ш.

15. Борткевич полностью умолчал о критике Чупровым теории дисперсии. Уже в 1914 г. Чупров предложил Борткевичу *сдать её в архив*, с чем тот не согласился. Уже в 1921 г. он окончательно выяснил несостоятельность коэффициента дисперсии по отношению к теории устойчивости статистических чисел (Шейнин 2013, § 16.1.3). О. Ш.

Библиография

Чупров А. А. (1909), *Очерки по теории статистики*. М., 1959.

Шейнин О. Б., Sheynin O. (1984), On the history of the statistical method in meteorology. *Arch. Hist. Ex. Sci.*, vol. 31, pp. 53 – 93. **S, G,** 47.

Bienaymé I J. (1839), Théoréme sur la probabilité des résultats moyens des observations. *Soc. Philomat. Paris*, Extraits, sér. 5, pp. 42 – 49.

--- (1876), Les grands nombres en statistique. *J. Soc. Stat. Paris*, 17e année, pp. 199 – 204.

Bortkiewicz L. von, Борткевич В. И. (1901), Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik. *Enc. math. Wiss.*, Bd. 1. Leipzig, pp. 827 – 835.

--- (1917), *Iterationen*. Berlin.

--- (1918), Der mittlere Fehler des zum Quadrat erhobenen Divergenzkoeffizienten. *Jahresber, Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 27, pp. 71 – 126.

Bowley A. L. (1901), *Elements of Statistics*. Боули А. (1926, англ.), *Элементы статистики*. М., 1930.

Cheddock R. E. (1926), *Principles and Methods of Statistics*.

Cournot A. A., Курно О. (1843, франц.), *Основы теории шансов и вероятностей*. М., 1970.

Darmois G. (1928), *Statistique mathématiques*. Paris.

Dormoy E. (1874), Théorie mathématique des assurances sur la vie. Статья перепечатана в книге автора (1878, pp. 432 – 461).

--- (1878), То же название, t. 1. Paris.

Fisher R. A., Фишер Р. Э. (1925), *Statistical Methods for Research Workers. Статистические методы для исследователей*. М., 1958.

Keynes J. M. (1921), *Treatise on Probability*. *Coll. Writings*, vol. 8. London, 1973.

Lexis W. (1876), Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung. В книге автора (1903, pp. 130 – 169).

--- (1877), *Zur Theorie der Massenerscheinigungen in der menschlichen Gesellschaft.* Freiburg i. B.

--- (1903), *Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik*. Jena.

Mills F. C. (1965), *Statistical Methods*.

Quetelet A., Кетле А. (1848), *Du système social*. Paris. *Социальная система*, 1866. М., 2011.

--- (1911), *Социальная физика*, т. 1. Киев. Перевод книги 1836 г. с более подробным заглавием.

Schmidt Adolf (1921), Über die Frage der Häufigkeit von Monatsfolgen gleichsinniger Temperaturabweichung. *Met. Z.*, pp. 50 – 53.

Yule G. U. (1911), *Introduction to the Theory of Statistics*. Юл Дж. Э., Кендалл М. Дж. (1960), *Теория статистики*. М. Перевод с издания 1950 г. Соавтор (Кендалл) появился в 11-м издании 1937 г.

IX

Крис Притчард

Багатель как источник вдохновения для quincunx Гальтона

Chris Pritchard, Bagatelle as the inspiration for Galton's quincunx.
Bull. Brit. Soc. for Hist. Math., vol. 21, 2006, pp. 102 – 110

Пятничные беседы Королевского института, которые установил Хемфри Дейви в 1826 г[1]., проводили учёные, известные своим лекторским умением, аудитория же одевалась формально и ожидала, что беседы будут сопровождаться опытами. В одну из пятниц, 27 февраля 1874 г., Френсис Гальтон показал новый и весьма действенный подход к статистическим данным, при котором ранги заменили непосредственные измерения[2]. Он обходил физические измерения в случае изучаемого объекта, который неприязненно или явно враждебно относился к ним. Таковым был опыт Гальтона общения с племенами юго-западной Африки в ранние 1850-е годы.

Его метод обеспечивал замену данных для психометрических исследований, при которых часто отсутствовала мера и абсолютные измерения оказывались невозможными. Но прежде, чем раскрыть суть новых методов, Гальтон должен был найти способ перекрыть широкий разрыв в понимании предмета между собой и теми слушателями, которые имели слабое представление о том, что мы сейчас называем нормальным распределением, Гальтон же называл *законом частоты ошибок* или *законом уклонений*.

Без выполнения этого условия метод рангов оставался бы тайной почти для всей аудитории. Гальтон решил сосредоточиться на сообщении своих идей, и, в соответствии с традицией Королевского института, показать крайне необходимый результат на моделирующем устройстве в форме доски со стержнями.

В 1873 г. он поручил фирме Tisley & Spiller изготовителей научных приборов сконструировать прибор для показа связи между бернуллиевыми испытаниями, биномиальным законом и законом частот. Этот прибор Гальтон (1889, с. 63) представлял себе в виде машины для показа *причины кривой частот*, *весьма привлекательно подражавшей условиям, от которых зависят уклонения.* Она не была прямо упомянута в отчёте о его беседе, но впоследствии Гальтон (1877) указал на прибор,

Который я [он] *применил три года назад* […], *чтобы иллюстрировать* […] *моменты, связанные с законом уклонений*.

Этот прибор состоял из доски со стержнями в стеклянном кожухе и Гальтон назвал его *quincunx*, потому что он напоминал подобную римскую монету с четырьмя точками, как бы вершинами квадрата и пятой точки в его центре[3]. Сверху в прибор насыпалась свинцовая дробь, и стержни, которые встречались на пути падения каждой дробинки, отражали её случайно влево или вправо. Уклонения дробинок при их падении были взаимно независимы и представляли собой бернуллиевы испытания и, важнее, возможную причину, сочетания которых производят одну из многих едва значимых причин, приводящих к вариации между людьми.

Гальтон написал инструкцию для применения своего прибора:

Зарядите прибор, переворачивая его, чтобы вся дробь высыпалась в карман, затем резко переверните его ещё раз[4] *и сразу же поставьте его на ровный стол. Вся дробь упадёт в воронку и пройдёт через неё. Дробинки упадут, следуя ломаными путями, соберутся в вертикальных отделениях на дне прибора и представят закон дисперсии*[5].

В первом опубликованном описании прибора Гальтон (1889, с. 64) написал:

Поток дробинок, устремляющийся из воронки, расширяется по мере падения, и в конце концов каждая дробинка будет поймана в одно из отделений сразу же после прохождения сквозь последний ряд стержней. Формы столбиков этих дробинок, которые соберутся в разных отделениях, приближённо представят кривую частот […] *и окажется примерно той же, сколько раз мы бы не повторяли этот опыт.*

Очертание окончаний столбиков, которые соберутся в различных отделениях, окажется почти таким же, как у нормальной кривой частот[6]*, если только в приборе много рядов стержней, дробинки мелкие, и их много*.

В своей несравненной книге Стиглер (1986)[7] заметил, что в качестве демонстрационного прибор Гальтона был *изумительно действенным* и обеспечил слушателям лучшее чувство согласия между биномиальным законом и законом частоты ошибок.

Гальтон не указал, что вдохновило его применить [как бы] доску со стержнями, и ничего об этом не сказано в литературе. Но разгадка может быть заметна в его единственном рисунке простого quincunx [вставлен в текст автора] в книге (1889) вместе с его описанием (см. выше). Стержни на этом рисунке расположены в прямоугольнике, что позволяет отбрасывать обратно те дробинки, которые достигнут его края. Это портит результат, но подобного не могло произойти в приборе, который Гальтон демонстрировал.

Рисунок Гальтона напоминает наклонные доски, которые применялись по крайней мере в двух вариантах игры в багатель. Эта игра появилась во Франции примерно в период правления Людовика XIV (1636 – 1715)[8]. Игра *Девять лунок* была популярна в Англии примерно в то же время. В ней небольшие шарики вкатывались в пронумерованные лунки и (Bell 1876, с. 16) заметил, что *в течение 150 лет эта игра превратилась в багатель*.

Oxford English Dictionary указывает, что впервые она была упомянута на английском языке в 1819 г. К середине XIX в. доски для этой игры распространились в английских тавернах и многих частных домах. Диккенс, в своих *Посмертных записках пиквикского клуба*, в начале гл. 14, упомянул, что в багатель играли двое членов этого клуба и указал, что она гораздо менее понятна, чем полагают *обычные люди*.

В простейшей багатели играли на столе длиной более 6 футов с пронумерованными лунками, но ещё в начале века были и другие разновидности игры. Одна из них, показанная автором, называлась *Скалы Силли*[9] (Opie и др. 1989, с. 158 – 159) и описана в литературе (Strutt 1801/1833, с. 301).

Требуется наклонный продолговатый стол, закруглённый на возвышенной стороне. К одной из его сторон почти на всю длину стола прикреплён открытый ящик. В него укладываются шарики, которые подталкиваются круглым деревянным кием и скатываются вниз в чашечки. Проволочки, расположенные в разных местах стола, изменяют направление падения шариков.

Quincunx был известен и во втором варианте под названием *русская багатель*. Его рисунок и описание см. Bohn (1850). Он показан автором.

Более известен двоюродный брат багатели, бильярд, в который определённо играл Гальтон. Но багатель была в то время так популярна, что он весьма вероятно был знаком с ней тоже, и есть достаточно свидетельств того, что основное влияние на конструкцию quincunx оказала какая-либо форма багатели, вероятно Скалы Силли или русская багатель.

Примечания

1. Несравненно важнее Британская ассоциация по распространению науки, учреждённая в 1831 г. и переименованная в 2009 г. в Британскую научную ассоциацию.

2. Гальтон применил ранговую корреляцию, например, в письме Дарвину в 1876 г. (Шейнин 2013, § 11.6), но *ранги* в нынешнем контексте непонятны.

3. Это слово произошло от латинского quinque, пять, и uncia, двенадцатая. Quinqunx был символ, которым римляне обозначали 5/12 медной монеты. В Англии оно применялось с XVII в. и обозначало расположение деревьев в фруктовом саду. К. П.

4. Это непонятно.

5. Дисперсию Гальтон ранее не упоминал, см. выше.

6. Термин нормальное распределение ввёл Peirce (1873, с. 206), а окончательно он вошёл в обиход в 1893 г. (Пирсон).

7. Книга Стиглера действительно несравненна. Он выблевал хулу на память Гаусса, а её содержание очень бедно, но все комментаторы, включая самых известных статистиков, взахлёб восхваляли автора. Это означает, что статистическое сообщество серьёзно больно. См. скачиваемый файл 31 на моём сайте www.sheynin.de

8. Багатель было название скромного дома в Париже, в котором размещался салон для азартных игр. К. П.

9. Силли, архипелаг крохотных островков у южной оконечности Англии.

Библиография

Bell R. C. (1875), Bagatelle. *Games and Puzzles*, vol. 35, pp. 16 – 17. В основном тексте автор указал дату 1876.

Bohn H., редактор (1850), *The Handbook of Games*. London.

Galton Fr. (1877), Typical laws of heredity. *Nature*, vol. 15, pp. 492 – 495, 512 – 514, 532 – 533.

--- (1887), Letter. *Nature*, vol. 36, pp. 28 – 29.

--- (1889), *Natural Inheritance*. London.

--- (1892), Quincunx, zur Illustration des Fehlergesetzes. В книге W. Dyck, *Katalog mathematischer und math.-phys. Modelle* etc. München, pp. 154 – 155. Olms, 1994.

--- (1907), Probability, the foundation of eugenics. *Popular Science Monthly*, vol. 71, pp. 165 – 178.

Opie I. и др. (1989), *The Treasures of Childhood*. London.

Peirce B. (1873), On errors of observation. Appendix 2 to *Report of the Superintendent of the US Coast Survey*. Washington, pp. 200 – 224.

Stigler St. M. (1986), *History of Statistics*. Cambridge.

Strutt J. (1801, 1810), *The Sports and Pastimes of the People of England*. London. В основном тексте автор без пояснений указал дату 1833.

X

Перепечатка

А. В. Васильев

Законы случайного и математическая статистика. Очерки

Вестник Европы, 27-й год, № 10, 1892, с. 630 – 655

1. Наша речь богата словами, но их истинное содержание представляется нам неясным. Тем не менее, мы постоянно употребляем их, не вдумываясь в значение этих слов. К числу таких слов принадлежит *случай*, таинственное слово, которым мы означаем всё для нас непонятное, всё, поражающее наше воображение, всё, противоречащее или строгой необходимости, или разумной целесообразности. Интересную тему из истории культуры выполнил бы тот, кто взялся бы проследить роль этого слова и связанного с ним понятия на различных ступенях развития человеческой мысли. Мы остановимся только на некоторых моментах из истории этого понятия.

Человек в диком состоянии, далёкий от мысли отыскивать какие-либо причины окружающих его явлений, видел в слепом случае, разрушающем столь часто все его надежды и упования на счастливую охоту, удачный набег на соседнее племя, на урожай нивы, – сверхъестественное существо. Он объектировал случай, как в виде лесной нимфы объектировал необъяснимое для него эхо. И те сверхъестественные существа, которыми изображается случай, представляются в мифологических миросозерцаниях то в виде шаловливых эльфов шекспировского *Сна в летнюю ночь*, то в виде грозного существа с особенной любовью поражающее всякое величие и счастье.

Но вот занимается заря человеческого мышления: мифология заменяется философией. В мире мысли, как и в мире вообще, нет скачков, и философия не вышла из головы человека вооружённой Палладой[1]. Её связи с древними мифами раскрываются всё более и более современной наукой, которая видит, например, в философском учении Фалеса[2], провозглашающем воду сущностью всего, отклик древних египетских мифов.

Неудивительно поэтому, что и в развитии философии мы встречаем ещё признание случая как чего-то, противоречащего закону и уживающегося рядом с ним в явлениях материи, даже у столь знаменитых философов как Платон. Закон царит только в идеях, в мире же, по Аристотелю, случай господствует ещё больше, чем разумный закон.

Трагические превратности человеческой судьбы – любимый сюжет греческой литературы. На первых же страницах своей истории Геродот рассказывает трагическую судьбу человека, спасённого Крезом, невольно становящегося убийцей сына своего благодетеля и искупающего свою невольную вину самоубийством.

В греческой литературе мы встречаем не раз изображение жизни человеческой в виде колеса, вертящегося по воле слепой судьбы. То же символическое изображение человеческой жизни встречается и в философии индусов. Но между тем, как энергичная греческая раса создала бессмертный образ Прометея, борющегося за просвещение и неразрывно соединённое с ним счастье человечества, Индия выставила Будду с учением Нирваны, которая тем и хороша, что в ней

Никто не заставляет жить и умирать, вертеться в колесе, обнимая и покрывая поцелуями терзающие нас спицы.

Но Нирвана не всякому доступна, и живому человеку тяжело было примириться с мыслью о господстве слепого, таинственного случая. Ему издавна хотелось проникнуть в ту область, *где во тьме таится дальней весёлый жребий и печальный*. Эта-то потребность человеческого духа влекла его издавна к гаданиям и заклинаниям судьбы. Гадания должны были дать человеку возможность узнать по движениям звёзд и планет, по трепету внутренностей заколотого животного, по полёту выпущенной птицы те непредвиденные события, которые могут перевернуть иногда всю жизнь человека и даже жизнь целого общества.

В древней халдейской культуре[3] возник особенный род гаданий, имевший несомненное влияние на развитие чистой математики, гадания и заклинания посредством чисел. В собрании рифмованных пословиц и старых народных песен шумеров, народа, жившего за несколько тысяч лет до рождества Христова, и в котором многие учёные видят близких родичей предков наших черемисов (марийцев), мы встречаем два куплета, которые по-видимому должны были петься на сельском празднике:

Злак, поднимающийся прямо, достинет благополучного конца роста; число для этого мы знаем[4].

Но тщетны, конечно, все усилия проникнуть в будущее и бороться со слепым случаем и при помощи гаданий. Неумолимая, неизбежная Мойра[5] продолжала господствовать над миром, над богами. Её признание подготовляет уже мало-помалу человеческий ум к признанию строгой законности в явлениях мира. Человеческая мысль, развиваясь, ставит перед собой новую задачу: раскрыть законы, данные миру божественным разумом, устроителем всего, подставить вместо слепого случая закон, объяснить всякое явление предыдущими, вполне предопределяющими его явлениями, физическими причинами, как их называет Бэкон. В одном из лучших стихотворений Шиллера *Прогулка* в поэтической форме, рисующей всю жизнь человека в её многоразличных проявлениях, великий германский поэт изображает нам, как в безмолвном приюте, погрузившись в размышленье,

Чертит фигуры мудрец. Он исследует дух,
Силу материи, магнитов любовь и вражду,
Ловит в воздухе звук, разлагает лучи,
В ужасающем чуде случаев ищет закона
И явлений хаос к полюсу хочет привесть.

Разоблачить закон, скрытый в ужасающих чудесах случаев, – такова действительно цель науки, которая и невозможна без постулата причинного объяснения явлений. Признание необходимости такого объяснения явлений мы находим и в философии стоиков, и в философии атомистов, у Демокрита, провозгласившего, что

Ничто не происходит случайно, но всё по основанию и по необходимости.

Блестящие остроумием и диалектикой, поражающие поэтичностью картин неожиданными сравнениями общества и человека, страницы диалогов Платона отодвинули в греческой философии на задний план эти здравые мысли. Но каждое новое научное объяснение явлений, каждое новое научное предсказание, сделанное на основании знания определяющих причин, влекло с непобедимой силой человеческую мысль к признанию основного принципа научной мысли, к убеждению в строгом подчинении всех явлений мира законам.

В блестящую эпоху *Возрождения*, к которой европейская мысль всегда будет обращаться как к чудной поре юности, в той же самой Италии, в которой до сих пор храмы, картины, мозаики той эпохи способны забросить искру любви к искусству в самую невосприимчивую организацию, возродились и различные направления философской мысли. Увлечение платонизмом отразилось, например, на знаменитом Боккачио. В поэтическом произведении *О роковой судьбе великих людей* он изобразил чудовищный образ фортуны, ломающей величие и счастье, а в своём *Декамероне* признал счастливые и несчастные дни, и вместе со всеми учёными того времени разделял увлечение астрологией.

Но в той же Италии Помпонаций и Лоренцо де Валла [Pietro Pomponazzi, 1462 – 1525, философ; Lorenzo Valla, 1407 – 1457, гуманист] возобновляют учение атомистов, а в 1348 г. Николай из Аурикурии среди господства аристотелевского учения провозглашает, что в естественных явлениях имеет место только движение соединения и разделения атомов. Спустя два столетия Декарт и Бэкон с полной определительностью развивают мысль о необходимости механического объяснения явлений природы.

Едва ли можно лучше представить различие между механическим объяснением явлений, которое со времени Декарта и Бэкона составляет цель науки[6], и теми метафизическими объяснениями, которые допускались раньше, чем это сделал картезианец Бернар Ле Бювье де Фонтенель в своих остроумных *Разговорах о множестве миров* (1688, франц., 1740, русск.):

Я представляю себе природу обширным зрелищем вроде оперы. С вашего места в опере вы не видите театра, каким он есть на самом деле. Декорации и машины расположены так, чтобы произвести издали приятный эффект; колёса и противовесы, с помощью которых производятся все движения, скрыты от вашего взора. Да вы вовсе и не заботитесь угадать, как всё это приводится в действие. И только быть может какой-нибудь машинист, притаившийся в партере, обеспокоится полётом фаэтона, который покажется ему необыкновенным и захочет непременно угадать, как полёт этот исполнен.

Вы видите, что этот машинист похож на философа. Но относительно философов трудность увеличивается тем, что в машинах, какие природа предоставляет нашим глазам, верёвки скрыты, – и скрыты так, что не скоро можно было догадаться, чтО производит движение во вселенной. Представьте себе в опере мудрецов: пифагоров, платонов, аристотелей, имена которых ныне так громко звучат в наших ушах. Положим, что они видят полёт фаэтона, увлекаемого ветрами, но не могут открыть верёвок и не знают расположения театра за кулисами.

Один говорит: Фаэтон увлекается неким скрытым качеством. Другой: Фаэтон состоит из известных чисел, которые заставляют его подниматься. Третий: Фаэтон имеет известное влечение к верху театра и ему неловко, если он не там. Иной: Фаэтон не устроен для летания, но он скорее полетит, чем потерпит пустоту вверху театра. И сотни других фантазий. Наконец, приходит Декарт и некоторые из новых [Ньютон] *и говорят: Фаэтон поднимается потому, что его тянут верёвки, и есть груз, более тяжёлый, чем он, который в то же время опускается.*

Таким образом, теперь не верят более, чтобы тело двигалось, если его не тянет что-либо, или точнее: если его не толкает другое тело; не верят, чтобы оно поднималось или опускалось иначе, как вследствие противовеса или пружины. И тот, кто *увидел бы природу, как она есть, увидел бы закулисную сторону театра*.

2. Признав, что каждое явление окружающего нас мира, как бы запутанно оно ни казалось, будет ли то извержение вулкана с бесчисленным множеством ручейков лавы и вспыхивающих огоньков, или облака с их причудливыми формами, вполне обусловливается предшествующими причинами. Признав этот основной постулат, необходимый для рационального познания природы, научная мысль тем самым уничтожила понятие о случае, противоречащее непреложным и необходимым законам природы.

Если всякое явление происходит по строгим законам необходимости, то случая нет, и не может быть. То, что мы называем случаем, есть случай только для нас, случай только потому, что мы не можем выяснить все причины, производящие и строго определяющие то событие, которое нам представляется случайным. Ещё стоики в споре с эпикурейцами высказывали такой взгляд на случай, но с особенной определительностью он был выражен Спинозой (*Этика*, предл. 33, схол. 1) в словах

Явление считается случайным только вследствие недостаточности наших познаний.

Лаплас [1814] говорит: *Мы должны рассматривать настоящее состояние вселенной* [...].

Того бесконечного совершенства, о котором говорит Лаплас, никогда не достигнет ограниченный ум человека. Притом мы сталкиваемся на каждом шагу с событиями, строгую определённость которых признаём, но факторы которых настолько сложны и независимы между собой, что мы не можем даже мечтать о возможности подвергнуть все факторы вычислению и таким образом предсказать как произойдёт событие.

Перед нами кубическая кость, на её гранях изображены цифры от единицы до шести и кость бросается. Спрашивается, на какую из шести граней упадёт она при своём падении? Как все явления в мире происходящие, так и это явление вполне определённое. Великий геометр, о котором мечтал Лаплас, мог бы подвергнуть вычислению все движения руки бросающего, все течения в воздухе и пр. и, составив математические уравнения движения всех атомов костей, решит априорно на какую грань она упадёт. Для нас явление падения кости на ту или иную грань есть и останется случайным. Всегда останутся для ограниченного человеческого ума случайными все те явления, которые можно объяснить только совпадением двух явлений, принадлежащих двум совершенно различным рядам. В тяжёлую, горькую минуту жизни вдруг появившееся из-за облаков Солнце снова придаёт душе бодрость и энергию. Явление, совершившееся по законам небесной механики и метеорологии, придало силу тем психологическим мотивам, которые легко могли бы уступить место противоположным.

Надолго останутся случайными все те явления, которые по их сложности и запутанности представляют большие затруднения для объяснения. К их числу принадлежат явления общественные, и, хотя в меньшей степени, явления, происходящие в нашей земной атмосфере и обусловливающие погоду.

Таким образом, хотя для современной научной мысли в объяснении мира нет случая как понятия, противоречащего закону и необходимости, но со случайными явлениями ей всегда придётся иметь дело вследствие ограниченности наших знаний. Зависимость случая от большей или меньшей степени знания выяснится ещё более, если заметим, что чем более по своей простоте разработана известная область знания, тем менее в ней места случаю. И появление кометы иногда, и солнечное или лунное затмение всегда могут быть предсказаны. Напротив, в тех отраслях науки, в которых, как в метеорологии, биологии, социологии, общие законы не найдены, где мы далеки от истинного знания, область случайных явлений особенно обширна.

Здесь мы редко в состоянии безошибочно утверждать, что то или другое событие необходимо произойдёт. Через две или три недели вскроется река, – никто не может предсказать[7]. Ни один политик, ни один экономист не в состоянии безошибочно предсказать тот или иной исход сколько-нибудь сложного сплетения политических или хозяйственных обстоятельств данного исторического момента. Слова короля Фридриха Второго

Его величество случай на три четверти управляет делами этого мира

надолго останутся имеющими значение. Тем важнее для понимания мира, тем более мы должны ценить всякий научный метод, который может повести к открытию законов в причудливых и подчас ужасных чудесах случая.

3. Тот типический пример случайного события, который мы привели (падение кости) позволит нам уяснить себе путь, которым мы должны следовать для того, чтобы найти какую-нибудь правильность и законность в случайном явлении. Среди причин, вполне определяющих падение кости на ту или иную грань, одни – движение руки, бросающей кость, течения в воздухе – меняются от одного падения до другого. Другие же – состав и вид кости – остаются неизменными. Мы можем априорно предвидеть, что при большем числе падений кости должна проявиться та правильность, которую мы ищем. Влияние причин неизменных (форма и состав кости) должно при увеличивающемся числе бросаний проявляться сильнее и сильнее, так как переменные причины взаимно нейтрализуют друг друга, отклоняя кость то в одну, то в другую сторону. И если кость симметрична и однородна, то при её падении, повторяющемся, скажем, шесть тысяч раз, число падений на грань, обозначенную определённой цифрой, должно будет составить приблизительно тысячу, т. е. шестую часть общего числа падений.

Но это общее априорное заключение должно быть подтверждено научно, притом оно само поднимает массу вопросов. Как велико должно быть число падений для того, чтобы обнаружилась искомая правильность? Какое отклонение от точной шестой части числа падений допустимо вследствие переменных причин, и какое отклонение должно указывать нам на несимметричность кости, на её бОльшую наклонность падать на ту, а не на другую грань?

В оба вопроса входит слово *число*. Это одно уже указывает нам, что наука, которая может ответить на заданные вопросы, должна быть отраслью учения о числах, чистой математики. Такая наука и была создана в XVII в. Она родилась, по известному выражению Кетле, у игорного стола. Играли в кости два игрока, выигрывал тот или другой, смотря по тому, какое из двух указанных ими чисел повториться первым при бросании кости, например, шесть раз. Игра должна была прерваться по причине, не зависящей от игроков, в момент, когда одному из игроков не доставало двух падений на эту цифру, другому – одного. Как безобидно разделить в этом случае ставку между двумя игроками? Такова была задача, предложенная одним из игроков в 1654 г. Паскалю и послужившая толчком к выработке оснований новой ветви знания, математической теории вероятностей.

В основании этой науки лежит понятие о математической вероятности [и ожидания]. Чтобы выяснить его, возвратимся к нашей кубической кости. Хотя мы не можем предсказать, что произойдёт при её падении, на какую грань она упадёт, но отсюда не следует, чтобы мы ничего не знали о нашей кости. Мы знаем, что у кости шесть граней, что она непременно упадёт на одну из них. Верим, что кость не подделана, и что при работе над ней были приняты все меры для того, чтобы она вышла сколь возможно симметричной и однородной. Поэтому для нас равновозможными представляются и падение кости на грань, обозначенную цифрой 1, и на грань с цифрой 4.

Равновозможными представляются шесть различных случаев, из которых один должен непременно произойти. Представьте себе теперь кость в виде призмы с 12 равными гранями, на которых изображены цифры 1, 2, …, 12. Для нас ясно, что падение кости на грань, обозначенную цифрой 1, теперь менее вероятно, чем в случае кубической кости, так как теперь вместо шести равновозможных случаев мы имеем 12, и из них только в одном выходит намеченная цифра. Но если бы эта цифра была написана на нескольких гранях, её появление было бы более вероятным. Таким образом, чем больше число всех возможных случаев, тем менее возможным представляется событие; чем больше число случаев, при которых оно может произойти или число благоприятных случаев, тем более вероятным оно представляется.

Поэтому математической вероятностью называется отношение между числом случаев, благоприятных известному событию, и числом всех возможных случаев, предполагая, что все они равно возможны. Она равняется 1/6 для падения кубической кости на цифру 1 и 1/12 для падения двенадцатигранной призмы на эту цифру[8]. Она равна 3/5 для выхода белого шара из урны, в которой лежат три белых и два чёрных шара.

Пренебрегая числом билетов, вышедших в тираж, мы найдём вероятность выиграть при каком-либо тираже, имея один билет одного из внутренних займов, равную 0,0003, т. е. одинаковой с вероятностью вынуть белый шар из урны, в которой их три на 9997 чёрных. Она меньше, например, вероятности того, что, вынимая последовательно две карты из колоды, мы вынем как раз две заданные заранее карты.

Если при каждом возможном случае происходит известное событие, то оно перестаёт быть случайным и становится достоверным. Но тогда число случаев, благоприятных событию и число всех возможных случаев равны, отношение между ними равно единице, почему математическая вероятность равная единице считается символом достоверности.

Может показаться, что подобные вычисления имеют очень мало значения. Какая польза знать, что вероятность падения кости на грань, обозначенную цифрой 1, равна 1/6, если мы знаем, что непременно случится одно из двух событий: или она падёт на эту грань, или нет. Какое отношение имеют все эти вычисления вероятности, иногда с большой тратой времени, к действительности? Не замешана ли тут только дурная привычка математиков, – всюду требовать чисел и всюду вводить их?

Я постараюсь показать теперь, что вычисления математической вероятности имеют очень большое значение и что эта вероятность может и должна проявиться в действительности. В самом деле, при её вычислении, например, при падении кости, мы принимаем во внимание главную и постоянную причину, действующую при каждом её падении, её форму, но не принимаем во внимание все остальные причины, изменяющиеся от одного падения до другого. Поэтому мы должны априорно предвидеть, что математическая вероятность должна проявиться при весьма большом числе испытаний как выражение неизменной причины среди множества переменных, действующих то в ту, то в другую сторону и потому взаимно уравновешивающихся[9]. Но как именно проявится математическая вероятность при большем числе испытаний – вот задача, которая в течение 20 лет подряд была предметом неустанной работы мысли знаменитого Якова Бернулли[10]. Настойчивость великого ума привела к доказательству знаменитой теоремы, составляющей важнейший результат теории вероятностей и носящей название *теоремы Якова Бернулли или закона больших чисел*.

На основании этой теоремы мы можем указать с вероятностью, которую можно сделать сколь угодно близкой к единице, те пределы, между которыми должно заключаться число повторений известного случайного события при большем числе испытаний. Теорема говорит, что число повторений события не может значительно отклониться от произведения числа всех испытаний на вероятность события, и указывает пределы отклонения[11].

Для выяснения теоремы Бернулли необходимо привести по крайней мере один численный пример. Мы возьмём самый простой пример случайного события: падение монеты на орла или на плату[12]. Бросаем монету 100 раз. По теореме Бернулли весьма вероятно, что число падений, например, на орла будет заключаться между числами 33 и 67. Отклонение действительного числа падений от половины 100 не превышает 17. Вероятность такого предсказания так же велика, как вероятность предсказания, что лицо, имеющее один билет выигрышного займа, не выиграет ничего в предстоящем тираже.

Предсказание может не осуществиться: лицо может выиграть, число падений монеты на орла может быть больше 67 или меньше 33. Но как ни один здравомыслящий человек не станет изменять своей жизни или делать какие-нибудь распоряжения и лишние траты в предвидении выигрыша, так и мы можем считать почти несомненным и основывать наши расчёты на убеждении, что число падений монеты на орла будет заключаться в пределах 67 и 33.

Если мы увеличим число бросаний монеты в 100 раз, т. е. будем бросать её 10 000 раз, то опять с той же самой вероятностью, не выиграть, имея один билет, мы сможем утверждать, что число падений на орла будет заключаться между пределами 5175 и 4825, т. е. отклоняться от половины 10 000 на 175. Увеличим число бросаний ещё в 100 раз […].

Сопоставим теперь два ряда полученных нами чисел. Числа бросаний монеты у нас были 100, 10 000, 10^6, 10^8, наибольшие же отклонения, допустимые с вероятностью не выиграть в тираже, были 17, 175, 1750 17 500, т. е. если и возрастали, то гораздо медленнее, последовательно увеличиваясь в 10, а не в 100 раз. Это обстоятельство имеет громадное значение. Ясно, что если мы будем рассматривать не абсолютные цифры отклонений, а их отношения к общему числу испытаний, то получим всё меньшие и меньшие дроби. Наибольшее отклонение при 100 испытаниях не превышает 17% общего числа испытаний; при 10 000 оно уже не превышает 1,7% […].

По мере увеличения числа бросаний монеты отношение числа её падения на орла к общему числу падений стремится к дроби 1/2, т. е. к вероятности падения на орла. Но отношение отклонения числа подобных падений от точной половины общего числа падений делается всё меньше и меньше и может быть сделано менее сколь угодно малой дроби. Отсюда вытекает такое замечательное следствие.

Если мы будем последовательно производить два ряда бросаний монеты, заключающий каждый весьма большое число таких бросаний, то сможем ожидать поразительной правильности. Отношения числа падений на орла к общему числу падений будут почти равны, и чем больше будут числа испытаний, тем ближе к равенству будут эти отношения.

Во всех случайных явлениях, происходящих от совокупности многих причин, как постоянных, так и переменных, мы замечаем эту правильность, которая и составляет *закон случайных явлений*, априорно посредством математического анализа доказываемый в математической теории вероятностей[13].

Большие числа поправляют случай и наблюдения над большим числом явлений[14]. Массовые наблюдения, как часто говорят, открывают нам правильность там, где с первого взгляда её быть не может. Закон больших чисел иногда иллюстрируют следующим прекрасным сравнением. Дождь, падая на горизонтальную полированную поверхность, смочит все плиты равномерно. Каждая капля падает самостоятельно от других и случайно. Могло бы, казалось, случиться, что на ту или другую из плит не попадёт ни одной капли, или очень мало, однако, этого никогда не случится. Такова сила больших чисел.

Экспериментальная проверка закона больших чисел занимала, между прочим, знаменитого натуралиста Бюффона. Взявши монету, он бросил её 4040 раз и получил 2048 орлов и 1096 плат[15]. Ему же принадлежит осуществление квадратуры круга посредством бросания иголки на ряд параллельных линий. В выражение математической вероятности пересечения иглой одной из параллельных линий входит архимедово число [архимедова постоянная] π. При большом числе испытаний отношение числа повторений случайного события [пересечения линии] к общему числу испытаний стремится к вероятности. Следовательно, стОит с терпением бросить иголку большее число раз, отмечая, сколько раз она пересечётся с одной из параллельных линий, и можно будет найти приближённое значение числа π.

4. Значение теоремы Бернулли не ограничивается тем, что она доказывает априорную необходимость правильности в повторении случайных событий. Она даёт, кроме того, возможность проверять верность предположений относительно вероятности всякого случайного события. Понятие о математической вероятности такого события заключает в себе субъективный элемент. Говоря, например, об определении математической вероятности падения кости на ту или другую грань, мы выразились:

Мы верим, что при работе над костью были употреблены все усилия, чтобы сделать её симметричной и однородной.

Но как бы ни был искусен мастер, никогда нельзя утверждать, что кость сделана действительно из абсолютно однородного материала, и что её центр тяжести совпадает с геометрическим центром. Поэтому, считая вероятность падения кости на ту или иную грань равной 1/6, мы несомненно делаем ошибку и вычисляем только первое приближение. На деле кость всегда несколько несимметрична и неоднородна и вследствие этого имеет бОльшую наклонность падать на одну грань, чем на другую.

Это проявляется на опыте, так как действительные падения кости, конечно, не могут зависеть от нашей веры в её симметричность и однородность. Поэтому, если при 60 000 бросаниях кости отклонение от одной шестой для известной грани больше, чем то, которое допускается теоремой Бернулли, то мы имеем право с известной вероятностью заключить, что наша математическая вероятность неточна и заменить её другой, *объективной вероятностью* или возможностью[16].

В случае падения кубической кости можно априорно вычислить хотя бы приближённую величину математической вероятности. В гораздо большем числе случаев такая вероятность не может быть вычислена, но, производя опыты или наблюдения, мы по числу повторений случайного события можем вычислить его объективную вероятность.

Вероятность для 18-летней девушки выйти замуж в течение двух лет за 25-летнего не может быть, конечно, вычислена априорно. Но если мы припомним, что по теореме Бернулли

При весьма большом числе испытаний отношение числа повторений к числу испытаний стремится к вероятности события,

то для определения искомой вероятности следует получить список весьма большого числа 18-летних девушек и числа тех из них, которые в течение двух лет вышли замуж за 25-летних. Частное от деления […]. Данные хорошо разработанной итальянской статистики отвечают нам на этот вопрос, как и на многие другие. Они говорят, что искомая вероятность равна 0,0099[17]. Какую бы комбинацию возрастов жениха и невесты не взяли, по данным статистики можно определить соответствующую вероятность.

Подобным же образом могут быть определяемы объективные вероятности и других событий. Возьмём, например, несколько страниц какого-нибудь писателя, сосчитаем число всех букв и число встретившихся *а*. Отношение между числом встретившихся букв *а* и общим числом всех будет объективной вероятностью того, что первая, случайно попавшаяся на странице буква, будет именно *а*.

Возьмём другие страницы того же или другого русского писателя и на основании закона больших чисел мы найдём почти те же дроби для объективной вероятности появления той же буквы. И литературное произведение, и газетная статья, и научный трактат, если они написаны на одном и том же языке, дадут при большем отрывке один и тот же результат. Фонетические законы языка остаются одинаковыми для различных авторов, и потому объективные вероятности звуков[18] в одном и том же языке будут иметь одинаковые значения, из какого отрывка они бы не выводились. Но для другого языка объективные вероятности появления тех же звуков получат иное значение. Разработанная на этих началах фонетическая статистика, применённая строго научно, может охарактеризовать каждый данный язык системой чисел, дать прекрасный метод для сравнения его с другими языками. Первые попытки в этом направлении были произведены в сороковых годах Ферстиманом[19] над языками греческим, латинским, готским и санскритом, но с тех пор на этот предмет филологи мало обращали внимания.

5. Теория вероятностей родилась у игорного стола и в течение довольно значительного времени её предметом продолжали быть азартные игры: орлянка, игра в кости, различные виды игр в карты. Но великие учёные XVII и XVIII веков, разрабатывавшие эти приложения теории вероятностей, видели в комбинациях, представляемых азартными играми, лишь предлоги для усовершенствования методов науки. Ещё Паскаль понимал, что ветвь знания, которой он и Ферма полагали начало, имеет многоразличные применения к всевозможным случайным явлениям и в теории вероятностей[20], [а именно разработку] геометрии случая. Скоро действительно перед теорией вероятностей открылось обширное поле самых важных приложений, как в общественных, так и в научных вопросах.

Одним из первых приложений теории вероятностей было решение вопроса, который в XVIII в., столь богатом войнами, мог интересовать не одну жену офицера или солдата, не отличавшуюся верностью классической Пенелопы[21]. Это определение срока, после которого без вести пропавший муж мог считаться мёртвым, а его жена могла, не подвергая себя известному гамлетовскому упрёку, наложить на себя новые брачные узы[22].

За этим первым приложением последовали многие другие: к страхованию жизни, от огня и т. п. Явились как всегда и увлечения: теория вероятностей привлекалась, например, к определению вероятностей судейских приговоров, решений законодательных собраний и т. п[23].

В настоящее время всё более и более выясняется то громадное значение, которое в области научных вопросов принадлежит основанному на теории вероятностей статистическому методу, а в практической жизни страхованию от бедствий, происходящих от случайных событий[24].

На теории вероятностей основывается статистический метод. Его техника вырабатывается постепенно в особую ветвь знания, в особую науку, математическую статистику. Эту науку можно рассматривать как ветвь логики, изучающей все методы, которыми человеческий ум пользуется для приобретения новых истин.

Так как все методы теории вероятностей основываются на законе больших чисел и не имеют никакого значения, если будут относимы к небольшому числу испытаний[25], то и статистический метод нуждается в массовых наблюдениях для правильности своих выводов. Только большие числа устанавливают известную правильность в повторении случайных событий; только имея в статистических таблицах данные относительно большого числа однородных случайных событий, мы можем выводить их объективные вероятности. Пользуясь формулами теории вероятностей, мы можем при изменении отношений между числом повторений события и общим числом испытаний судить о том, изменились ли главные причины, проявляющиеся в событии. Ведь возможно, что замеченное изменение упомянутого отношения не выходит за пределы, допустимого самим характером случайного события, которое зависит также и от постоянно меняющихся случайных причин.

Может ли, другими словами, рассматриваемое случайное событие быть уподоблено типическому случайному событию, например, выходу шаров белого цвета из урны, заключающей в себе неизменяющееся в течение всех испытаний число шаров разного цвета?

Сравнение статистических рядов в том виде, в каком они даются наблюдениями, с таким типическим случайным событием, с постоянной объективной вероятностью, приводит к интересной классификации этих рядов, идея которой пришла в семидесятых годах почти одновременно двум учёным, германскому политико-эконому Лексису и французскому математику Дормуа. Применяя математический критерий, вытекающий из формул теории вероятностей, к различным статистическим рядам, они нашли, что все статистические ряды могут быть отнесены к трём различным категориям.

В первую категорию входят все те ряды, в которых отклонения следуют тому же закону, которому они следуют в типических случайных явлениях с постоянной объективной вероятностью. Такие статистические ряды Лексис называет обладающими нормальной дисперсией (рассеянием). По Дормуа, для них известное отношение, которое он называет коэффициентом [дивергенции, т. е.] расходимости [КР], равно 1[26].

В рядах второй категории, напротив, отклонения значительно больше, как будто бы в этих явлениях действовала какая-то возмущающая сила, постоянно изменяющая объективную вероятность явления. Такие числа получались бы при выходе шаров из урны, если бы в неё время от времени подсыпались то белые, то чёрные шары. Это ряды со сверхнормальной дисперсией, КР для них больше единицы, и чем он больше, тем сильнее влияние пертурбационных причин, изменяющих объективную вероятность явления.

Наконец, в массовых явлениях третьей категории действует регулирующая сила, направляющая их к большему постоянству, слаживающая и уменьшающая их отклонения. Это ряды с дисперсией ниже нормальной, и КР для них меньше единицы.

Особенно интересный пример рядов с нормальной дисперсией представляет ряд из отношений между числом рождений младенцев мужского и женского пола. Это отношение отличается изумительным постоянством по годам, по временам года, по странам, и может быть приблизительно выражено числом 1063:1000. Это поразительное постоянство опровергает различные теории, объясняющие пол рождающего младенца то той или другой разностью в годах отца и матери (теория Hofacker-

Sadler), то различием питания организма матери во время беременности. Действительно, разность между годами брачующихся варьирует по странам довольно резко и представляет ряд со сверхнормальной дисперсией. Питание женщин варьирует[ся] в одной и той же стране по годам, отношение же между числами рождений мужского и женского пола остаётся поразительно постоянным.

Интересно, что такое же постоянство обнаруживается, как показали исследования ботаника [К. А.] Гейера [Geyer, 1809 – 1853] над коноплёй и над Mercurialis annua, также и у двудомных растений. Гейер, независимо от Лексиса, пришёл к выводу, что это постоянство всего лучше объясняется тем, что уже семенные клетки различаются по их полам. Замечательно, что у Mercurialis annua те клетки, из которых произойдут мужские организмы, находятся почти в том же отношении к клеткам, из которых произойдут женские, как и у людей, в отношении 1059:1000. У конопли это отношение обратное: число семенных женских клеток превышает число мужских в отношении 1150:1000.

Рядами с нормальной дисперсией являются также большинство рядов криминальной статистики. Отношение числа осуждённых французскими Cours d'assises к населению отличается весьма большим постоянством: КР равен только 6. Так же малы КР для отношения числа приговорённых женщин к общему числу приговорённых (2,3), для отношения холостых преступников общему числу преступников (3), для отношения преступников в возрасте от 21 до 30 лет к общему числу преступников (1,75), для отношения числа безграмотных преступников к их общему числу (5).

Несколько больше КР для отношения числа самоубийств к населению, так как и абсолютное и относительное число самоубийц увеличивается.

Большое число примеров рядов со сверхнормальной дисперсией представляет нам демография. Для отношения числа рождений к населению КР равен 32; для отношения числа браков к населению, 25; для отношения числа смертей к народонаселению, 86. Большая величина последнего КР объясняется эпидемиями, войнами, неурожаями.

Сверхнормальную дисперсию представляет также отношение числа выздоравливающих от эпидемий к общему числу заболевших. Это обстоятельство находится, очевидно, в связи с большей или меньшей силой эпидемии. Напротив, в случае тех болезней, где выздоровление зависит преимущественно от ухода, мы должны получить ряды с нормальной дисперсией, и Физмер действительно получил для процента выздоравливающих от пневмонии такой ряд.

Если эпидемии, войны, неурожаи играют роль причины, возмущающей правильное действие закона больших чисел, как бы подбрасывающей чёрные шары в урну, то законодательство, напротив, часто играет роль регулирующей причины, и потому примеры ниже-нормальной (поднормальной) дисперсии мы преимущественно встречаем в тех статистических рядах, на которые оказывает влияние законодательство.

6. Статистический метод, как видно из предыдущих примеров, может быть применён к различным отраслям знания. Но как ни разнообразны могут быть приложения статистического метода, есть одна область явлений, где статистический метод является незаменимым, единственным методом, дающим точные числовые данные. Это область общественных явлений.

Метеорология может ещё мечтать об априорном математическом решении задачи о направлении ветров и океанических течений на земном шаре, сплошь покрытом водяной оболочкой и окружённом атмосферой. Но область запутанных явлений общественной жизни настолько сложна, что здесь приложение математики представляется нам трудно осуществимым.

Увлечение математическим методом составляло характеристическую черту XVIII в., поражённого созданием небесной механики, и Кондорсе мечтал

Осветить политические и нравственные науки светочем алгебры[27].

Но ещё тогда это увлечение было осмеяно аббатом Галиани в одном из остроумнейших сочинений того века [Galliani (1770)]. Теперь это увлечение прошло. Только в политической экономии мы видим попытки приложить математический метод к тем специальным её частям, которые трактуют об обмене и о денежном обращении. Громадная сложность явлений общественной жизни затрудняет их изучение дедуктивным математическим методом. Зато невозможность опыта делает особо драгоценным статистический метод, а вместе с ним оказывается необходимой отрасль математики, математическая статистика, как строгий страж точности полученных результатов.

Совокупность результатов, полученных для науки об обществе с помощью статистического метода или метода массовых наблюдений, составляет особую ветвь знания, которую обыкновенно называют статистикой, хотя было бы правильнее назвать её социальной статистикой[28], подобно тому, как уже существует медицинская статистика и может существовать фонетическая статистика.

Из сказанного выше о цели массовых наблюдений всякого рода видно, что конечная цель социальной статистики должна заключаться в том, чтобы из наблюдений над массами однородных общественных явлений, во-первых, вывести числовые данные, характеризующие частоту появления известного социального явления (брака в том или ином возрасте, самоубийства, кражи со взломом); во-вторых, изучить изменяемость этих числовых данных.

Последняя и самая важная цель статистики состоит в том, чтобы проникнуть насколько возможно в причинную связь между различными явлениями общественной жизни. Статистика может сделать это, группируя известным образом свои данные, и изолируя, таким образом, одну из причин и выставляя её значение для рассматриваемого социального явления. Так, для того, чтобы выяснить зависимость самоубийств от возраста, она должна распределить данные относительно самоубийств по возрастам[29].

Говоря языком математической теории вероятностей, мы должны сказать, что цель социальной статистики должна состоять в том, чтобы охарактеризовать общественный организм возможно бОльшим числом объективных вероятностей, и, путём сравнения различных социальных организмов, вывести числовые связи, существующие между объективными вероятностями различных явлений. Так, в физике каждое простое или сложное тело характеризуется системой физических постоянных (атомный и удельный вес, показатель преломления и пр.). Чем больше мы знаем таких физических постоянных для физического тела, тем ближе мы знаем самоё тело; чем больше числовых связей (функциональных зависимостей) нами найдено, тем больше мы знаем физических законов.

Не с одними постоянными отношениями встречается социальная статистика. На всяком шагу в ней замечаются и такие ряды, которые Лексис называет эволюторными[30]. Пример представит во всякой прогрессирующей стране ряд, составленный из годовых цифр лиц, получающих образование и т. п. Во всех этих рядах замечается уже не постоянство, а тенденция изменяться в том или другом направлении.

Но и те ряды, которые представляют поразительное постоянство, заставившее Кетле говорить об определённом бюджете преступников, который платит всякое общество, на деле также подвергаются *вековым неравенствам*. Фаталистическое воззрение Кетле и прочих последователей *математической школы* в статистике[31] уступает место другому воззрению, которое рассматривает всякую вычисляемую статистикой объективную вероятность как продукт всего общественного строя, изменяющейся вместе с изменением самого строя.

Место социальной статистики в ряду других общественных наук легко определится, если мы будем исходить из предложенного Контом разделения социологии (науки об обществе) на абстрактную и конкретную.

Абстрактная наука об обществе, изучающая законы об общественности вообще, которые были бы получены путём отвлечения от конкретных общественных организмов, ещё не существует. Все существующие теперь общественные науки (наука о хозяйственных отношениях или политическая экономия, история прагматическая, история культуры, история права) суть части конкретной социологии потому, что все они изучают существующие или существовавшие общества и государства. Социальная статистика составляет часть той же конкретной социологии, но между тем, как другие науки отличаются между собой по предметам исследования (право, хозяйство, литература), социальная статистика отличается от них по методу. По предмету исследований она так же обща, как сама наука об обществе, так как в круг её исследований одинаково входит и важнейшие явления физиологической жизни отдельного человека, и явления хозяйственной жизни, и, наконец, те явления, которые обусловливаются разумно-нравственной стороной человеческой природы.

Этим различным сторонам человеческой деятельности соответствует разделение статистики на три главные отдела: демография или статистика народонаселения (наиболее разработанная и наиболее пользующаяся помощью математического анализа часть статистики); экономическая статистика; и статистика моральная или культурная, изучающая повторяемость преступлений, самоубийств, деятельность школы, благотворительности, поскольку она проявляется в числовых данных.

Совпадая по своему предмету с другими частями общественной науки, социальная статистика отличается от них по методу. Мы видели, что этот метод заключается в том, чтобы из наблюдений над массами явлений вывести известные числовые постоянные, характеризующие данный социальный организм, и, пользуясь вспомогательными формулами теории вероятностей, отличить при изменении этих числовых постоянных те, которые происходят от случайных причин, от тех, которые указывают на изменения в строе самого организма.

В этом числовом методе преимущество и сила статистики сравнительно с другими частями общественной науки, и поэтому она может развиваться, только постоянно опираясь на указания науки о числах, чистой математики. Только опираясь на указания теории вероятностей и основанной на ней математической статистики, социальная статистика может не делать тех ошибок, которых не лишена её история. Статистики должны научиться у астрономов и физиков, каким образом, только постоянно прибегая к помощи чистой математики, можно открывать вековые неравенства в отношениях, кажущихся постоянными, и от эмпирических законов, соответствующих законам Кеплера, перейти к истинным законам природы, типом которых является великий закон всемирного тяготения[32].

7. Но как ни велика, как ни важна роль статистики как части общественной науки, она неизбежно нуждается в дополнении. В самом деле, что даёт нам, например, так называемая моральная статистика? Она указывает, например, число самоубийств, изменение чисел по временам гола, по родам самоубийства, наводит на интересные и важные мысли. Но для психологии самоубийства, для выяснения той связи, которая существует между жизнью общества и фатальным поступком самоубийцы, она не даёт почти ничего. Она не вводит в психологический мир самоубийцы, так как принуждена соединять все самоубийства независимо от психологических мотивов в одну цифру. Для неё по необходимости целомудренный, одарённый нежной чувствительностью Вертер [Гёте (1774)], лишающий себя жизни из-за любви к Шарлотте, и пресыщенный страстями и наслаждениями Ролла фигурируют в статистической таблице как однородные единицы.

Вот почему статистика необходимо нуждается в дополнении. Мы только тогда поймём известное явление жизни человека, когда познакомимся не только с его психологией, но и с психологией и жизнью той среды, в которой он жил и развивался.

Человеческие документы (вроде дневника Башкирцевой[33]) являются лишь в виде исключений. Их может заменять и действительно заменяет психологический и социологический роман новейшего времени. Эту мысль с особенным увлечением развивал один из представителей современного реалистического романа Эмиль Золя. Он пишет в [статье] *Экспериментальный роман* от лица всех реалистов:

Мы указываем механизм полезного и вредного; мы раскрываем детерминизм человеческих и общественных явлений, чтобы впоследствии можно было овладеть ими и направлять эти явления.

Романист сравнивается с естествоиспытателем, производящим опыты. Конечно, есть доля увлечения в этих мыслях автора *Жерминаля* и *Денег* [1885, 1891]. Прекрасную критику этих мыслей даёт Гюйо в своём недавно (1891) переведённом на русский язык сочинении. Он совершенно справедливо указывает на то, что опыт романиста только с большой натяжкой можно уподобить опыту естествоиспытателя. Опыт последнего производится в природе, опыт первого, в мозгу романиста. Но каковы бы ни были увлечения Золя, нельзя не признать известной доли правды в его взглядах, а следовательно высокого общественного и в известной степени научного значения современного романа.

Основной принцип всякого научного мышления, по которому всякое явление должно вполне определяться его причинами, оказывает всё большее и большее влияние и на литературу. Роман во вкусе Дюма, основанный на эффектах и случайностях, в котором развязки являются как бог из машины, уступил место роману, в котором всякий поступок действующих лиц является следствием определяющих его причин: наследственности, воспитания, влияния среды физической или социальной. Составляя необходимое дополнение статистики, роман не является в то же время её антитезой. Он имеет со статистикой многие общие черты, которые обнаруживает его важное значение.

Статистика, классифицируя известным образом собранные ей факты, преследует цель исключить влияние некоторых причин, производящих известное явление социального мира, и изучить таким образом только влияние остальных. Роман же всегда преследует цель изолирование одной из причин. Подобно тому, как сложные портреты Гальтона[34] доставляют общие типические черты лиц известной расы или профессии, романист всегда рисует нам тип. Черты Плюшкина или Чичикова, рассеянные в разных индивидуумах, сконденсированы великим основателем русского реального романа в типические, ярко возникающие перед нами образы. Притом роман ставит тип или характер в обстановку, где его основные черты могут развиться и обнаруживаться в той степени, в которой они редко развиваются в действительной жизни, где случайности постоянно нарушают логику событий. Гюйо говорит:

Действительная жизнь и конкретная история наполнены недоконченными мыслями, разбитой волей, сломанными характерами, неполными и изувеченными человеческими существами. В романе сокращается до крайней необходимости доля случайных происшествий, и в чертах, резко действующих на наш ум, обнаруживается связь известной причины с действием.

В *Ученике* Бурже читатель ясно понимает, как темперамент, воспитание и плохо понятая философия могли привести героя к постыдной мысли экспериментировать над живым существом[35]. Читая об Иудушке Головлёве у Салтыкова понимаешь, что такой тип мог вырасти только на почве крепостной России. Гюйо говорит:

Роман есть упрощённое и поразительное изложение социологических законов.

В каких бы дополнениях не нуждалась, однако, статистика, во всяком случае её развитие представляет громадную важность для развития социальной науки вообще. Она открывает для общественной науки новый неисчерпаемый источник истин, позволяет ей заменить абстрактные метафизические понятия, так долго господствовавшие в общественной науке, живой водой точного математического знания и даёт возможность при свете факела математического анализа разыскивать причинную связь между общественными явлениями.

Новейшие успехи математической статистики и косвенным образом начинают проявлять влияние на выработку новых методов исследования в политической экономии. До сих пор ещё идёт в этой науке оживлённый спор о том, какого метода она должна держаться, о том, есть ли политическая экономия дедуктивная наука, как учит классическая школа, или индуктивная, как смотрит историческая школа. Лексис, которому мы обязаны исследованиями о дисперсии статистических рядов, вносит и в спор о методах политической экономии новые и важные мысли, показывая в своём классическом сочинении *О французских ввозных и вывозных премиях*, как можно соединять дедукцию с индукцией и постоянным пользованием параллельно идущих статистических рядов достигает интересных выводов в изучении явлений хозяйственной жизни.

8. Данные, собираемые и обрабатываемые социальной статистикой, имеют не только важное теоретическое значение, не менее важно и их практическое значение. Ни одно мероприятие, касающееся той или другой из сторон общественной жизни, не может считаться достаточно обоснованным, если оно не опирается на хорошо собранные и серьёзно разработанные статистические данные. С другой стороны, без статистических данных невозможно было бы и то широкое развитие разнообразных страховых предприятий, которые мы видим в Западной Европе и Северной Америке, где образовался особый класс техников-вычислителей (актуариев), специальность которых состоит в обработке статистических данных и в вычислениях, необходимых для правильного ведения страховых операций.

Критические обстоятельства только что пережитого нами тяжёлого года должны, по нашему мнению, обратить внимание всех, интересующихся экономическими вопросами, на одну из форм страхования, страхования посевов от неурожая. Несомненно, что первенствующее значение в деле борьбы с бедствиями, подобно постигшему Россию в 1891 г., имеют экономические меры, поднятие техники сельского хозяйства, изучение климатических и почвенных условий и пр.

Но все эти задачи требуют для своего разрешения более или менее продолжительного времени. Неотложной представляется задача о лучшей организации продовольственного дела. Недостатки существующей у нас организации этого дела давно уже указывались всеми, кому приходилось по той или другой причине ближе всматриваться в его ведение на местах, в провинции. В настоящее время они сознаны уже всеми, и здесь не место перечислять их.

При предстоящей реорганизации этого дела нельзя будет, конечно, обойти и вопрос о применении к ней в той или другой степени идеи страхования, применение которой в борьбе с другими бедствиями принесло столько пользы. Поэтому, несмотря на все трудности, исключительно принадлежащие этой форме страхования (определение нормы страхуемого урожая в размере, не делающим выгодным понижение производительности труда; определение величины страховой премии в размере, который, обеспечивая достаточное количество пудов на десятину, в то же время не обременял бы земледельца новыми тяжёлыми платежами; устройство агентуры, вполне подготовленной к трудному делу оценки убытков от неурожая и пр.), вопрос о страховании посевов несомненно заслуживает серьёзной научной разработки. Её начало уже положено в труде Л. И. Грассом (1882).

Идея о страховании посевов получила уже практическое применение в Японии, она разрабатывается во Франции. В России, земледельческой стране, на идею страхования должно быть обращено такое же серьёзное внимание, какое выпало в странах промышленного типа на обеспечение промышленного рабочего путём страхования от бедствий, сопряжённых с болезнью, увечьем и пр. Изданию всем известных германских законов, устанавливающих обязательное государственное страхование промышленного рабочего, предшествовали замечательные исследования по математической статистике Цейнера, Кнаппа, Цилльмера[36] и др. Для нас столь же необходима научная разработка вопросов, связанных с сельским хозяйством, и в частности, как статистики урожаев, так и техники страхования посевов.

[9] Мы видели выше, как в первых фазисах развития человеческой мысли, ещё в туманной дали халдейской культуры, человек обращался к числам, и в их таинственных для него свойствах искал возможность проникнуть в тайны будущего и бороться со слепым случаем. Фантастические бредни халдейских мудрецов и пифагорейцев не достигли, конечно, цели.

Прошли тысячелетия. И теперь с каждым днём, с каждым новым шагом в развитии наук о природе и об обществе выясняется новая великая роль *числа*. Числа, цифры, которыми испещрены статистические и метеорологические таблицы[37], могут показаться, для не умеющих читать их, сухим и ненужным балластом, но для человека науки они – драгоценный материал, основываясь на котором наука стремится расширить наше понимание явлений природы и общественной жизни, и к числам же мы должны обращаться для того, чтоб на них основать те меры, которые должны избавить человечество в будущем от различных грядущих бедствий, каковы, например, неурожаи и многое другое, тому подобное.

Примечания

1. В древнегреческой мифологии Паллада или Афина вышла из головы Зевса.

2. Фалес Милетский (640/624 – 548/575 до н. э.), древнегреческий философ и математик.

3. Халдеи: древний народ, проживавший в Месопотамии.

4. Невольно сопоставляешь с этим древним заклинанием недавнее сообщение о чувашских жертвоприношениях по поводу неурожая, постигшего Поволжье. Приносят в жертву или быка с шестью овцами, или семилетнюю курицу, как будто семь и было то число, которое чуваши знают, говоря словами шумерского заклинания, для благополучного роста злаков. А. В.

5. Мойра, богиня судьбы в древнегреческой мифологии.

6. Автор упустил статистические законы природы. Он так и не упомянул эти законы в физике.

7. Подобное предсказание было возможно, если существовали длительные метеорологические наблюдения и данные о прошедшей зиме.

8. Двенадцатигранник также является правильным геометрическим телом.

9. При прочих равных условиях.

10. Не мог Я. Б. *непрестанно* двадцать лет думать о своей теореме.

11. Ниже автор оговаривается.

12. Обычно говорили (и возможно говорят и сейчас) *орёл или решка* (решётка).

13. Такого термина нет.

14. Неудачная фраза.

15. Монету подбрасывал какой-то мальчик. Бюффон экспериментально исследовал петербургскую игру (Шейнин 2013, §§ 4.3.4 и 7.1.4), а указанный автором (с незначительной ошибкой) результат был побочным. Чуть ниже он упомянул квадратуру круга, т. е. заведомо неудачную попытку *точно* выразить площадь круга площадью подходящего квадрата.

16. Объективная вероятность была введена в теорию вероятностей как противоположность субъективной, но в смысле автора всегда упоминалась статистическая вероятность.

17. Вероятность записана с явно фиктивной точностью. В приведённых им примерах приложения своей теоремы Яков Бернулли привёл случаи, в которых (как и здесь) теоретическая вероятность не существовала. Автор не указал этого обстоятельства.

18. Буквы стали звуками. А как с согласными буквами?

19. См. Förstemann (1852), также Knauer (1955). В заглавии статьи Фёрстемана указаны частично иные языки.

20. Теории вероятностей ещё не было.

21. Пенелопа, жена Одиссея (Гомер), символ супружеской верности.

22. О сроке, после которого безвестно отсутствующий объявляется умершим, см. Николай Бернулли (Шейнин 2013, § 4.3.2).

23. Это ошибка, см. Шейнин (2013, § 9.9.1).

24. Лишь в начале § 8 автор подробнее упомянул гораздо более распространённые виды страхования.

25. Математической статистике и теории ошибок приходится иметь дело с небольшим числом наблюдений. Более того, покойный член-корреспондент АН СССР Л. Н. Большев сказал нам, что иной раз есть только одно наблюдение. У нас создалось впечатление, что он имел в виду какие-то военные испытания.

26. О Дормуа см. [viii].

27. В 1742 г. Даниил Бернулли (Шейнин 2013, § 7.1.1) заявил, что если в политике будет проводиться столько же наблюдений, сколько в физике, то возникнет совершенно новая дисциплина. Чуть ниже автор упомянул Ф. Галиани (1770). О приложении теории вероятностей к нравственным наукам см. *Опыт* Лапласа (1814/1999, особо с. 848).

28. Термин *социальная статистика* применил во всяком случае Knapp (1871) в заглавии своей статьи.

29. При прочих равных условиях, ср. Прим. 9.

30. См. Лексис (1879/1968, § 6).

31. Утверждение автора о Кетле ошибочно, см. Шейнин (2013, § 11.5).

32. Законы движения планет эмпирически установил Кеплер, а Ньютон объяснил их своим законом всемирного тяготения.

33. Художница Мария Константиновна Башкирцева (1858 – 1884).

34. Мы бы сказали *составные* фотографии. На одну и ту же плёнку Гальтон снимал несколько человек, давая каждый раз намного более короткую, нежели полагалось выдержку. См. Pearson (1914 – 1930, т. 2, гл. 12).

35. П. Бурже. Первый русский перевод 1919 г.

36. См. Zeuner (1869), Knapp (1868, 1869, 1874) и Zillner (1861, 1883).

37. Несколько авторов резко возражали против тогдашней практики *публиковать* подробные метеорологические данные, а Менделеев (1876/1946, с. 267) заявил, что господствующей *собирательной школе* метеорологов нужны одни *числа и числа*, но позднее (1885/1952, с. 527) заметил, что зарождается новая метеорология, которая начала на основе статистического материала *понемногу обладать, синтезировать, предсказывать*.

Библиография

Бажанов В. А. (2002), Профессор В. А. Васильев. *Историко-математические исследования*, вып. 7 (42), с. 120 – 148.

Васильев А. В. (1885), *Теория вероятностей*. Казань.

--- (доклад 1900, не опубл.), О принципах теории вероятностей. Первый международный конгресс по философии, Цюрих.

--- (1913), Вопросы теории вероятностей до теории Якова Бернулли. СПБ. Оттиск. Указано Бажановым в основном тексте его статьи.

--- (1914), La bicentenaire de la loi des grande nombres. *L'Enseignement math*., t. 18; No. 2, pp. 92 – 97.

Грасс Л. И. (1882), *Страхование сельскохозяйственных посевов от неурожая*. Казань.

Менделеев Д. И. (1876), О температурах атмосферных слоёв. *Соч*., т. 7, с. 241 – 269.

--- (1885), Записка об учёных трудах А. И. Воейкова. *Соч*., т. 25, с. 526 – 531.

--- (1934 – 1952), *Сочинения*, тт. 1 – 25. М. – Л.

Пресс А. (1901), Страхование. *Энц. словарь Брокгауза – Ефрона*, т. 62, с. 736 – 782.

Шейнин О. Б. (2011), Случайность и необходимость. *Вопросы истории естествознания и техники*, № 2, с. 36 – 44.

Юшкевич А. П. (1968), *История математики в России до 1917 г.* М.

Förstemann E. (1852), Numerische Lautverhältnisse im Griechischen, Lateinischen und Deutschen. *Z. f. vergl. Sprachforschung*, Bd. 1, pp. 163 – 179.

Galiani F., Галиани Ф. (1770, франц.), *Беседы о торговле зерном*. Первое русское издание 1891. Недавнее издание 2012, Либроком. **Goethe J. W., Гёте И. В.** (1774, нем.), Страдания молодого Вертера. Большое число переводов.

Guyau J.-M., Гюйо Ж. М. (1889, франц.), *Искусство с социологической точки зрения*. Смоленск, 1891. Первый перевод на русский.

Knauer K. (1955), Grundfragen einer mathematischen Stilistik. *Forschungen u. Fortschritte*, Bd. 29, No. 5, pp. 140 – 149.

Knapp G. F. (1868), *Über die Ermittlung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Bevölkerungs-Statistik*. Leipzig.

--- (1869), Die Sterblichkeit in Sachsen etc. Tls 1 – 2. Leipzig.

--- (1874), *Theorie der Bevölkerungs-Wechsels*. Braunschweig.

Laplace P. S., Лаплас П. С. (1814, франц.), *Опыт философии теории вероятностей*. В книге Ю. В. Прохоров, редактор (1999), *Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия*. М., с. 834 – 863.

Lexis W., Лексис В. (1879, нем.) О теории стабильности статистических рядов. В книге Четвериков Н. С., составитель (1968), *О теории дисперсии*, с. 5 – 39. М.

Pearson K. (1914 – 1930), *Life, Letters and Labours of Fr. Galton*, vols 1, 2, 3A, 3B. Cambridge.

Zeuner G. (1869), *Abhandlungen aus der mathematischen Statistik.* Leipzig.

Zillner A. (1861), *Der mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Renten-Versicherungen*. Berlin.

--- (1883), *Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen e*tc. Berlin.

XI

Перепечатка

А. Л. Вайнштейн, Г. И. Ханин

Памяти выдающегося советского экономиста-математика Г. А. Фельдмана. К 10-летию со дня смерти

Экономика и математические методы, т. 4, вып. 2, 1968, с. 296 – 299

Планирование народного хозяйства, являющееся мечтой многих поколений философов и политиков, стало реальностью после Великой октябрьской социалистической революции в Советской России[1]. Уэллс говорил, характеризуя членов первого Советского правительства, что по количеству прочитанных книг они превосходят любой другой кабинет министров в мире[2]. Почётное место среди работников первого состава Госплана СССР занимали представители технической интеллигенции, которые принесли в плановую работу не только передовые идеи технического прогресса, но и присущую техническим наукам строгость и точность расчётов, высокую математическую культуру. Эти качества были особенно необходимы для создания новой науки – теории планирования народного хозяйства. В числе основоположников этой науки был и выдающийся работник первого состава Госплана СССР, Григорий Александрович Фельдман (1884 – 1958).

Он родился 27 августа 1884 г в Ростове-на-Дону и окончил два высших учебных заведения, одно в Германии, а другое, позднее, в России в 1912 г[3]. После окончания МВТУ он работал в качестве инженера-электрика сначала в Петрограде, затем в Москве, в частности помощником заведующего электроотделом ВСНХ. Именно этот отдел стал ядром группы учёных и инженеров, разрабатывающих план ГОЭЛРО. В материалах комиссии по составлению плана ГОЭЛРО среди участников неоднократно упоминается Г. А. Фельдман. Именно здесь он впервые столкнулся с проблемами народнохозяйственного планирования. Последняя работа Фельдмана до перехода в Госплан была на стыке его основной специальности инженера-электрика и экономикой: он был членом правления и президиума Электрокредита.

В феврале 1923 г. Фельдман по приглашению хорошо знавшего и высоко ценившего его Г. М. Кржижановского перешёл на работу в Госплан СССР. Экономикой как практической деятельностью Фельдман начал заниматься в 39 лет, и именно в это время и в этой области он создал свои наиболее значительные работы. В Госплане Фельдман работал в отделе конъюнктуры мирового хозяйства. Выбирая характер будущей работы, Фельдман учитывал не только знание иностранных языков (он хорошо знал три иностранных языка), но прежде всего возможность на основе анализа развития экономики передовых капиталистических стран выявить закономерности и факторы экономического роста.

В журнале *Плановое хозяйство* и специальных экономических сборниках начиная с 1924 г. периодически публиковались обзоры Фельдмана по хозяйственной конъюнктуре капиталистических стран, и прежде всего Германии и США. Эти обзоры показывают не только глубокое знание хозяйственного положения капиталистических стран (что свидетельствует о серьёзном изучении Фельдманом экономических вопросов задолго до поступления на работу в Госплан), но и стремление выявить определённые количественные взаимоотношения между экономическими величинами.

В это время Госплан всё шире разворачивает работы по составлению первых текущих (контрольные цифры) и перспективных планов. Теория планирования народного хозяйства рождалась одновременно с практической работой по составлению народнохозяйственных планов. Одной из наиболее трудных проблем, вставших перед составителями народнохозяйственных планов, было определение отправной точки, с которой следовало начать составление такого плана и особенно перспективных планов. Ряд учёных-экономистов и практических работников (в частности, председатель Госплана в 1923 – 1925 гг. А. Д. Цюрупа) высказывали мысль о том, чтобы в качестве исходного пункта для составления народнохозяйственного плана взять баланс народного хозяйства. Неясным, однако, оставалось, как практически использовать этот баланс в планировании. Крупнейшей заслугой Фельдмана является то, что он первый в плановой науке сумел правильно решить эту проблему и одновременно заложить основы нового направления в экономической науке, теории экономического роста.

Первые работы Фельдмана по теории экономического роста относились к сравнительному исследованию структуры и динамики народного хозяйства США и СССР за длительный период[4]. В ней Фельдман исследует динамику и структуру синтетических[5] показателей общественного производства: (показателей производственных фондов и народного дохода США) за длительный исторический период и устанавливает новый показатель эффективности общественного производства как отношения народного дохода к производственным фондам. Фельдман также рассматривает основные тенденции в динамике этих показателей и пользуется этим анализом для установления первых прогнозов развития экономики СССР вплоть до 1940 – 1941 гг.

Применение синтетических показателей в качестве факторов и характеристики результатов экономической деятельности в целях анализа эффективности общественного производства и прогнозов его развития являлось в то время новым инструментом экономического анализа. То, что этот метод возник в СССР, первой стране планового хозяйства, не является случайностью: развитие практики планирования настоятельно требовало выработки такого метода. За рубежом он появился позднее, после грандиозного экономического кризиса капиталистического хозяйства в начале 1930-х годов в связи с теорией экономического цикла Дж. Кейнса[6].

Указанные экономические исследования Фельдмана, опубликованные в 1926 г., не привлекли сколько-нибудь широкого внимания экономистов. Это можно объяснить тем, что развитие советской экономики носило ещё в основном восстановительный характер. Постановка и исследование теоретических проблем, связанных с необходимостью быстрого экономического роста в результате новых капитальных вложений, были ещё впереди.

Фельдман продолжал изучение проблем экономического роста и их приложения к планированию народного хозяйства. Следствием этого изучения явилась его крупнейшая работа *К теории темпов народного дохода*, представлявшая его доклад в комиссии по составлению генерального плана развития народного хозяйства СССР[7]. Это исследование показывает, как стремительно шёл научный рост Фельдмана, ещё пять лет назад работавшего инженером-электриком, а теперь представшего перед нами крупным исследователем проблем планового хозяйства.

Работа Фельдмана представляет собой сочетание глубокого качественного анализа экономических явлений с совершенным количественным анализом. Обосновывая необходимость применения математических методов в экономике, Фельдман написал в заключительной части исследования:

Предложенная нами система формул и метод анализа могут показаться чрезмерно сложными и трудно усвояемыми. Против такого взгляда мы считаем необходимым самым решительным образом протестовать. Нельзя представить <u>несложного метода</u> проектирования такого <u>сложного аппарата</u>[8], каким является народное хозяйство. С другой стороны, мы не знаем более совершенной формы анализа, чем математика […]. *Мы убеждены, что более или менее совершенное планирование народного хозяйства может быть осуществлено лишь на основе чётко математически формулированной теории. Только тогда споры по планам могут быть сведены к принципиальным установкам и целевым заданиям при полной уверенности в безошибочности расчётов*.

Это было сказано уже в 1928 г[9].

В работе *К теории темпов* … анализируются практически все главнейшие проблемы планирования динамики синтетических показателей, и по каждой проблеме Фельдман выдвигает обоснованную качественную характеристику и математическую модель. Особо важное значение имеют его модели, обосновывающие динамику развития экономики и соотношение между производством средств производства и предметов потребления. Эти модели Фельдмана на целые десятилетия опередили односекторные модели экономического роста Домара и двухсекторную модель Махаланобиса[10]. Теория экономического роста, основателем которой явился наш соотечественник Фельдман, занимает всё большее место в экономической теории.

Известный американский экономист Домар писал[11]:

Эти советские попытки были более разработаны, чем аналогичные попытки, сделанные на западе.

Это не значит, что западные экономисты позаимствовали свои концепции у Фельдмана. Эта выдающаяся работа, как, впрочем, и некоторые другие интересные и глубокие идеи русских экономистов, оставалась долгое время незамеченной, и только после отечественной войны она была открыта за рубежом и вызвала там огромный интерес (см. ниже).

В 1929 г. Фельдман публикует статью, в которой более популярно излагаются методы использования его концепции для перспективных плановых расчётов[12]. Концепция методологии плановых расчётов Фельдмана была положена в основу разработки генерального развития народного хозяйства СССР, которая проводилась комиссией Госплана под руководством Н. А. Ковалевского.

Первые результаты работы над генеральными планом на основе моделей Фельдмана были изложены в докладе Ковалевского 1930 г[13]. и в рукописи *рабочей гипотезы* генерального плана развития народного хозяйства СССР на 1930 – 1945 гг.

Дискуссия в Институте экономических исследований была первым серьёзным научным обсуждением концепции Фельдмана. Большинство её участников поддержало основную идею этой концепции, они же высказали и наиболее ценные критические замечания. Но некоторые участники дискуссии резко выступили против этой концепции, показав непонимание или нежелание понимать её смысл. Однако, если на дискуссии даже со стороны противников Фельдмана ещё господствовало научное обсуждение, то в последующий период в середине 1930-х годов в ряде органов печати (в частности, в газете *За индустриализацию*) было опубликовано много статей, в которых концепция Фельдмана подвергалась всё более тенденциозной критике. Выступление Фельдмана на этой дискуссии было его последним выступлением в печати.

Читатель статей Фельдмана 1928 – 1929 гг. и *рабочей гипотезы* генплана несомненно обратит внимание, что прогнозы Фельдмана – Ковалевского об изменении эффективности общественного производства на предстоящий период оказались чрезмерно оптимистическими. Общее объяснение этой ошибки состоит в том, что малый исторический опыт развития плановой экономики к этому времени ещё не давал достаточно материала для правильного определения тенденций эффективности общественного производства в плановой экономике.

Более непосредственная причина ошибки заключается, на наш взгляд, в следующем. При выявлении тенденций изменения коэффициента эффективности Фельдман, как и большинство современных исследователей, исходил из того, что восстановительный период закончился в 1926 г., а последующий период развития экономики отражал закономерности реконструктивного периода. Период 1927 – 1929 гг. характеризовался неуклонным ростом коэффициента эффективности общественного производства и Фельдман распространил эту тенденцию и на последующий период. По общему уровню экономического развития экономика СССР действительно приближалась к уровню 1913 г. Однако, сравнение с этим годом для характеристики восстановительного процесса исходит из предположения, что в 1913 г. был достигнут наивысший уровень развития народного хозяйства дореволюционной России.

В действительности же в 1916 г. валовая продукция промышленности примерно на 10 – 15% превосходила уровень 1913 г., а объём основных фондов русской промышленности к концу 1917 г. превосходил тот же уровень по подсчётам С. Г. Струмилина не менее, чем на 40%. Значительно больше выросли в период первой мировой войны производственные фонды и продукция некоторых важнейших отраслей тяжёлой промышленности, – машиностроения, химии. В разгар войны грузооборот железнодорожного транспорта превосходил уровень 1913 г. почти в полтора раза.

Если рассматривать восстановительный период как процесс достижения полного использования производственного потенциала дореволюционной России, то он закончился не в 1926 г., а гораздо позднее, и *хвостики* этого периода имелись ещё в 1929 – 1930 гг. Понятно, что в восстановительном периоде фондоотдача растёт за счёт более полного использования старых производственных фондов.

В январе 1931 г. Фельдман вынужден был уйти из Госплана. В 1931 – 1934 гг. он работает в Плановой академии сначала заведующим кафедрой технических конструкций, а затем преподавателем. Он не оставляет полностью занятий экономической наукой. Так, в 1933 г. он пишет работу, посвящённую проблемам капиталистического воспроизводства, но она остаётся неопубликованной. В 1935 – 1937 гг. Фельдман работает начальником группы сводного плана Главного управления Северного морского пути. После 1943 г. он работает на инженерных должностях в различных городах Советского Союза. Будучи высоко эрудированным инженером, он везде находит применение своим знаниям[14]. Только в 1953 г. ему удаётся вернуться в Москву, но, будучи тяжело больным, Фельдман уже не занимался экономическими вопросами. В 1958 г. его не стало.

За год до смерти Фельдмана в США вышла упомянутая книга Домара, Девятый очерк которой целиком посвящён моделям Фельдмана. Домар пишет, что сначала он намеревался просто перевести две статьи, составляющие основную работу Фельмана (*К теории темпов …*), но потом отказался от этой мысли вследствие большого объёма (всего 55 страниц) и только очень подробно изложил их содержание. Домар даёт чрезвычайно высокую оценку работам Фельдмана, называет их замечательными (remarkable) и считает началом создания математической теории роста.

Полный перевод этих двух статей и третьей работы Фельдмана *Аналитический метод построения перспективных планов* был опубликован в США в сборнике Спульбера[15]. Ещё до этого в 1963 г. польские учёные посвятили Фельдману выпуск своих сборников *Экономических исследований* и монографию *О перспективах роста социалистического хозяйства в связи с теорией Фельдмана*[16]. В сборнике, кроме полного перевода основной работы Фельдмана, дан подробный и глубокий математический комментарий к его моделям (*Математические основы и соотношения модели Фельдмана*), написанный Пшелясковским. Этот очерк выходит далеко за рамки простого комментария и в некоторой части представляет дальнейшее интересное развитие идей Фельдмана.

Благодаря книге Домара и вышеперечисленным публикациям, идеи Фельдмана стали широко известны за пределами его родины. Непрерывно растёт число исследований, посвящённых анализу его моделей, которые сохраняют большую ценность и для современной экономико-математической науки[17].

Примечания (почти все составлены авторами)

1. Эта революция уже давно, пусть не официально, именуется переворотом. О. Ш.

2. Высказывание, достойное представителя образованщины (Солженицын), т. е. образованного человека, который смыслит в политике не более, чем свинья в апельсинах. Да, кровавый Ленин был высоко образован, а про его любимого и ещё более образованного Луначарского М. И. Ростовцев (2002), *Избр. публицистические статьи 1901 – 1923*. М., с. 11, указал: *Никогда не ломали школу так нагло, невежественно и варварски, как в эпоху просвещённого диктаторства Луначарского* (цит. по редактору книги И. В. Тункиной). О. Ш.

3. Московское Высшее техническое училище (МВТУ, ныне им. Баумана), по специализации электрические жел. дороги дальнего следования.

4. Соображения о структуре и динамике народного хозяйства США с 1850 по 1905 гг. и СССР с 1926/1927 по 1940/1941 гг. *Плановое хозяйство* (ПХ), № 7,1927 и отдельная брошюра.

5. Синтетический = сводный. О. Ш.

6. Об этом и других факторах, способствовавших исчислениям и исследованиям народного хозяйства см. Альб. Л. Вайнштейн, Некоторые проблемы исчисления народного дохода. Вступительная статья к переводу книги П. Студенского *Доход наций*. М., 1968.

7. Указанная работа Фельдмана была опубликована в двух статьях: ПХ, №№ 11 и 12, 1928.

8. Выделено Фельдманом.

9. ПХ, № 12, 1928, с. 177 – 178.

10. Махаланобис рассматривал и четырёхсекторную модель, см. [xii].

11. Dogmar E. (1957), *Essays on the Theory of Economic Growth*. New York, p. 17.

12. ПХ № 12, 1929.

13. В составлении этой рукописи принял участие и Альб. Л. Вайнштейн, соавтор этой статьи.

14. Сохранились некоторые изобретения и авторские свидетельства по бурению нефтескважин и пр. Авторы. Они по необходимости умолчали о многом. Почему, спрашивается, Фельдмана начали преследовать? Почему он был вынужден работать *в различных городах* и пр.? О. Ш.

15. *Foundations of Soviet Strategy for Economic Growth*. (*Sel. Soviet Essays*, 1930.) Bloomington, Indiana, 1964, 1965.

16. *Studia Economiczne* No. 10. Warszawa, 1963. A. Lukaszewicz, Spieszany wzrost gospodarski socjalistyczney. W wziazku z teoria G. Feldmann. Warszawa, 11965, p. 315.

17. Центральный экономико-математический институт АН СССР предполагает издать Антологию произведений русских экономистов-математиков (до 1930 г.), куда войдут и работы Г. А. Фельдмана.

XII

Дж. К. Гош

Махаланобис и искусство и наука статистики. Ранние дни

J. K. Gosh, Mahalanobis and the art and science of statistics: the early days.
Indian J. Hist. Sci., vol. 29, No. 1, 1994, pp. 89 – 98

1. Общий взгляд

1.1. К концу XIX в. Карл Пирсон, в ответ на некоторые биометрические вопросы Гальтона, начал разрабатывать математический арсенал для исследования статистических данных. Наиболее известный из инструментов, критерий хи-квадрат, выдержал испытание временем и был провозглашён одной из главных новинок последних ста лет. Именно в ранних работах Пирсона скорее, чем где-либо ещё, отыскиваешь начало современной дисциплины статистики. БОльшая часть собственных трудов Пирсона и других сочинений, которые он внушил, появились в *Биометрике*, основанным Пирсоном[1] в 1901 г. И именно в нём, в 1915 г., Прасанта Чандра Махаланобис впервые познакомился со статистикой.

1.2. Махаланобис был рождён в состоятельной прогрессивной семье Брахно в 1893 г. В 1913 г. Махаланобис отправился учиться в Кембридж и в 1915 г. с отличием сдал первые экзамены по естествознанию. В то время он впервые столкнулся с *Биометрикой* (Rao 1973a, c. 460):

Во время отъезда Махаланобиса из Кембриджа в Индию шла первая мировая война, и произошла короткая задержка. Он использовал время задержки для просмотра книг в библиотеке King's College. Руководитель группы студентов Маколей как-то обратил внимание Махаланобиса на несколько томов <u>Биометрики</u>. […] *Он настолько заинтересовался, что купил полный комплект журнала* […] *и начал читать этот журнал на пути в Индию и продолжал изучать его и решать упражнения в своё свободное время после прибытия в Калькутту. Махаланобис пытался отыскать проблемы, при решении которых смог бы применить свои новые познания*.

1.3. Махаланобиса поощрял Acharya Brajendra Nath Seal, один из первых, оценивших значимость новой дисциплины. Первой важной работой в Индии по статистике в новом смысле, возможно, был статистический анализ результатов экзаменов в Калькуттском университете. В 1917 г. Сил, как председатель комитета по реформе экзаменов в этом университете, попросил Махаланобиса помочь ему с этим анализом.

Такова была может быть первая важная работа по статистике в современном смысле, предпринятая в Индии. К сожалению, Сил оставил Калькутту, чтобы вступить в должность вице-ректора университета в Майсуре, и его комитет не закончил своей работы и не представил отчёта. Мне удалось отыскать письмо Сила 23 мая 1971 г. [1917?], в котором он статистически очень подробно описывает, что он считал бы нужным сделать, но никакие другие документы не сохранились[2]. У нас есть документы о работе Махаланобиса с 1919 г., но иногда это лишь резюме трудов Индийского научного конгресса.

1.4. В 1920-е годы Махаланобис организовал статистическую лабораторию в Presidency College[3] а в 1931 г. был учреждён Индийский статистический институт (ИСИ) как зарегистрированное общество и, кажется, разместился в этой лаборатории. Вся или почти вся статистическая работа в Индии в 1920-е и 1930-е годы была проделана Махаланобисом и его учениками и коллегами в той же лаборатории. В 1930-е годы впервые появились другие выдающиеся труды, из которых особо выделим статью Р. Ч. Бозе и С. Н. Роя, однако Махаланобис оставался ведущим деятелем ввиду своей собственной работы и влияния, которое он оказывал на выбор проблемных областей. Бозе и Рой изучали установление центрального и асимметричного выборочного распределения стьюдентизированной и не-стьюдентизированной статистики D^2 Махаланобиса, а пионерная работа Бозе по планированию эксперимента оказалась возможной только ввиду интереса Махаланобиса и введения им новых планов [эксперимента] Фишера в сельскохозяйственные полевые исследования в Индии.

1.5. В 1940-х годах положение начало изменяться, хотя многое осталось таким же, как раньше. Существенные труды стали появляться в других местах, и особенно в статистической секции ICAR[4] (в то время, Имперский совет сельскохозяйственных исследований), которая в поздние 1950-е годы, пройдя несколько стадий, развернулась в отдельный исследовательский институт. Но по-прежнему наиболее значимой была работа в Калькутте, в ИСИ. Институт стал известен миру и был принят за образец, когда первый статистический институт в США был учреждён стараниями Гертруды Кокс. Таков был, возможно, единственный случай, когда институт в развивающейся стране был принят за образец в развитой стране.

В исследованиях ИСИ появились новые направления, но собственные труды Махаланобиса, к примеру, его длинная классическая статья о выборочных обследованиях крупного масштаба, послужившая причиной его избрания в Королевское общество, была такой же важной, как лучшие работы Бозе, Роя и

Ч. Р. Рао. Рао, этот новый блестящий молодой человек, стал одним из самых известных статистиков нашего времени.

1.6. По многим причинам конец 1940-х годов оказался водоразделом. Вот главное: и в самой Калькутте, и за её пределами появились новые, независимые центры исследований. Сам ИСИ существенно изменился и интеллектуально, и по своему составу. Бозе и Рой переехали в США. Рао стал главой открывшейся при ИСИ Школы исследований и обучения.

В соответствии с новым уставом [ИСИ] Школа объединяла всё основное обучение и все теоретические и методологические исследования. Правительство стало перенимать всё бОльшую долю затрат ИСИ и хотело, чтобы Институт сосредотачивался только на обучении и исследованиях. Махаланобис, однако, возражал против того, что он считал неверным пониманием и самОй статистики, и роли ИСИ.

Переговоры с правительством длились почти десять лет, и несколько раз президенту ИСИ и другу [?], C. D. Deshmukh пришлось ходатайствовать за Институт. В конце концов Махаланобису удалось убедить правительство в том, что следует разрешить ИСИ, как и раньше, выполнять полезные или пионерные работы крупного масштаба. Оставаясь вдалеке от практических дел, исследования и обучение могут оторваться от жизни. Махаланобис также добился независимости ИСИ в своей повседневной работе. Подобные битвы с правительством продолжались неизменно[5] и отравляли жизнь и ему, и ИСИ. В развивающейся стране всегда, быть может, будут тревожные трения между мощным, но неосведомлённым правительством и институтом, который пытается отделиться от мира посредственности, если не худшего.

1.7. В 1950-е годы многое изменилось и с научной точки зрения. Махаланобис оставался творческим учёным, ведь в то время появились некоторые из его лучших и самых известных трудов, например, двухсекторная модель планирования жизни страны. Правда, учёные мира вряд ли посчитали бы это достижение статистикой.

Кроме того, новаторское исследование Миахаланобиса в лучшем случае имело лишь малое отношение к важным теоретическим или методологическим трудам, появляющимся под руководством Рао. В эти 1950-е годы, которые многие считают золотым периодом в жизни ИСИ[6], развитие статистики не было так тесно увязано с развитием самогО Института, и это противоречие [?] привело к новым трудностям и трениям.

1.8. Статистика продолжала развиваться очень быстро, но часто оказывалась подразделённой на появляющиеся изолированные и почти не взаимодействующие области, как, например, вероятность и статистические выводы, включая выборочный метод и многомерный анализ; составление проектов; эконометрика; и демография. Последние две дисциплины были сами по себе почти новыми[7].

Развитие статистики и самогО ИСИ обеспечивало новые возможности, но возникали структурные проблемы. Так, раздельное и часто независимое развитие теории и практических работ привело к новой и длительной проблеме, хотя сам Рао, творец Школы исследований и обучения, чувствовал себя одинаково уютно в обеих областях. Разрыв между теорией и практикой оказался проблемой самой статистики, и только в конце 1970-х годов и в 1980-е годы появились попытки восстановления утраченной общности, но это уже иная история.

В двух следующих параграфах мы вернёмся к рассмотренному периоду и более подробно остановимся на некоторых обстоятельствах того времени.

2. Махаланобис и двадцатые годы

2.1. Мера, в которой Махаланобис господствовал над организацией исследований по статистике, лучше всего выявляется по перечислению важных событий в истории статистики в Индии. Вот некоторые важные события (Рао 1989, 132).

1895, Открытие статистического бюро в Калькутте

1905, Учреждение Директории по коммерческим известиям и статистике в Калькутте

1931, Учреждение Индийского статистического института

1931, Учреждение Имперского (ныне, Индийского) совета сельскохозяйственных исследований (ICAR) со статистическим отделением

1933, Выход в свет первого номера журнала ИСИ *Sankhya, the Indian Journal of Statistics*

1938, [Сессия] Первой Всеиндийской статистической конференции

1939, Начало годичных курсов обучения статистике в ИСИ

1941, Появление курса статистики с возможностью сдачи экзамена на степень магистра по статистике в Калькуттском университете, в первом среди всех университетов страны

1942, Первое включение статистики в секцию математики на Индийском научном конгрессе

1945, Избрание Махаланобиса в Королевское общество за вклад в статистику

1950, Учреждение Национального выборочного обследования, первого в мире подобного многоцелевого объединения крупного масштаба

1951, Проведение 27-й сессии Международного статистического института в Нью-Дели

1951, Учреждение Центральной статистической организации и статистических бюро штатов

2.1.1. Чтобы представить себе здесь всю значимость этих событий, следует помнить, что именно Махаланобис организовал первую национальную конференцию по статистике. Он же был первым статистиком, который стал председателем секции математики и статистики на годичной сессии Индийского научного конгресса в 1942 г. и сыграл ведущую роль в добавлении отдельной секции статистики на его годичных сессиях начиная с 1945 г. Национальное выборочное обследование было его замыслом, и именно Махаланобис был вероятно его господствующим духом как и одним из основных творцов Центральной статистической организации.

2.1.2. Эта деятельность отражена в воспоминаниях самого Махаланобиса (1956), в биографических эскизах его двоюродного брата Anikendra Mahalanobis (1983) и Рао (там же (?), 1.455 – 492). [Это *там же* встретится ещё дважды.] С учётом того, что автор первых эскизов не был статистиком, можно сказать, что он составил примечательно полный отчёт об основных событиях в жизни Махаланобиса, равно как о его основных достижениях в науке и в управлении ей.

Вторые эскизы это чудесная и честная дань одного творческого учёного другому такому же.

Можно также справиться с историей деятельности ИСИ, с его годичными отчётами (*Annual Reports*) за 1931 – 1950 гг. и с частными документами самого Махаланобиса, которые теперь хранятся в Мемориальном музее Неру, в библиотеке этого Музея и в ИСИ.

2.1.3. Из этих документов возникает человек масштаба Возрождения. Даже в 1920-е годы, когда он утверждался в новой дисциплине, статистика была для него лишь одной из многих страстей. Он влюблён в Nirmal Kumari, в свою будущую жену и дочь грозного Heramba Chandra Maitra, с которым ведёт идеологическую битву за реформу [религиозного общества] Брахма-самадж. Когда отец, наконец, смягчился и разрешил Махаланобису жениться на своей дочери, он лишь *разрешил*, но не одобрил брак. Невесту *отдал замуж* не её отец, а дядя Махаланобиса со стороны матери, Сэр Nilratan Sircar[8], в присутствии Рабиндраната Тагора. В качестве свадебного подарка поэт дал молодым рукопись своей новой танцевальной драмы Basanta.

Махаланобис был на стороне поэта в 1919 г., когда Тагор отправил лорду Челмсфорду свой исторический протест против бойни в Амфитсаре[9] и отказался от рыцарского звания.

В течение 1920-х годов Махаланобис служил одним из секретарей Visva-Bharati[10] и оставался близким и доверенным товарищем Тагора и одним из лучших друзей Сукумара Рая[11]. Именно ему Рай сообщил в одном из своих последних писем о своём замешательстве в вопросах веры.

2.1.4. Прелестное описание Махаланобиса сохранилось в письме ему от Brojendranath Seal[12], написанном в 1921 г.:

Он [?] *говорит мне, что ты собираешься жить в дикой местности и заполнять мозги статистикой осадков, температуры и других таинственных отличительных качеств. Это подойдёт тебе и твоему темпераменту. Я неизменно имел потустороннее впечатление о тебе: худой, долговязый, уклончивый и, так сказать, загадочный*.

Этот долговязый человек со всесторонними влечениями и интересами, конечно же, придерживался своих убеждений сильнее обычного, притом сознательно. Много лет позже, отвечая на вопрос молодого коллеги о важнейшем качестве администратора высокого уровня, Махаланобис (*Jubilee* 1983, 110) ответил: *Способность при необходимости быть неприятным*.

Он был также очень стойким как интеллектуал и проницательным и верил в свою проницательность. В 1940-е годы при переговорах с правительством он заявил, что скорее уйдёт в отставку и учредит новый институт, чем согласится быть директором организации, в которой ему придётся под давлением правительства отказаться от своих взглядов[13].

2.1.5. В 1920-е годы статистика оказалась лишь одной, но самой неизменной и важнейшей из его многочисленных привязанностей. Редко случается, что тема, человек и его время наилучшим образом сочетаются друг с другом. Профессор Ashok Rudra в своей лекции в память Махаланобиса задавал вопрос о причинах его необычайного успеха как администратора науки и спрашивал, нельзя ли, изучив его жизнь, повторить его успех. Случайности редко повторяются, но, разумеется, многое можно понять по опыту Махаланобиса и по тому, что он сам написал по этому поводу (Махаланобис 1986).

Многое из написанного им о необходимых предпосылках развития науки в развивающихся странах остаётся вполне уместным, и это показывает, как мало мы продвинулись к разрешению основных проблем. До обозрения научной работы Махаланобиса в 1920-е годы позвольте мне ещё раз процитировать Рао (там же, 1.483):

Таков был человек, который сочетал в себе светлейший ум и проницательность с неограниченной работоспособностью. Своими успехами он создал репутацию стране. Никто не сможет достичь ничего великого, если не твёрд, не может действовать с верой в свои убеждения, не способен спорить […] *и добиваться цели. Махаланобис владел всеми этими чертами в достаточной мере*.

В Индии до 1920-х годов статистическая наука была целиной и оставалась практически неизвестной. […] *Ей нужен был пионер и искатель, подобный ему* […], *смелый и настойчивый в борьбе с любым противодействием*.

По традиции, в Индии не было организационных структур, которые обеспечивали бы успех в познании и продвигали бы общество. В странах, которые имеют подобные структуры, отдельные лица могли играть главную роль только в действиях. В Индии, напротив, отдельные лица господствовали на сцене, как даже сейчас, в науке и политике.

Махаланобис не был исключением. Он был хозяином ИСИ, и, как некоторые утверждали, невыносимым хозяином. Но в Индии нет случаев, когда коллективное мышление и ответственность, подразделённая между несколькими уровнями, приводили бы к плодотворной работе общественных предприятий или учебных заведений.

2.2. Позвольте мне сейчас кратко рассмотреть некоторые пионерные статьи по статистике 1920-х годов.

2.2.1. Как учёный, Махаланобис сочетал исключительное чутьё в эмпирических исследованиях и особенно в тех, которые были необходимы и важны для понимания общества и планирования и принятия решений для него. В свои исследования он привносил безошибочную интуицию в понимании сути проблем и талант в разработке простых, но действенных средств для их исследования. Все ранние работы Махаланобиса выказывают уверенность в его анализе и оптимизм по поводу его благотворного приложения к обществу. Но то была не уверенность, не оптимизм неосмотрительного автора. В целом, его методы выдержали испытание временем даже тогда, когда последующее накопление данных приводило к видоизменению некоторых его выводов.

2.2.2. Махаланобис (1925) пытался ответить на такие вопросы: как англо-индусы Калькутты соотносятся с различными кастами Бенгалии? Не ближе ли они к индусам? Ближе к высшим или низшим кастам Бенгалии? Чтобы ответить на эти вопросы, он изучает то, что стало основной темой его статьи, а именно *географическое и социальное сходство типичных бенгальских каст, чьё прошлое и нынешнее положение хорошо известно.*

2.2.3. Чтобы исследовать указанные вопросы, он применил, вероятно впервые, свою статистику D^2, приведя причины, по которым он предпочёл её аналогичному коэффициенту Пирсона. Формула для D^2 ещё не учитывала корреляцию между измеренными переменными. Эта окончательная оценка появилась позже (Махаланобис 1936). Он также ещё не определил выборочного распределения не-стьюдентизированной D^2, угаданное им позже (Махаланобис 1930) по вычисленным моментам и сравнению их с кривыми Пирсона[14]. Догадка оказалась верной для центрального случая и разумным приближением для случая асимметрии.

Выборочные распределения стьюдентизированной статистики D^2 в асимметричном случае представляют собой один из знаменитых результатов индийской школы (Бозе и Рой, конец 1930-х годов). В 1930-е и 1940-е годы появились важные работы о приложении D^2. И даже сегодня эта статистика является одним из главных средств для решения проблем классификации и кластерного анализа. Она применяется в антропологии и других областях.

Есть свидетельство (письмо Пирсона Махаланобису в коллекции ИСИ и письмо Махаланобиса Фишеру в коллекции мемориального музея Неру и его библиотеки) о том, что Пирсон отклонил рукопись Махаланобиса, выразив оговорки по поводу статистики D^2. Но последующие события показали, что Махаланобис оставался бы известным статистиком за одно это новшество.

2.2.4. В какой мере выводы статьи 1925 г. выдержали испытание временем? Важное и часто упоминаемое заключение о том, что бенгальские брамины гораздо более схожи с другими бенгальскими кастами, чем с браминами в других частях Индии[15], всё ещё вполне верно. Но последующие материалы не подтвердили других существенных выводов, например, того, что только брамины могут обоснованно утверждать, что они определённо связаны с северной Индией и особенно с Пенджабом. Более того, теперь считается, что Махаланобис вероятно ограничил своё исследование англо-индусов выборкой из высшего слоя их сообщества и что поэтому его вывод об их схожести с высшим слоем индусов применим лишь с указанным ограничением.

2.2.5. В дополнение к антропологическим исследованиям Махаланобис начал применять статистику к метеорологии и предотвращению разливов рек. В 1922 г., после опустошительного разлива реки в Северной Бенгалии, его попросили исследовать рекомендацию о постройке дорогостоящего бассейна для сбора избыточного разлива. После подробного изучения данных за 50 лет об осадках и разливах он предложил совершенно иные меры. Они были приняты и доказали свою действенность[16]. Несколько позже, после сильного разлива реки Brahmani, тот же вопрос был снова задан Махаланобису. Комиссия инженеров-экспертов решила, что опустошительный разлив был вызван подъёмом русла реки и что его можно уравновесить подъёмом береговой насыпи. И снова изучение данных [теперь уже] за 60 лет не выявил никаких изменений русла реки[17] и что лучше было бы построить дамбы в верховье реки. Вычисления Махаланобиса составили основу гидроэлектрического проекта Hirakud, а в 1930-е годы аналогичные исследования были произведены и в других случаях (там же).

2.2.6. В основном эти исследования отражены в длинных официальных отчётах правительству, но некоторые статистические результаты и описание соответствующих методов можно отыскать в статье Махаланобиса (1940). Его труд по борьбе с разливом рек вероятно оказался пионерным исследованием операций. Он помог Махаланобису подготовиться к своей следующей работе о выборочных обследованиях и планировании в крупном масштабе, в которой идеи исследования операций видны уже непосредственно.

3. Статистика достигла совершеннолетия: тридцатые и сороковые годы

3.1. На открытом заседании в декабре 1931 г. под председательством покойного Сэра R: N: Mukherjee[18] было решено учредить ИСИ в качестве научного общества. Институт был зарегистрирован 28 апреля 1932 г., а в 1933 г. начал выходить журнал *Sankhya, Indian Journal of Statistics*.

3.2. Среди выдающихся молодых людей, которые приходили в ИСИ по собственному желанию или по приглашению Махаланобиса, был S. S. Bose, который сотрудничал с Махаланобисом ещё в 1920-е годы, J. M. Sengupta, чьё чутьё в изысканиях стало легендарным (Рао, там же, 3.118), K. R. Nair, Р. Ч. Бозе и S. N. Roy. Р. Ч. Бозе был приглашён в 1933 г. как подающий надежды молодой математик, а Рой пришёл через год. Вместе они учредили Индийскую школу теоретических исследований многомерного анализа.

В этой области индийские работы и ныне являются существенными. В 1930-е годы вершиной их труда было открытие выборочного распределения стьюдентизированной статистики D^2 в виде асимметричного распределения F (R. C.

Bose & Roy 1938). То было глубоким результатом серьёзного новаторского математического труда, но своё начало он вёл с вопросов, которые задавал Махаланобис.

3.3. Фишер впервые посетил ИСИ примерно в это время, чтобы присутствовать на первой национальной статистической конференции и сильно заинтересовался результатом Бозе и Роя. Его реакция на их статью и весьма благоприятные впечатления об ИСИ были описаны его дочерью (Box & Fisher 1978, с. 324 – 329, 331 – 337). Посещение Фишера оказалось поворотным пунктом в карьере Р. Ч. Бозе, который заинтересовался комбинаторными задачами планирования эксперимента и почти сразу же опубликовал выдающуюся статью на эту тему (R. C. Bose 1939). В течение 1940-х годов и позднее Бозе оставался главным автором в этой области.

Фишер также сильно повлиял на Рао, который работал в ИСИ с 1941 г., но затем уехал в Кембридж для подготовки к защите докторской диссертации под руководством Фишера. Через Бозе и Рао Фишер оказал сильное влияние на индийскую школу, но примечательно, что, несмотря на их тесную дружбу, работа Махаланобиса развивалась независимо. Философия Фишера, конечно, повлияла на него, но если можно сказать, что статистике он от кого-то научился, то этот кто-то был Пирсоном. Его Махаланобис продолжал уважать, несмотря на их разногласия по поводу статистики D^2. Узнав о смерти Пирсона, он написал Эгону Пирсону[19]:

Я общался с ним всего лишь несколько месяцев, но всегда считал его своим учителем, а себя – всего лишь его скромным учеником.

3.4. Кроме интеллектуального обогащения, посещение Фишера помогло ИСИ ещё в двух направлениях. Оно обеспечило ему международное признание и повысило его престиж в глазах индийского правительства. Это последнее обстоятельство должно было быть полезным в трудных переговорах ИСИ с правительством в 1940-е годы.

3.5. Двое других также серьёзно помогли ИСИ: Джавахарлал Неру, который впервые посетил ИСИ в 1940-х годах, и Chintaman Dwarknath Deshmukh, который стал президентом Института в критический период в 1940-х годах[20].

3.6. В 1930-е годы интерес Махаланобиса начал смещаться от многомерного анализа к выборочным обследованиям крупного масштаба. Самым важным из этих обследований было возможно пробное выборочное обследование урожая джута в 1937 г., которое переросло в долгосрочное исследование и закончилось в 1941 – 1942 гг.

Это и другие обследования образовали основу для его фундаментальной статьи (1944) о методологии и философии проблем выборочных обследований. Наиболее известные новшества Махаланобиса для таких обследований это понятие об оптимальном плане обследования, взаимопроникающие выборки и опытные (pilot) исследования.

Вальд, который разработал статистическую теорию принятия решений и метод последовательного анализа, был наиболее известным теоретическим статистиком 1940-х годов. Он признал в опытных исследованиях первоначальную идею последовательного анализа.

Махаланобис кроме того сформулировал важные и трудные философские проблемы случайности и представительности выборки, которые остаются уместными и требующими внимания современных теоретиков.

Труды Махаланобиса о выборочных обследованиях крупного масштаба, т. е. его статья (1944), Национальное выборочное обследование, которое он обосновал в 1950 г. и его членство (1947 – 1951) в подкомиссии ООН по выборочному методу, находятся среди его самых знаменательных и долговременных даров нашей дисциплине.

3.7. В течение 1940-х годов очень много весьма важных теоретических изысканий было выполнено и другими, и многие из них были внушены Р. Ч. Бозе и Роем. Рой продолжал исследовать многомерный анализ, но Бозе перешёл к составлению проектов (design). В этой новой области либо самостоятельно, либо с Nair и Kishen он написал несколько классических статей и породил всё ещё энергичную традицию исследования (?).

Выборочный метод, планирование эксперимента и многомерный анализ до сих пор являются излюбленными темами исследований в Индии. В пионерной статье о минимально достижимой дисперсии несмещённых оценок Рао открывал совершенно новые направления исследований в теории статистических выводов и проектировании. Среди других сотрудников ИСИ следует назвать A. Bhattacharya, демографа Ajit Dasgupta и бывшего исследователя теории чисел D. B. Lahiri, который стал экспертом выборочного метода.

Первый факультет статистики был открыт в 1941 г. в Калькуттском университете с Махаланобисом в качестве почётного главы. К концу десятилетия этот факультет начал работать независимо от ИСИ, и в его штате было два выдающихся молодых человека, M. N. Ghosh и H. K. Nandi. Гош расширил теорию Вальда принятия решений, а Нанди внёс вклад в последовательный анализ и последовательные критерии (sequential analysis and testing) и в планирование эксперимента. Было ясно, что лучшие умы того времени привлекались к возникающим проблемам теории статистических выводов и [теории] вероятностей[21].

3.8. В конце десятилетия статистические исследования перестали выполняться только одним человеком или только ИСИ. Эти исследования достигли совершеннолетия.

Признательность. Большая часть этой статьи была написана во время моего посещения университета Пердью, штат Индиана, и я с благодарностью признаю их гостеприимство. Я в долгу перед Ч. Р. Рао за разрешение обильно цитировать его (1989, 132; 1973a); перед мемориальным музеем Неру и его библиотекой за разрешение просмотра и цитирования частных документов Махаланобиса; и перед Sri Chitta Bhattacharya за доступ к старым отчётам, историческим записям и воспоминаниям и к частным документам Махаланобиса, которые всё ещё хранятся в библиотеке ИСИ. Я признателен профессору Amitabha Basu за обсуждение антропологической работы Махаланобиса и доктору Aloke Dey за ознакомление с краткой историей Индийского исследовательского института сельскохозяйственной статистики.

Примечания

1. Первыми редакторами *Биометрики* было три человека, включая Пирсона *при консультативном участии Гальтона*.

2. Nehru Memorial Museum and Library, New Delhi. Mahalanobis Collection.

3. Я не смог установить точные даты, но во всяком случае лаборатория уже существовала в поздние 1920-е годы и вероятно до ранних 1950-х годов. Дж. К. Г.

4. См. событие 1931 г. в § 2.1.

5. Это противоречит заявлению Неру в парламенте в 1959 г., см. Гош и др. (1999, конец § 5.3).

6. Так заявил Рао (1973b).

7. Демография ведёт начало с 1662 г. (Граунт), ей успешно занимался Эйлер, а в 1907 г. появилась первая из многочисленных публикаций А. Дж. Лотки, в результате которых утверждение Гоша стало грубо ошибочным.

8. Врач, педагог, филантроп.

9. В Амфисаре или Джаллианвалла-багх, расстрел мирной демонстрации.

10. Мы можем только назвать университет Visva-Bharati.

11. Писатель, фотограф.

12. Гуманитарий, философ.

13. Indian Stat. Inst. Library, Mahalanobis personal papers.

14. Как можно сравнивать моменты с кривыми?

15. Известно, что аналогичное утверждение справедливо для грузинских и бухарских евреев.

16. Indian Stat. Inst., *History and Activities*. Collection, 1959, 2.

17. Как осадки могли поднять русло реки? Эксперты предположили, что русло поднялось, но осадков они не упоминали (Гош и др. 1999, § 5.3).

18. После Сэра следовало указывать имя, а не инициалы.

19. См. Прим. 2.

20. Фишер сильно повлиял, двое других существенно помогли ИСИ, но ни слова о Колмогорове, который посетил ИСИ в 1962 г. Можно думать, что теорией вероятностей в Индии в то время не занимались.

21. См. Прим. 20.

Библиография

Боголюбов А. Н., Матвиевская Г. П. (1997), *Всеволод Иванович Романовский. 1879 – 1954.* М. Первый соавтор основательно испортил книгу безответственным и наглым отношением к описанию математических выкладок. Приходится заключить, что *ответственный редактор* С. С. Демидов был лишь свадебным генералом.

Шейнин О. Б. (2013), *Святой* Федос. *Вопр. истории естествознания и техники*, № 1, с. 148 – 158.

Bose R . C. (1939), On the construction of balanced incomplete block designs. *Annals of Eug.*, vol. 9, pp. 358 – 399.

Bose R. C., Roy S. N. (1938), Distribution of the Studentized D^2 statistic. *Sankhya*, vol. 4, pp. 373 – 380.

Box J. F., and R. A. Fisher (1978), *The Life of a Scientist*. New York.

Gosh J. K. и др. (1999), Evolution of statistics in India. *Intern. Stat. Rev.*, vol. 67, No. 1, pp. 13 – 34.

Jubilee (1983), *Golden Jubulee Souvenir*. ISI Alumni Assoc.

Mahalanobis A. (1983), *Prasanta Chandra Mahalanobis*. New Delhi.

Mahalanobis P. C. (1925), Analysis of race mixtures in Bengal. Indian Science Congr. *J. and Proc. Asiatic Soc. of Bengal*, vol. 23, 1927, pp. 301 – 333.

--- (1930), On tests and measures of group divergence. *J. and Proc. Asiatic Soc. of Bengal*, vol. 26, pp. 541 – 588.

--- (1936), On the generalized distance in statistics. *Proc. Nat. Inst. Sciences India*, vol. 2, pp. 49 – 55.

--- (1940), Rain storms and river floods in Orissa. *Sankhya*, vol. 5, pp. 1 – 20.

--- (1944), On large-scale sample surveys. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, vol. B231, pp. 329 – 451.

--- (1956), *Speeches on the Occasion of the 25th Anniversary of the ICI*.

--- (1986), *Why Statistics and Other Essays.* Calcutta.

Rao C. R. (1973a), Prasanta Chandra Mahalanobis, 1893 – 1972. *Biographical Memoirs of the Fellows of the Roy. Soc.* London, vol. 19, p. 460.

--- (1973b), Mahalanobis era in statistics. *Sankhya*, vol. 35, Suppl., pp. 12 – 26.

--- (1989), Statistics and truth. *Ramanujan Mem. Lectures.* New Delhi, 132.

--- (1993), Statistics must have a purpose. *Sankhya*, Special vol. A55, pt. 3, pp. 331 – 349. **S. G,** 82.

XIII

Сахотра Саркар

Дж. Б. С. Холдейн и черновой вариант биографии Карла Пирсона, составленный Р. Э. Фишером

Sahotra Sarkar, J. B. S. Haldane and R. A. Fisher's draft life of Karl Pearson.
Notes Rec. Roy. Soc. Lond., vol. 49, No. 1, 1995, pp. 119 – 124

1. Предисловие

Эдвардс (1994) описал, как Легг (L. G. Wickham Legg), редактор *Словаря научных биографий* (СНБ, *Dict. Scient. Biogr*.), 14 апреля 1945 г. попросил Фишера составить биографию Пирсона, и как, после многих расхождений между ними, Фишер отозвал свою черновую биографию. Основные сочинения Пирсона были посвящены статистике, и выбор Фишера, главного статистика своего поколения, был естественным. 26 апреля Фишер согласился, но признал, что *не всегда находился в хороших отношениях* с Пирсоном.

К 28 июня Легг начал сомневаться в своём выборе и написал Фишеру, что *несколько дней назад получил письмо*, которое, очевидно, дало ему повод для беспокойства. Напомнив, что Фишер упомянул о своих разногласиях с Пирсоном, Легг косвенно предложил Фишеру отказаться от своего согласия. Фишер, однако, намёка не понял и 21 января 1946 г. представил черновой вариант биографии.

Легг послал его по крайней мере одному несочувствующему рецензенту, и после длительной переписки Фишер отказался от сотрудничества, а биографию Пирсона написал М. Гринвуд.

Эдвардс указал, что автор первоначального письма Леггу остался неизвестным, и размышлял о возможной роли доктора D. R. Руе, ректора Университетского колледжа Лондона. Он был другом семьи Пирсона и должен был знать о враждебном отношении Фишера к Пирсону. Действительно, с 1933 по 1943 гг., до переезда в Кембридж, Фишер преподавал в том же колледже.

Но, хотя влияние Руе могло сыграть какую-то роль в решении Легга (притом Эдвардс заметил, что Легг поблагодарил его в предисловии к СНБ), имеется основательное косвенное свидетельство о том, что этим корреспондентом был Дж. Б. С. Холдейн, который в то время также преподавал в Университетском колледже. Именно, переписка дочери Пирсона, Холдейна и Легга в период 15 – 21 июня 1945 г., т. е. примерно за неделю до письма Легга Фишеру.

2. Переписка Холдейна и Легга

Холдейн выступил на сцену сразу после того, как 15 июня 1945 г. дочь Пирсона попросила его связаться с Леггом и склонить его к отказу от Фишера как биографа Пирсона. Холдейн немедленно согласился и написал Леггу длинное и тщательно обоснованное письмо:

Фишер, конечно, знаком с трудами Пирсона по статистике, но я не знаю, достаточно ли он осведомлён о философских работах Пирсона, о его сочинениях по поводу социализма или Реформации в Германии и т. п. […] *В течение последних десяти лет жизни Пирсона между ним и Фишером происходили разногласия, резко выраженные с обеих сторон. Я полагаю, что относительно фактов Фишер был чаще прав* (*хоть никак не всегда*), *как это обычно и бывает с более молодым участником спора. Но после смерти Пирсона Фишер продолжал спор, особенно в* Annals of Eugenics, *редактором которого он стал после Пирсона*.

Холдейн подробно процитировал статью Фишера (1937) в указанном журнале, опубликованную вскоре после смерти Пирсона, в которой обвинил своего предшественника в обмане, высокомерии и *раскольническом складе ума*. Холдейн продолжал:

Я бы считал, что необычно поручать статью о недавно умершем политике (?) *в СНБ его бывшему злейшему врагу. И ещё более удивительно, если биограф переступил нормальные пределы спора и обвинил покойного в высокомерии, обмане и подобном*[1]. [...] *Ни одно сообщение о жизни Пирсона не будет объективным, если оно укажет, что его труды безукоризненны или если оно скроет, что Пирсон был спорщиком. Но другие комментаторы подчёркивали его честность как противника. К примеру, Ленин* (1909/1961, с. 190), *который не отличался вежливостью к своим противникам, описал его как* *добросовестного и честного врага материализма*.

Я восхищаюсь математическими трудами Фишера, но позволю себе усомниться в том, что СНБ лучше всего достигнет своей цели, доверив ему биографию Пирсона.

Оставим в стороне почти беспричинную, но характерную ссылку на Ленина; то был лишь один из обычных методов Холдена, чтобы напомнить читателям о своём членстве в компартии [Англии?]. Но его замечания вышли за пределы оправданного ещё в одном смысле. Пирсон был вероятно так же склонен к полемике, как Фишер, и относился к своим противникам вряд ли более справедливо, чем Фишер.

Легг, однако, не мог (видимо и не пытался) судить о фактических достоинствах доводов Холдейна. Явно взволнованный и несколько раздражённый, он ответил 22 июня:

Друзья покойного Карла Пирсона finiront par me contrarier [начнут мне досаждать?], *если продолжат в том же духе. За последние семь дней я получил по этому поводу десять писем, но я благодарен Вам за Ваше письмо* […]. *Слишком поздно отказывать Фишеру, он подписал соглашение с издателем, и, если мы сейчас откажемся от него, будем плакать ещё до того, как нам станет больно.*

Я думал […] *позвать эксперта* (*может быть Вас самогО*), *чтобы убрать любые насмешки или пренебрежительные замечания, которые возможно подразумеваются в том, что Фишер может сказать*. […] *Конечно, если он будет настаивать на оскорблениях* (*как он, кажется, поступал раньше*), *всегда возможно будет попросить кого-либо составить другую биографию, если первоначальная неприемлема*.

Неясно, следует ли понимать *десять писем* буквально, но вероятно было несколько других, и трудно отказаться от подозрения в том, что Легг стал мишенью кампании, организованной дочерью Пирсона, чтобы биография её отца не была доверена кому-либо так же враждебного ему, как Фишер. Но в архивах Холдейна нет свидетельств, которые бы непосредственно подкрепили это предположение. В её переписке с Холдейном нет ссылок ни на кого другого.

3. Последствия

Как указано выше и подробно описано Эдвардсом, 28 июня Легг прямо[2] предложил Фишеру отказаться от составления биографии. Фишер, однако, не был столь уступчивым и 21 января 1946 г. выслал черновой вариант биографии. К 4 февраля Легг отредактировал его, видимо убрав особо враждебные выражения[3]. Фишер фактически согласился с изменениями, см. его бумаги в университете Аделаиды и публикацию Эдвардса (1994).

После этого Легг ввёл новые поправки, но не смог договориться с Фишером. 24 апреля Фишер счёл необходимым отказаться от поручения, но обеспечил себе получение прежде обговорённого гонорара. Довольно безобидную биографию Пирсона написал Гринвуд, но удивительно, что он не оценил критерия хи-квадрат, который даже Фишер прямо признал. Гринвуд очевидно не видел текста Фишера.

Описанная выше переписка наводит на мысль, что единственное письмо, упомянутое Леггом в письме Фишеру 28 июня, он получил от Холдейна. Это заключение, однако, прямо не доказано. Поскольку Легг в ответе Холдейну сообщил о десяти письмах, то критическим возможно было одно из них, но с учётом дат писем и подробности письма Холдейна это оказывается маловероятным.

Наконец, хотя Легг очевидно придерживался линии поведения, которую он кратко охарактеризовал в своём ответе Холдейну, ни в Университетском колледже, ни в Национальной библиотеке Шотландии нет никаких архивных свидетельств, того, что Холдена попросили оценить текст Фишера.

4. Комментарии

Большинство историков генетики знают, что личные и профессиональные отношения Фишера и Холдейна были далеко не простыми. Так, Фишер (1930) умолчал о работах Холдейна 1920-х годов. Но после того, как Холдейн (1931) в своей рецензии восторженно отозвался об этой книге, Фишер признался Дж. Хаксли, что напрасно не упомянул сочинений Холдейна. Его письмо Леонарду Дарвину 1932 г. доказывает, что книга Холдейна не произвела н него особого впечатления, но подготовленная им рецензия 1932 г. (так и не опубликованная) была намного обходительнее.

К 1932 г. споры о происхождении доминантности, т. е. вопрос о том, является ли она результатом развития или объясняется биохимией, затронул Фишера, который придерживался первого взгляда и противостоял Сьюаллу Райту, который отстаивал вторую точку зрения, и Холдену, который в основном соглашался с Райтом.

Личные отношения Фишера с Райтом никогда больше не приобретали прежнюю сердечность (Provine 1986), но отношения с Холденом оставались лучшими (?). Холден сыграл решающую роль в том, чтобы Фишер получил должность в Университетском колледже и Фишер поблагодарил его в письме 1933 г.

В течение 1930-х годов, в соответствии с большинством отзывов, их отношения оставались сравнительно неплохими (collegial), хоть они и были противоположны в политическом смысле и резко различались в понятиях генетики человека (Mazumdar 1992). Во время второй мировой войны немецкие воздушные налёты в конце концов вынудили Холдена эвакуировать свою лабораторию из Лондона, и Фишер (письмо Холдену 1940 г.) нашёл ей место на Ротамстедской станции.

После 1949 г. споры о Лысенко [см. также Фишер 1948] углубили их политические разногласия, которые оказались непреодолимыми. Тем не менее, сила критики Фишера Холденом в письме Леггу 1945 г., да и его немедленная готовность написать это письмо требуют дополнительного пояснения. Если принять сохранившийся вариант биографии Пирсона, составленный Фишером, за образец, то окажется, что в 1957 г., в столетнюю годовщину со дня рождения Пирсона, Холден (1957) похвалил его лишь немного положительнее.

Так, Холден никак не сочувствовал евгенике Пирсона, тогда как Фишер продолжал продвигать евгенику до конца жизни (но оставался на противоположном конце политического спектра от *свободомыслящего* социализма Пирсона). Лучшим объяснением описанного видимо является назначение Фишера заведующим кафедрой генетики в Кембридже, ибо в переписке Холдена, см., например, Tisdale (1937), есть объективные свидетельства того, что он явно желал (и даже ожидал) собственного назначения на эту должность.

И не слишком неестественно предположить, что он обиделся и подозревал, что на выбор Фишера повлияла их политическая принадлежность. Это же может объяснить, почему Холден в письме Леггу указал, что ценит математику Фишера, но не упомянул ни биологию, ни генетику. Огорчение Холдена своей неудачей в получении должности в Кембридже вероятно оказалось существенной причиной его готовности покинуть Англию, чтобы занять подобающую должность за рубежом.

В поздние 1940-е и ранние 1950-е годы Винер был восторженным посредником в переговорах Холдена с Массачусетским технологическим институтом[4]. Они, однако, оказались безрезультатными, потому что в США был принят закон о недопущении коммунистов в страну. В 1957 г. Холден, наконец, оставил Университетский колледж и Англию, чтобы занять должность в Индийском статистическом институте в Калькутте. Фишер несколько раз посетил этот институт и до, и после назначения Холдена, но их отношения, внешне сердечные, поскольку Холден отошёл от Лысенко и вышел из компартии, всё же никогда не стали такими же искренними, какими они были в 1930-е годы в Университетском колледже.

Признательность. Если не указано противное, то процитированная здесь переписка хранится в Библиотеке Университетского колледжа. Три существенных письма (дочь Пирсона Холдену, Холден Леггу и Легг Холдену) находятся в Box 16 бумаг Холдена [см. Tisdale (1937)]. Описи документов сейчас нет.

Мы благодарны г-же Gill Furlong и архивистам Университетского колледжа за помощь в работе с архивом и Американскому философскому обществу и Институту Дибнера за финансовую поддержку.

Основные учёные, упомянутые автором

кроме Винера, Пирсона и Фишера

J. B. S. Haldane, Дж. Б. С. Холден (1892 – 1964), биолог, популяризатор науки

J. Huxley, Дж. Хаксли (1887 – 1975), биолог, политик, гуманист

S. Wright, С. Райт (1889 – 1988), генетик, статистик

Примечания

1. Высокомерие Пирсона и его *раскольнический* характер были общеизвестны, а его обман почти очевиден без всякого анализа: его сын, крупный статистик Эгон Пирсон ни слова не сказал по поводу этого обвинения. Но вот более общий вопрос: допустимо ли обвинять покойного учёного? Для всесторонней характеристики любого покойного (не только учёного) обвинения обязательны. R. R. Newton (1977) обвинил Птолемея в фальсификации наблюдений. Многие комментаторы не согласились с этим, но никто из них не заявил, что покойного нельзя обвинять. Сводку комментариев см. Шейнин (1993), а в её русском переводе мы добавили положительное мнение Кеплера и Ньюкома о Птолемее. Кроме того, мы (2016) доказали, что Бессель, этот крупнейший учёный, был также отъявленным халтурщиком и обманщиком. О. Ш.

2. Это непонятно и притом противоречит сказанному в Предисловии. О. Ш.

3. Этот вариант не сохранился, и неясно, что именно вычеркнул Легг. С. С. В § 4 указано, однако, что он сохранился. О. Ш.

4. Винер пытался устроить Холдена в этот институт, который даже подготовил отдельную должность для жены Холдена. Обширная переписка Холдена с Винером хранится в библиотеке Университетского колледжа и Национальной библиотеке Шотландии (в обоих случаях в документах Холдена) и в Массачусетском технологическом инст-те в архиве Винера. С. С.

Библиография

Ленин В. И. (1909), *Материализм и эмпириокритицизм*. *Полн. собр. соч*. 5-е издание. М., 1961.

Шейнин О. Б., Sheynin O. (1993), The treatment of observations in early astronomy. *Arch. Hist. Ex. Sci*., vol. 46, pp. 153 – 192. **S, G,** 30.

--- (2010), Karl Pearson a centenary and a half after his birth. *Math. Scientist*, vol. 35, pp. 1 – 9. **S, G,** 35.

--- (2016), The other Bessel. Только **S, G,** 72.

Bennett J. H., редактор (1983), *Natural Selection. Heredity and Eugenics including Sel. Corr. of R. A. Fisher with Leonard Darwin and Others*. Oxford – London – Glasgow.

Dronamraju K. R. (1985), *Haldane: Life and Work with sp. ref. to India*. Aberdeen.

Edwards A. W. F. (1994), R. A. Fisher on Karl Pearson. *Notes Rec. Roy. Soc. Lond.*, vol. 48, No. 1, pp. 97 – 106. **S, G,** 81. Автор цитировал переписку Фишера и Легга из этого источника.

Fisher R. A. (1930), *General Theory of Natural Selection*. Clarendon Press, 1990.

--- (1930), Письмо Дж. Хаксли 6 мая. В книге Bennet (1983, pp. 222 – 223).

--- (1932), Письмо Леонарду Дарвину 29 окт. Там же, pp. 156 – 157.

--- (1932), Рецензия на книгу Haldane (1932). Там же, pp. 289 – 291.

--- (1933), Письмо Холдейну 24 мая. Там же, pp. 214 – 215.

--- (1937), Professor Karl Pearson and the method of moments. *Annals of Eug.*, vol. 7, pp. 303 – 318.

--- (1940), Письмо Холдейну 26 сент. В книге Bennet (1983, p. 216).
--- (1948), What sort of a man is Lysenko? *Coll. Papers*, vol. 5. Adelaide, 1974, pp. 61 – 64. **S, G,** 82.
Haldane J. B. S. (1931), Mathematical Darwinism. *Eugenics Rev.*, vol. 23, pp. 115 – 117.
--- (1932), *Causes of Evolution*. Дата новейшего издания видимо 1990
--- (1957), Karl Pearson. *New Biology*, vol. 25, pp. 7 – 26.
Mazumdar P. M. H. (1992), *Eugenics, Human Genetics and Human Failings*. London.
Newton R. R. (1977), *The Crime of Claudius Ptolemy*. Baltimore – London.
Provine W. B. (1986), *Sewall Wright and Evolutionary Biology*. Chicago.
Tisdale W. E. (1937), Письмо Холдейну 7 дек. Архив Холдейна, Box 26. Univ. College London.

Библиография была объединена с примечаниями и потому не всегда понятна. Нам удалось лишь частично подправить её и добавить несколько источников, которые автор указал только в основном тексте.

XIV

А. А. Марков

Предисловие к немецкому изданию 1912 г. его *Исчисления вероятностей*

A. A. Markov, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*.
Leipzig – Berlin, 1912

В этой книге я разрабатываю исчисление вероятностей как математическую дисциплину, но без обстоятельного рассмотрения его более или менее существенных приложений. Без длинных рассуждений об основах исчисления вероятностей, я старался ясно установить предположения, необходимые для обоснования известных теорем, и занялся проблемами чистого анализа, которым посвящена моя книга.

Вместе с тем, я по возможности избегаю избыточных предположений, даже если они всеобще признаны. Я также избегаю сомнительных рассуждений, особенно если они представлены в виде математических доказательств и ставлю на первое место точность и строгость разработок и выводов.

В исчислении вероятностей, как и в других отраслях математики, важную роль играют приближённые формулы. К ним следует прибегать не только тогда, когда вывод точных формул приводит к непреодолимым препятствиям или когда такие формулы необычно сложны, но также, если вычисления по точным формулам хоть и просты, но особенно продолжительны.

Для верного применения приближённых формул важно уметь правильно оценивать их неточность. Тем не менее, имея в виду цели прикладной математики, нельзя полностью отказываться от приближённых формул, которые по той или иной причине остаются без оценки их погрешности. Подобные формулы имеются в моей книге. И следует заметить, что вопрос о неточности формул в естествознании имеет особенность, потому что их исследование связано с величинами, которые без сомнения не определены полностью и достижение математической точности оказывается невозможным.

Второе издание[1] немного отличается от первого. Я несколько изменил и дополнил текст и расширил библиографию, но не имел целью указывать все сочинения по исчислению вероятностей. И я не счёл излишним поместить в конце книги таблицу [функции распределения нормального закона], который играет важную роль в исчислении вероятностей.

Эта таблица взята из моей книги (1888), в которой тот же интеграл без сомножителя приведён с 11-ю знаками и поясняются и применяются различные методы его вычисления. Я не довольствовался простой перепечаткой своих таблиц, а сравнивал их с Burgess (1898)[2], а в случае расхождений обращался к 11-тизначной таблице. Таким образом, я убедился в необходимости изменить в нескольких случаях последний знак прежней шестизначной таблицы на одну единицу.

Немецкое издание[3] дополнительно содержит три из целого ряда сочинений, посвящённых примечательному методу Бьенеме – Чебышева, который относится к рассмотрению математического ожидания различных сложных выражений. Цель этих сочинений состояла не в выводе приближённых формул для выражения вероятностей, а в строгом выводе фундаментальной предельной теоремы теории вероятностей и её возможно более широкое обобщение.

Алупка, дек. 1911

Примечания

1. Марков, видимо, имел в виду предыдущие издания своего трактата, но с какой целью?

2. Fletcher, Miller и др. (1962) заявили, что вплоть до 1940-х годов ни одна другая таблица не могла сравниться с таблицами Маркова и Burgess.

3. Это выражение неверно. Следует читать: три статьи Бьенеме были перепечатаны во французском (а не немецком) журнале *J. Math. Pures Appl.*,

Библиография

Марков А. А., Markov A. A. (1888), *Table des valeurs de l'intégrale* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2)dt$. Pétersbourg.

Burgess J. (1898), On the definite integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \exp(-t^2)dt$ with extended tables of values. *Trans. Roy. Soc. Edinb.*, vol. 39, pp. 257 – 321.

Fletcher A., Miller J. C. P. и др. (1962), *Index of Mathematical Tables*, vol. 1. Oxford.

А. А. Марков

Предисловие к третьему изданию 1913 г. *Исчисления вероятностей*

Третье издание книги отличается от второго некоторыми более или менее важными добавлениями. Во-первых, я счёл полезным сделать ряд новых замечаний в первой главе для лучшего выяснения оснований исчисления вероятностей. Затем, в третьей главе, посвящённой закону больших чисел, я теперь не ограничиваюсь случаями Чебышева, но в особом параграфе показываю, что возможны дальнейшие обобщения. Новый параграф введён также в шестой главе. Я имел в виду пояснить способ наименьших квадратов, применяя его к важному вопросу об определении вероятности по наблюдениям, и, кстати, показать на частном примере как и почему нам приходится для одного и того же события рассматривать несколько различных вероятностей при одинаковых, по-видимому, условиях.

Но главное добавление помещено в конце книги и представляет особое приложение к ней. В нём я обстоятельно и по возможности просто излагаю основания метода математических ожиданий и прилагаю его во многих случаях к доказательству теоремы о пределе вероятностей, как для независимых, так и для связанных величин. На это добавление я особенно обращаю внимание читателей, так как оно существенно отличает новое издание от других сочинений, посвящённых систематическому изложению исчисления вероятностей.

В заключение замечу, что в 1913 г. исполняется двести лет со времени появления труда *Ars Conjectandi*, в котором впервые была опубликована знаменитая теорема Якоба Бернулли, положившая начало закону больших чисел. Поэтому я рассматриваю свою книгу как юбилейное издание и прикладываю к ней портрет Якоба Бернулли, воспроизведённый по фотографии с портрета масляными красками, находящегося в Базеле. Эту фотографию прислала мне библиотека Базельского университета, за что я выражаю ей глубочайшую признательность в лице её обер-библиотекаря Карла Христофа Бернулли.